পদার্থ বিজ্ঞানের অঙ্ক

ডঃ অজয়কুমার চক্রবর্তী
নীলিমা চক্রবর্তী

পদার্থবিজ্ঞানের অঙ্ক

প্রথম খণ্ড

[উচ্চ মাধ্যমিক, জয়েণ্ট এনট্রান্স ও আই. আই টি.
এ্যাডমিশন টেস্ট পরীক্ষার্থীদের জন্য]

ডঃ অজয়কুমার চক্রবর্তী

রীডার, ফলিত পদার্থবিজ্ঞান বিভাগ, কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়,
প্রাক্তন অধ্যাপক, রামমোহন কলেজ, বিদ্যাসাগর কলেজ
(সান্ধ্য বিভাগ), কলিকাতা।

এবং

উচ্চ মাধ্যমিক পদার্থবিজ্ঞান, ব্যবহারিক পদার্থবিজ্ঞান, ভৌত-বিজ্ঞান,
মাধ্যমিক পদার্থবিজ্ঞান ও রসায়ন, পদার্থবিজ্ঞান-বিচিন্তা
ইত্যাদি গ্রন্থের প্রণেতা।

ও

নীলিমা চক্রবর্তী

শিক্ষিকা, নিউ নারী শিক্ষা সদন, কলিকাতা

এবং

'পদার্থবিজ্ঞান-বিচিন্তা', মাধ্যমিক পদার্থবিজ্ঞান ও রসায়ন
ও ভৌত-বিজ্ঞান গ্রন্থের প্রণেত্রী।

পুথিপত্র

৯ এ্যাণ্টনি বাগান লেন, কলিকাতা-৭০০ ০০৯
২ বঙ্কিম চ্যাটার্জী স্ট্রীট, কলিকাতা-৭০০ ০৭৩

উৎসর্গ

শ্রদ্ধেয় অগ্রজ শ্রীগোবিন্দলাল চক্রবর্তীকে

অজয়

ও

নীলিমা

তৃতীয় সংস্করণের ভূমিকা

গ্রন্থটি সম্পর্কে প্রথম সংস্করণে বিস্তারিতভাবে বলা হইয়াছে। কাজেই এখানে নূতন কিছু বলিবার কোন অবকাশ নাই। নূতন সংস্করণের সুযোগে বিভিন্ন অধ্যায়ে কিছু নূতন ধরনের অঙ্ক যোগ করা হইয়াছে। এছাড়া পূর্ববর্তী সংস্করণের যে-সব ভুল-ত্রুটি আমাদের চোখে পড়িয়াছিল বর্তমান সংস্করণে সেইগুলি সংশোধন করিয়া দেওয়া হইল।

আমাদের বিশ্বাস, বর্তমান সংস্করণটি ছাত্রছাত্রীদের নিকট পূর্ববর্তী সংস্করণ অপেক্ষা আরও বেশি উপযোগী হইবে। তবু, গ্রন্থটির উৎকর্ষ-বৃদ্ধির সুযোগ হয়তো এখনো রহিয়া গেল, এ ব্যাপারে সতীর্থ শিক্ষক এবং অধ্যাপকগণের মতামত পাইলে বাধিত হইব।

২১ এ কবি সুকান্ত সরণী
কলিকাতা-৭০০০১০

অজয় কুমার চক্রবর্তী
নীলিমা চক্রবর্তী

প্রথম সংস্করণের ভূমিকা

পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন তত্ত্বের প্রয়োগ-সম্পর্কে অঙ্ক না কষিলে ঐ সকল বিষয় সম্বন্ধে সুস্পষ্ট ধারণা জন্মে না। নানা কারণে পাঠ্যপুস্তকে উপযুক্ত সংখ্যক অঙ্ক কষিয়া দেওয়া সম্ভব হয় না। 'পদার্থবিজ্ঞানের অঙ্ক' গ্রন্থটি পাঠ্যপুস্তকের এই অসম্পূর্ণতা দূর করিবে। এই পরিপ্রেক্ষিতে 'পদার্থবিজ্ঞানের অঙ্ক' গ্রন্থটিকে উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ের পদার্থবিজ্ঞানের পাঠ্যপুস্তকের পরিপূরক গ্রন্থ বলিয়া মনে করা যায়। উচ্চ মাধ্যমিক পাঠ্যসূচীর অন্তর্ভুক্ত সকল বিষয়ের উপর নানা ধরনের অঙ্ক এই গ্রন্থে কষিয়া দেওয়া হইয়াছে এবং ছাত্রছাত্রীদের অনুশীলনের জন্য অনুরূপ বহুসংখ্যক অঙ্ক এই গ্রন্থে কষিতে দেওয়া হইয়াছে। সাধারণ ছাত্রছাত্রীদের উপযুক্ত মানের অঙ্ক যেমন এই গ্রন্থে আছে তেমনি মেধাবী ছাত্রছাত্রীদের উপযোগী জটিলতর অঙ্কও ইহাতে আছে। আমরা নির্দ্বিধায় এই দাবী করিতে পারি যে, আমাদের দেশে প্রচলিত কোন গ্রন্থেই এত বিভিন্ন ধরনের অঙ্কের সমাবেশ নাই। বহু দেশী ও বিদেশী গ্রন্থ, নানা পরীক্ষার প্রশ্নাবলী অনুসন্ধান করিয়া আমরা এই সকল অঙ্ক সংগ্রহ করিয়াছি। উচ্চ মাধ্যমিক পরীক্ষা, আই. আই. টি. অ্যাডমিশন টেস্ট, জয়েন্ট এন্ট্রান্স ইত্যাদি পরীক্ষার বহুসংখ্যক গাণিতিক প্রশ্নের সমাধান এই গ্রন্থে পাওয়া যাইবে। সুতরাং, বিভিন্ন প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষার পরীক্ষার্থীদের পক্ষে এই গ্রন্থটি বিশেষভাবে উপযোগী হইবে।

এই গ্রন্থে একক-চিহ্ন লিখনে যে-রীতি অনসৃত হইয়াছে সে সম্পর্কে কয়েকটি কথা বলা দরকার। আমাদের দেশের গ্রন্থকারদের মধ্যে একক-চিহ্ন লিখনের ক্ষেত্রে ঐক্য নাই। ইহার কারণ এই যে, গ্রন্থকারগণ এ ব্যাপারে আন্তর্জাতিক সুপারিশ অনুসরণ করিতেছেন না। শিক্ষা-সংসদ এ ব্যাপারে সুস্পষ্ট নির্দেশ দিলে একক-চিহ্ন লিখনের ক্ষেত্রে এই 'নৈরাজ্য' এড়ান যাইত। আশা করি, সংসদ-কর্তৃপক্ষ এ ব্যাপারে তৎপর হইবেন এবং গ্রন্থকারদের প্রতি প্রয়োজনীয় নির্দেশ দিবেন।

বর্তমান গ্রন্থে আমরা একক-চিহ্ন লিখনে আন্তর্জাতিক সুপারিশ অনুসরণ করিয়াছি। গ্রন্থটির গোড়াতেই একক-চিহ্ন লিখনের ব্যাপারে আন্তর্জাতিক সুপারিশ সম্পর্কে আলোচনা করা হইয়াছে এবং বিভিন্ন ভৌত-রাশির একক চিহ্নের সংক্ষিপ্ত-রূপ তালিকার আকারে দেওয়া হইয়াছে।

পদার্থবিজ্ঞানের অঙ্ক কষিতে বসিয়া ছাত্রছাত্রীরা অপ্রয়োজনে অনেক সময়ের অপচয় করে। উপযুক্ত আসন্নয়ন (approximation)-এর সাহায্য লইলে অনেক ক্ষেত্রেই নির্ণেয় রাশির সাংখ্যিক মান নির্ধারণের কাজ সহজতর হয় এবং ইহাতে সময়েরও সাশ্রয় হয়। কখন কীরূপ আসন্নয়ন-এর আশ্রয় লইলে গাণিতিক হিসাব-নিকাশ সুবিধাজনক হইবে সে-সম্পর্কে ছাত্রছাত্রীদের অভিজ্ঞতা থাকা দরকার। তাই গ্রন্থটির গোড়াতেই সম্ভাব্য নানা আসন্নয়ন পদ্ধতি লইয়া আলোচনা করা হইয়াছে। কেবল তাহাই নয়, ছাত্রছাত্রীদিগকে আসন্নয়নের বিভিন্ন সূত্রাদি সম্পর্কে অভ্যস্ত করিবার উদ্দেশ্যে এই গ্রন্থের প্রথম পরিচ্ছেদে আসন্নয়ন পদ্ধতি-সংক্রান্ত কিছু অঙ্ক অনুশীলন রূপে দেওয়া হইয়াছে। এই অঙ্কগুলি কষিলে ছাত্রছাত্রীগণ আসন্নয়নের উপযোগিতা বুঝিতে পারিবে এবং প্রয়োজনে এই পদ্ধতির ব্যবহার করিয়া পদার্থ-বিজ্ঞানের অঙ্ক কষিবার কালে যথেষ্ট সময় বাঁচাইতে পারিবে।

গ্রন্থটির রচনাকালে সতীর্থ অধ্যাপক ও শিক্ষকগণ আমাদের নানাভাবে উৎসাহিত করিয়াছেন। তাঁহাদের নিকট আমরা আমাদের কৃতজ্ঞতা জানাইতেছি। গ্রন্থটিতে ব্যবহৃত চিত্রগুলি আঁকিয়াছেন শ্রীবুলবুল চৌধুরী এবং প্রচ্ছদটি আঁকিয়াছেন শ্রীচন্দ্রনাথ দে। তাঁহাদের আমরা আন্তরিক ধন্যবাদ জানাইতেছি। মুদ্রণকালে পুথিপত্রের কর্মীরা ও প্রেসের কর্মীরা নানাভাবে আমাদের সাহায্য করিয়াছেন। তাঁহাদের নিকট আমাদের কৃতজ্ঞতার সীমা নাই। গ্রন্থটির প্রকাশনার দায়িত্ব লইয়া প্রকাশক শ্রীঅচ্যুতানন্দ সাহা আমাদের কৃতজ্ঞতাপাশে আবদ্ধ করিয়াছেন।

গ্রন্থটির উৎকর্ষ-সাধনে সতীর্থ অধ্যাপক ও শিক্ষকগণের পরামর্শ কৃতজ্ঞতার সহিত গৃহীত হইবে।

২১এ, কবি সুকান্ত সরণী
কলিকাতা-৭০০০১০

অজয়কুমার চক্রবর্তী
নীলিমা চক্রবর্তী

সূচীপত্র

বলবিজ্ঞান

সাধারণ পদার্থবিজ্ঞান

তাপবিজ্ঞান

কম্পন ও তরঙ্গ

প্রথম পরিচ্ছেদ

একক চিহ্নের লিখন ও আসমন্বয়ন

1.1 এককের চিহ্ন লিখনে আন্তর্জাতিক সুপারিশ : বাংলাভাষায় লিখিত বিভিন্ন পাঠ্যপুস্তকে এককের চিহ্নের ব্যবহারে ঐক্য নাই। সময়ের একক 'সেকেণ্ড' বুঝাইতে অধিকাংশ লেখক 'sec' ব্যবহার করেন, ভরের একক 'গ্রাম' বুঝাইতে অধিকাংশ গ্রন্থকার 'gm' ব্যবহার করেন। কেহ কেহ আবার এককের চিহ্নের পর ফুল-স্টপ (full stop) ব্যবহার করিবার পক্ষপাতি। যেমন—sec., gm, ইত্যাদি। 5 গ্রাম বুঝাইতে কোন গ্রন্থকার লেখেন 5 gm, কেহ লেখেন 5 gm., আবার কেহ কেহ লেখেন 5 gms। স্পষ্টতই, এ ব্যাপারে বিভিন্ন গ্রন্থকার একমত নহেন।

এখানে উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, এককের চিহ্ন লিখনের ক্ষেত্রে একটি সুনির্দিষ্ট আন্তর্জাতিক সুপারিশ রহিয়াছে।

এককের চিহ্ন লিখনের ক্ষেত্রে সকল গ্রন্থকার যদি এই আন্তর্জাতিক সুপারিশ অনুসরণ করেন, তবে তাঁহাদের মধ্যে এককের চিহ্ন লিখিবার প্রথার অনৈক্য দূর হইতে পারে। এ ব্যাপারে শিক্ষক ও শিক্ষার্থীদের দৃষ্টি আকর্ষণের জন্য এককের চিহ্ন লিখিবার আন্তর্জাতিক সুপারিশ লইয়া আলোচনা করিব।

ইহা ছাড়া, বর্তমান গ্রন্থে এককের চিহ্ন লিখনে আমরা উক্ত আন্তর্জাতিক সুপারিশই অনুসরণ করিব।

এককের চিহ্ন লিখিবার সময়ে নিম্নোক্ত নিয়মগুলি মানিয়া চলিতে হইবে—

(i) এককের চিহ্নগুলির পরে 'ফুল-স্টপ' (full stop) দেওয়া হইবে না। উদাহরণস্বরূপ : cm লিখিতে হইবে, cm. লেখা হইবে না।

(ii) বহুবচনে একক চিহ্নগুলির কোন পরিবর্তন হইবে না। উদাহরণস্বরূপ : 10 cm লিখিতে হইবে, 10 cms নয়।

(iii) এককের নামগুলি ইংরাজী ছোট হাতের হরফে লিখিতে হইবে। তবে, নিউটন, জুল, অ্যাম্পিয়ার, ওয়াট ইত্যাদি যে-সকল একক বিজ্ঞানীদের নামানুসারে হইয়াছে উহাদের চিহ্নে আদ্যাক্ষরটি বড় হরফে লিখিতে হইবে। উদাহরণস্বরূপ : N (নিউটন), W (ওয়াট), A (অ্যাম্পিয়ার), J (জুল) ইত্যাদি। কিন্তু, মিটার-এর চিহ্ন 'm', গ্রামের চিহ্ন 'g', ডাইন-এর 'dyn' ইত্যাদি।

1.2 একক বা বিভিন্ন একক চিহ্নের গুণ ও ভাগ : (i) এককের চিহ্নগুলিকে বীজগাণিতিক রাশি বলিয়া মনে করা যায়। এক বা একাধিক একক

চিহ্নের গুণ ও ভাগের ক্ষেত্রে বীজগাণিতিক ঘাতাঙ্ক (index)-সংক্রান্ত নিয়মগুলি প্রযোজ্য হইবে। উদাহরণস্বরূপ :

$$\mathrm{cm}\times\mathrm{cm}\times\mathrm{cm}=\mathrm{cm}^3,$$

$$\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{cm}^2}=\mathrm{cm}$$ ইত্যাদি।

(ii) দুইটি রাশির এককের চিহ্ন যথাক্রমে x এবং y হইলে উহাদের গুণন বুঝাইতে নিম্নের যে-কোন রূপ ব্যবহার করা যাইবে :

$$x\,y \quad \text{বা} \quad x.y$$

উদাহরণস্বরূপ : dyn-cm বা dyn.cm

(dyn=ডাইন, cm=সেন্টিমিটার)

(iii) দুইটি রাশির এককের চিহ্ন যথাক্রমে x এবং y হইলে উহাদের ভাগ বুঝাইতে নিম্নের যে-কোন রূপ ব্যবহার করা যাইবে :

$$\frac{x}{y}, \qquad x/y, \quad \text{বা,} \quad xy^{-1}$$

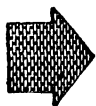
উদাহরণস্বরূপ : $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$, cm/s বা cm s^{-1}

(cm=সেন্টিমিটার, s=সেকেণ্ড)

(iv) একটি রাশির একক চিহ্নে ভাগ বুঝাইতে তির্যক চিহ্ন (/) একবারের বেশি ব্যবহার করা হইবে না।

উদাহরণস্বরূপ : ত্বরণের একককে m/s/s না লিখিয়া $\mathrm{m/s^2}$ বা $\mathrm{m\ s^{-2}}$ লিখিতে হইবে।

আপেক্ষিক তাপের একক cal/g/°C না লিখিয়া cal/g°C বা cal $\mathrm{g^{-1}\ {}^\circ C^{-1}}$ লেখা হইবে।

● বিশেষ দ্রষ্টব্য ●

লক্ষণীয় যে, আন্তর্জাতিক সুপারিশ-অনুযায়ী সেকেণ্ডের একক-চিহ্ন হইল s (sec নয়) এবং গ্রামের একক-চিহ্ন হইল g (gm নয়)।

1.3 একক চিহ্নে শব্দাগ্র ব্যবহার : এককের দশমিক ভগ্নাংশ বা গুণিতক বুঝাইতে যে-সকল শব্দাগ্র (prefix) ব্যবহৃত হয় একক-চিহ্নের সম্মুখে উহাদের সংক্ষিপ্ত রূপ যোগ করা যায়। একক চিহ্নে শব্দাগ্রের সংক্ষিপ্ত-রূপ ব্যবহারের ক্ষেত্রেও বিভিন্ন গ্রন্থকার বিভিন্ন প্রথা অনুসরণ করেন। এ ব্যাপারেও ঐক্য প্রতিষ্ঠা হওয়া প্রয়োজন বলিয়া আমরা মনে করি। বর্তমানে আন্তর্জাতিক সম্মতিক্রমে যে-প্রথা ব্যবহৃত হইতেছে পরপৃষ্ঠায় তালিকার আকারে তাহা দেওয়া হইল।

শব্দাগ্র	অর্থ	একক-চিহ্নে ব্যবহৃত রূপ
ডেসি (deci)	10^{-1} অংশ	d
সেন্টি (centi)	10^{-2} অংশ	c
মিলি (milli)	10^{-3} অংশ	m
মাইক্রো (micro)	10^{-6} অংশ	μ
ন্যানো (nano)	10^{-9} অংশ	n
পিকো (pico)	10^{-12} অংশ	p
কিলো (kilo)	10^{3} গুণ	k
মেগা (mega)	10^{6} গুণ	M
গিগা (giga)	10^{12} গুণ	G

উদাহরণস্বরূপ ঃ ন্যানোসেকেণ্ড বুঝাইতে ns, মিলিমিটার বুঝাইতে mm, পিকোফ্যারাড বুঝাইতে pF, মেগাহার্ৎস বুঝাইতে MHz, গিগাওয়াট বুঝাইতে GW লেখা হইবে।

উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, যেখানে একটি শব্দাগ্র ব্যবহার করিলেই কাজ হয় সেখানে দুইটি শব্দাগ্র ব্যবহার করা হইবে না। যেমন, ন্যানোমিটার বুঝাইতে nm লিখিতে হইবে, ইহার পরিবর্তে mμm লেখা যাইবে না।

1.4 সি. জি. এস. ও এম. কে. এস. পদ্ধতির একক ও উহাদের আন্তর্জাতিক চিহ্ন ঃ

রাশি	এককের নাম	একক চিহ্ন
দৈর্ঘ্য	সেন্টিমিটার	cm
	মিটার	m
সময়	সেকেণ্ড	s
ভর	গ্রাম	g
	কিলোগ্রাম	kg
কম্পাঙ্ক	হার্ৎস (hertz = s^{-1})	Hz
বল	ডাইন (dyne = g-cm/s^2)	dyn
	নিউটন (newton = kg-m/s^2)	N
কার্য, শক্তি	আর্গ (erg = g-cm^2/s^2)	erg
	জুল (joule = kg-m^2/s^2)	J
ক্ষমতা	ওয়াট (watt = J/s)	W
চাপ	মাইক্রোবার = (dyne/cm^2)	μbar
চৌম্বক ক্ষেত্র	ওয়রস্টেড (oersted)	Oe
চৌম্বক প্রবাহ	গাউস (gauss)	G
	ওয়েবার (weber)	Wb

রাশি	এককের নাম	একক চিহ্ন
তড়িৎ-প্রবাহ	অ্যাম্পিয়ার (ampere)	A
তড়িদাধান	কুলম্ব (coulomb)	C
বিভব-বৈষম্য তড়িচ্চালক বল	ভোল্ট	V
ধারকত্ব	ফ্যারাড	F
রোধ	ওহ্‌ম	Ω
স্বাবেশ-গুণাঙ্ক পারস্পরিক আবেশ গুণাঙ্ক	হেনরি	H
দীপন-প্রাবল্য (intensity)	ক্যাণ্ডেলা	cd
আলোক-প্রবাহ	লুমেন	lm
দীপন-মাত্রা	লাক্স (lm/m^2)	lx
সমতলীয় কোণ	রেডিয়ান	rad
ঘন কোণ	স্টেরেডিয়ান	sr

এফ. পি. এস. পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক 'ফুট' এবং ভরের একক 'পাউণ্ড'। ওজন ও পরিমাপের আন্তর্জাতিক সংস্থা-কর্তৃক স্বীকৃত নয় বলিয়া এই পদ্ধতির একক সম্পর্কে কোন আন্তর্জাতিক সুপারিশ নাই। আমাদের দেশে এখনও ব্যাপকভাবে এই পদ্ধতি প্রয়োগ হইতেছে বলিয়া বর্তমান গ্রন্থে আমরা এফ. পি. এস. পদ্ধতির এককও ব্যবহার করিব। এই সকল এককের একক-চিহ্ন সম্পর্কেও একটি নির্দিষ্ট রীতি প্রচলিত হওয়া দরকার। আমরা এই পদ্ধতির দৈর্ঘ্যের একক ফুটকে 'ft' চিহ্ন দ্বারা এবং ভরের একক পাউণ্ডকে 'lb' চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করিব।

এই গ্রন্থে ব্যবহৃত অন্য কয়েকটি এককের নাম এবং উহাদের একক-চিহ্নের তালিকাও নিম্নে দেওয়া হইল।

রাশি	এককের নাম	একক চিহ্ন
সময়	ঘণ্টা	h
দৈর্ঘ্য	মাইল	mi
	ইঞ্চি	in
	অ্যাংস্ট্রম	Å
আয়তন	লিটার	l
	ঘন সেন্টিমিটার	cm^3

রাশি	এককের নাম	একক চিহ্ন
চাপ	অ্যাটমস্ফিয়ার	atm
	বার	b
শক্তি	কিলোওয়াট-আওয়ার	kWh
	অশ্বক্ষমতা	H.P.
	ইলেকট্রন-ভোল্ট	eV
তাপ	ব্রিটিশ থার্মাল ইউনিট	Btu
	ক্যালরি	cal

1.5 বিভিন্ন পদ্ধতির এককের পারস্পরিক রূপান্তরের তালিকা : অনেক ক্ষেত্রে এক পদ্ধতির একককে অন্য পদ্ধতির এককে রূপান্তরিত করিয়া লইতে হয়। এই উদ্দেশ্যে বিভিন্ন পদ্ধতির এককের পারস্পরিক সম্পর্ক জানা দরকার। নিম্নে বিভিন্ন পদ্ধতির এককগুলির সম্পর্কের একটি তালিকা দেওয়া হইল। ছাত্রছাত্রীরা এই সম্পর্কগুলি মনে রাখিলে উপকৃত হইবে।

1 ইঞ্চি (inch) = 2·54 সেন্টিমিটার
1 ফুট (foot) = 30·48 সেন্টিমিটার
1 মিটার (metre) = 39·37 ইঞ্চি
1 অ্যাংস্ট্রম্ (angstrom unit) = 10^{-8} সেন্টিমিটার
1 কিলোমিটার = 0·6214 মাইল (mile)
1 মাইল (mile) = 1·609 কিলোমিটার
1 মাইল = 5280 ফুট (foot)
1 ঘনফুট = 28·3 লিটার (litre)
1 পাউণ্ড (pound) = 453·6 গ্রাম (gram)
1 গ্যালন = 4·536 লিটার
1 মাইল/ঘণ্টা = 1·47 ft/s = 0·447 m/s
1 অ্যাট্মস্ফিয়ার (atmosphere) = 29·9 inHg = 76·0 cmHg
1 দিন (day) = 86,400 সেকেণ্ড
1 ব্রিটিশ তাপ একক (British thermal unit) = 252 ক্যালরি
1 অশ্বক্ষমতা = 550 ft-lb/s = 746 W (ওয়াট)
1 ইলেকট্রন-ভোল্ট = $1·6 \times 10^{-19}$ J (জুল)
$180° = \pi$ rad (রেডিয়ান)
1 rad = 57·3°
1 কিলোগ্রাম = 2·21 lb (পাউণ্ড)

1.6 পদার্থবিজ্ঞানের অঙ্ক কষিবার ব্যাপারে ছাত্রছাত্রীদের প্রতি কয়েকটি সাধারণ নির্দেশ :

(1) প্রশ্নটি ভালভাবে পড়িয়া প্রথমে দেখিয়া লইতে হইবে যে, কোন্ কোন্ রাশি নির্ণয় করিতে বলা হইয়াছে।

(2) ইহার পরবর্তী ধাপটি জটিল, কেননা এখানেই বুদ্ধি, চিন্তাশক্তি ও অভিজ্ঞতার প্রয়োজন। প্রথমে দেখিতে হইবে, যে-রাশিটির মান নির্ধারণ করিতে বলা হইয়াছে তাহা নির্ধারণের জন্য তোমার কী কী জানা প্রয়োজন। কোন্‌টি আগে জানা দরকার, প্রশ্নে সরবরাহিত উপাত্তগুলি হইতে কীভাবে তাহা জানা যাইবে তাহা ভালভাবে বুঝিয়া লইতে হইবে। কীরূপে তাহা বুঝা যাইবে সে-সম্পর্কে কোন সুনির্দিষ্ট নিয়ম নাই, তবে ছাত্রছাত্রীরা নিম্নের প্রশ্নগুলির উত্তর খুঁজিতে পারে :

(i) নির্ণেয় রাশিটি আর কোন্ রাশির উপর নির্ভরশীল ? অঙ্কে উল্লেখিত রাশিগুলির সঙ্গে নির্ণেয় রাশিটি কোন্ সূত্র বা নীতির দ্বারা সম্পর্কযুক্ত ? নির্ণেয় রাশিটি কি এমন কোন রাশির উপর নির্ভরশীল যাহার মান প্রদত্ত উপাত্ত হইতে নির্ধারণ করিয়া লওয়া যায় ?

(ii) অঙ্কে প্রদত্ত শর্তাদি সম্পর্কে কোনরূপ সরলকারী অঙ্গীকার (assumptions) করা যায় কি ? অঙ্কটি কষিবার সুবিধার জন্য কোন সরলকারী আসন্নয়ন (approximation)-এর আশ্রয় লওয়া যায় কি ?

কোন অঙ্ক কষিবার ক্ষেত্রে কোন্ কোন্ সূত্র বা ফর্মুলা কার্যকরী হইবে, কোন্ ধারণা প্রাসঙ্গিক হইবে তাহা সহজে বুঝিবার সামর্থ্য অর্জন করিবার জন্য গ্রন্থের সমাহিত অঙ্কগুলিকে ভালভাবে বুঝিয়া লইতে হইবে। তবে, নিজের চেষ্টায় নানাবিধ অঙ্ক কষিয়া ছাত্রছাত্রীরা যে-অভিজ্ঞতা ও দক্ষতা অর্জন করে তাহার কোন বিকল্প নাই। বিভিন্ন ধরনের অঙ্ক কষিবার সময়ে বিবেচনাধীন ভৌত রাশিগুলির পারস্পরিক সম্পর্ক, বিভিন্ন ধরনের প্রশ্নাবলীর বৈশিষ্ট্য ইত্যাদির সঙ্গে ছাত্রছাত্রীরা সুপরিচিত হইয়া উঠিবে। ইহার পর যে-কোন নূতন অঙ্কও তাহারা আত্মবিশ্বাসের সহিত কষিতে পারিবে।

পদার্থবিজ্ঞানের অঙ্কের সমাধান লিখিবার নিয়ম :

(1) পদার্থবিজ্ঞানের কোন গাণিতিক প্রশ্নের সমাধান করিবার সময় প্রশ্নটিতে প্রদত্ত তথ্যগুলিকে সংক্ষেপে লিখিয়া লওয়া অনেক ক্ষেত্রে সুবিধাজনক। অনেক সময় চিত্র অঙ্কন করিয়া উহাতে প্রদত্ত উপাত্তগুলি চিহ্নিত করিয়া লইলে অঙ্কটি ভালভাবে বুঝিয়া লওয়া সহজ হয়। মনে রাখা দরকার যে, প্রদত্ত রাশিগুলিকে একই পদ্ধতির এককে লিখিতে হইবে।

(2) অঙ্ক কষিবার সময়ে যে-নীতি বা সূত্র প্রয়োগ করিতে হইবে তাহা সুস্পষ্টভাবে উল্লেখ করা দরকার। যে-সব অঙ্ক কষিবার জন্য কোন সুপরিচিত সমীকরণের সাহায্য লইতে হয়, সেই সকল ক্ষেত্রে সমীকরণের রাশিগুলির তাৎপর্য উল্লেখ করিলেই চলে।

(3) সাংখ্যিক গণনা (numerical calculations) এমনভাবে করিতে হইবে যাহাতে কোন ত্রুটি হইলে তাহা সহজেই চোখে পড়ে।

(4) প্রদত্ত রাশিগুলির একক লিখিবার সময়ে সতর্কতা প্রয়োজন। নির্ণেয় রাশির একক লিখিবার কথা অবশ্যই মনে রাখিতে হইবে।

1.7 গণনায় আসন্নয়নের প্রয়োগ (Approximation in calculations) ঃ

পদার্থবিজ্ঞানের অঙ্ক কষিতে বসিয়া ছাত্রছাত্রীরা অনেক ক্ষেত্রে অপ্রয়োজনে বহু সময়ের অপচয় করে। কয়েকটি গ্রহণযোগ্য আসন্নয়ন (approximation)-এর সাহায্য লইলে বহু ক্ষেত্রে গাণিতিক হিসাব-নিকাশ অতি অল্প সময়ে সম্পন্ন করা যায়। এই সকল আসন্নয়ন পদ্ধতির সহিত ছাত্রছাত্রীদের পরিচয় থাকা একান্ত দরকার। প্রথমে কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে আসন্নয়নের উপযোগিতা দেখান হইল।

(i) **গুণন ঃ** মনে করি, কোন একটি অঙ্কে 1·0057-এর সহিত 1·0025 গুণ করিতে হইবে।

সরাসরি গুণ করিয়া পাই, $x = 1{\cdot}0057 \times 1{\cdot}0025 = 1{\cdot}00821425$

দশমিকের পর চতুর্থ অঙ্ক পর্যন্ত রাখিয়া পাই, $x = 1{\cdot}0082$ ... (i)

স্পষ্টতই, এইরূপ সরাসরি গুণ করিয়া উপরি-উক্ত গুণফল নির্ণয় সময়-সাপেক্ষ। কিন্তু এইরূপ ক্ষেত্রে উপযুক্ত আসন্নয়নের আশ্রয় লইয়া অনেক অল্প আয়াসে এবং অল্প সময়ে এই গুণফলের মান পাওয়া যায়।

মনে করি, $x = (1+\alpha)(1+\beta)$

এখানে, α এবং β—ইহারা উভয়েই 1-এর তুলনায় অতি ক্ষুদ্র। তাহা হইলে α এবং β-এর গুণফল 1 হইতে আরও ছোট এবং উপেক্ষণীয় হইবে।

এখন, $x = (1+\alpha)(1+\beta)$ ... (ii)

$= 1+\alpha+\beta+\alpha\beta$

$\alpha\beta$ উপেক্ষণীয় বলিয়া আমরা লিখিতে পারি যে,

$$\boxed{(1+\alpha)(1+\beta) = 1+\alpha+\beta} \quad \text{... (iii)}$$

এইবার আমরা পুনরায় আমাদের পূর্ববর্তী উদাহরণে ফিরিয়া আসি। আমরা 1·0057 এবং 1·0025—এই দুইটি সংখ্যার গুণফল নির্ণয় করিতে চাই।

স্পষ্টতই, $x = 1{\cdot}0057 \times 1{\cdot}0025 = (1+{\cdot}0057) \times (1+{\cdot}0025)$

এই সমীকরণটিকে (ii)-এর সহিত তুলনা করিয়া দেখা যায়, এক্ষেত্রে $\alpha = 0{\cdot}0057$ এবং $\beta = 0{\cdot}0025$

কাজেই, $x = 1+\alpha+\beta = 1+{\cdot}0057+0{\cdot}0025 = 1{\cdot}0082$ ... (iv)

গুণফলের এই মান দশমিকের পর চার অঙ্ক পর্যন্ত সরাসরি গুণ করিয়া প্রাপ্ত ফলের সমান (সমীকরণ (i) দ্রষ্টব্য)। সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, এরূপ ক্ষেত্রে সরাসরি গুণ করিয়া সময়ের অপচয় করিবার কোন অর্থ নাই।

এইবার মনে করি, $x = (1-\alpha)(1+\beta)$ ... (v)

এখানে, α এবং β-এর মান 1-এর তুলনায় নগণ্য।

কাজেই, $x=(1-\alpha)(1+\beta)=1-\alpha+\beta-\alpha\beta$

$\alpha\beta$ পদটি উপেক্ষণীয় বলিয়া পাই, $x=1-\alpha+\beta$

অর্থাৎ, $\boxed{(1-\alpha)(1+\beta)=1-\alpha+\beta}$ ... (vi)

এই আসন্নয়নের প্রয়োগ দেখাইবার জন্য একটি উদাহরণ লওয়া যাক।

ধরি, $x=0{\cdot}992\times1{\cdot}0059$

সরাসরি গুণ করিয়া পাই, $x=0{\cdot}9978528$

দশমিকের পর চার অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান লইয়া পাই,

$x=0{\cdot}9979$ ... (vii)

এইবার দেখা যাক্, আসন্নয়ন প্রয়োগ করিয়া কীরূপে আমরা অপেক্ষাকৃত অল্প সময়ে এবং অল্প পরিশ্রমে x-এর মান পাইতে পারি।

$x=0{\cdot}992\times1{\cdot}0059=(1-0{\cdot}008)\times(1+{\cdot}0059)$ ... (viii)

সমীকরণ (v)-এর সহিত তুলনা করিয়া দেখা যাইতেছে যে, এক্ষেত্রে $\alpha=0{\cdot}008$ এবং $\beta=0{\cdot}0059$

কাজেই, $x=1-\alpha+\beta$ [(v) হইতে]

$=1-0{\cdot}008+0{\cdot}0059=0{\cdot}9979$ ... (ix)

গুণফলের এই মান দশমিকের পর চার অঙ্ক পর্যন্ত সরাসরি গুণ করিয়া প্রাপ্ত ফলের সমান (সমীকরণ (vii) দ্রষ্টব্য)।

অনুরূপভাবে, α এবং β-এর মান 1 অপেক্ষা অতি ক্ষুদ্র হইলে পাই,

$(1-\alpha)(1-\beta)=1-\alpha-\beta+\alpha\beta$

বা, $\boxed{(1-\alpha)(1-\beta)=1-\alpha-\beta}$

(ii) অন্যোন্যক (reciprocal) নির্ণয় :

মনে করি, $x=\dfrac{1}{1+\alpha}$ এবং $\alpha\ll1$ ... (x)

কাজেই, $x=(1+\alpha)^{-1}$

$=1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\ldots\ldots$ [দ্বিপদ বিস্তার করিয়া পাই]

এখন, α ক্ষুদ্র বলিয়া প্রথম পদ দুইটি ব্যতীত অন্য পদগুলি উপেক্ষণীয়। সুতরাং, $x=1-\alpha$

অর্থাৎ, $\boxed{\dfrac{1}{1+\alpha}=1-\alpha}$ ... (xi)

অনুরূপভাবে, α ক্ষুদ্র হইলে লেখা যায় যে,

$\boxed{\dfrac{1}{1-\alpha}=1+\alpha}$ ... (xii)

পরপৃষ্ঠায় উপরি-উক্ত আসন্নয়ন প্রয়োগ করিয়া কয়েকটি রাশির অন্যোন্যক (reciprocal) নির্ণয় করা হইল।

উদাহরণ 1.1 আসন্নয়ন প্রয়োগ করিয়া $\frac{1}{1\cdot0026}$-এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $x=\frac{1}{1\cdot0026}=\frac{1}{1+0\cdot0026}$

সমীকরণ (xi) হইতে লেখা যায়, $x=1-0\cdot0026=0\cdot9974$

উদাহরণ 1.2 আসন্নয়ন পদ্ধতিতে $\frac{1}{0\cdot9911}$-এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, $x=\frac{1}{0\cdot9911}=\frac{1}{1-0\cdot0089}$

সমীকরণ (xii) হইতে লেখা যায়, $x=\frac{1}{1-0\cdot0089}=1+0\cdot0089=1\cdot0089$

(iii) ভাগ : এইবার, মনে করি 1-এর খুব কাছাকাছি মানের দুইটি রাশির ভাগফল নির্ণয় করিতে হইবে।

ধরি, $x=\frac{1+\alpha}{1+\beta}$ এখানে $\alpha\ll1$ এবং $\beta\ll1$

$$=(1+\alpha)(1+\beta)^{-1}=(1+\alpha)(1-\beta+\beta^2-\beta^3+\cdots)$$

β ক্ষুদ্র বলিয়া পাই, $x=(1+\alpha)(1-\beta)=1+\alpha-\beta-\alpha\beta$

$\alpha\beta$ পদটিকে উপেক্ষা করিয়া লেখা যায়, $x=1+\alpha-\beta$

সুতরাং, $$\boxed{\frac{1+\alpha}{1+\beta}=1+\alpha-\beta} \quad \cdots \quad \text{(xiii)}$$

অনুরূপভাবে, $$\frac{1+\alpha}{1-\beta}=1+\alpha+\beta \quad \cdots \quad \text{(xiv)}$$

$$\frac{1-\alpha}{1+\beta}=1-\alpha-\beta \quad \cdots \quad \text{(xv)}$$

এবং $$\frac{1-\alpha}{1-\beta}=1-\alpha+\beta \quad \cdots \quad \text{(xvi)}$$

উপরি-উক্ত সমীকরণগুলির প্রয়োগ দেখাইবার জন্য কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদাহরণ 1.3 আসন্নয়ন প্রয়োগ করিয়া $\frac{1\cdot0018}{1\cdot0009}$-এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে, $x=\frac{1\cdot0018}{1\cdot0009}=\frac{1+0\cdot0018}{1+0\cdot0009}$

সমীকরণ (xiii) হইতে লেখা যায়,

$$x=\frac{1+0\cdot0018}{1+0\cdot0009}=1+0\cdot0018-0\cdot0009=1\cdot0009$$

উদাহরণ 1.4 আসন্নয়নের সাহায্য লইয়া $\frac{1{\cdot}0041}{0{\cdot}9987}$-এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে, $x=\frac{1{\cdot}0041}{0{\cdot}9987}=\frac{1+0{\cdot}0041}{1-0{\cdot}0013}$

সমীকরণ (xiv) হইতে পাই,

$$x=\frac{1+0{\cdot}0041}{1-0{\cdot}0013}=1+0{\cdot}0041+0{\cdot}0013=1{\cdot}0054$$

উদাহরণ 1.5 উপযুক্ত আসন্নয়নের সাহায্যে $\frac{0{\cdot}9931}{1{\cdot}0012}$-এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে, $x=\frac{0{\cdot}9931}{1{\cdot}0012}=\frac{1-0{\cdot}0069}{1+0\ 0012}$

সমীকরণ (xv) হইতে পাই, $x=\frac{1-0{\cdot}0069}{1+0{\cdot}0012}$

$$=1-0{\cdot}0069-0{\cdot}0012=1-0{\cdot}0081=0{\cdot}9919$$

উদাহরণ 1.6 আসন্নয়নের সাহায্যে $\frac{0{\cdot}9989}{0{\cdot}9907}$-এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে, $x=\frac{0{\cdot}9989}{0{\cdot}9907}=\frac{1-0{\cdot}0011}{1-0{\cdot}0093}$

সমীকরণ (xvi) হইতে লেখা যায়,

$$x=\frac{1-0{\cdot}0011}{1-0{\cdot}0093}=1-0{\cdot}0011+0{\cdot}0093=1{\cdot}0082$$

(iv) **বর্গমূল নির্ণয় ঃ** আসন্নয়ন করিয়া অতি অল্প সময়ে 1-এর নিকটবর্তী কোন রাশির বর্গমূলও নির্ণয় করা যায়।

মনে করি, $x=\sqrt{1+\alpha}$

কাজেই, $x=(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}$

$$=1+\tfrac{1}{2}\alpha+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{\lfloor 2}\alpha^2+\cdots$$

$1=+\frac{1}{2}\alpha$ (অন্যান্য পদ উপেক্ষণীয় বলিয়া)

সুতরাং, $\boxed{\sqrt{1+\alpha}=(1+\tfrac{1}{2}\alpha)}$ = (xvii)

অনুরূপভাবে, $\alpha \ll 1$ হইলে

$\boxed{\sqrt{1-\alpha}=1-\tfrac{1}{2}\alpha}$ ... (xviii)

উপরি-উক্ত আসন্নয়ন দুইটির প্রয়োগ দেখাইবার জন্য নিম্নে দুইটি উদাহরণ লওয়া হইল।

উদাহরণ 1.7 আসন্নয়নের সাহায্যে 1·0023-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x=\sqrt{1{\cdot}0023}=\sqrt{1+0{\cdot}0023}$

সমীকরণ (xvii) হইতে পাই, $x=\sqrt{1+0{\cdot}0023}$

$$=1+\tfrac{1}{2}\times 0{\cdot}0023$$
$$=1+0{\cdot}00115=1{\cdot}00115$$

উদাহরণ 1.8 আসন্নয়ন ব্যবহার করিয়া $\sqrt{0{\cdot}9986}$-এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $x=\sqrt{0{\cdot}9986}=\sqrt{1-0{\cdot}0014}$

সমীকরণ (xviii) হইতে লেখা যায়,

$x=\sqrt{1-0{\cdot}0014}=1-\tfrac{1}{2}\times 0{\cdot}0014=1-0{\cdot}0007=0{\cdot}9993$

1.7 আরও কয়েকটি প্রয়োজনীয় আসন্নয়ন

$$(1+\alpha)^2=1+2\alpha+\alpha^2$$

α ক্ষুদ্র হইলে α^2 উপেক্ষা করিয়া পাই,

$$\boxed{(1+\alpha)^2=1+2\alpha}$$

অনুরূপভাবে, $(1+\alpha)^3=1+3\alpha$

সাধারণভাবে বলা যায়, α ক্ষুদ্র হইলে

$$(1+\alpha)^n=1+n\alpha$$
$$(1+\alpha)^{-n}=1-n\alpha$$

এখানে, সূচক n ভগ্নাংশও হইতে পারে। যেমন, α ক্ষুদ্র হইলে

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{3}}=1+\tfrac{1}{3}\alpha$$

* **সাংখ্যিক গণনার ক্ষেত্রে আসন্নয়ন প্রসঙ্গে নিম্নের সম্পর্কগুলি মনে রাখিলে ছাত্রছাত্রীরা উপকৃত হইবে।**

α এবং β ক্ষুদ্র হইলে,

(i) $(1+\alpha)(1+\beta)=1+\alpha+\beta$

(ii) $(1-\alpha)(1+\beta)=1-\alpha+\beta$

(iii) $(1-\alpha)(1-\beta)=1-\alpha-\beta$

(iv) $\dfrac{1}{1-\alpha}=1+\alpha$

(v) $\dfrac{1}{1+\alpha}=1-\alpha$

(vi) $\dfrac{1+\alpha}{1+\beta}=1+\alpha-\beta$

(vii) $\dfrac{1+\alpha}{1-\beta}=1+\alpha+\beta$

(viii) $\dfrac{1-\alpha}{1+\beta}=1-\alpha-\beta$

(ix) $\dfrac{1-\alpha}{1-\beta}=1-\alpha+\beta$

(x) $\sqrt{1+\alpha}=1+\frac{1}{2}\alpha$

(xi) $\sqrt{1-\alpha}=1-\frac{1}{2}\alpha$

(xii) $(1+\alpha)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\alpha$

(xiii) $(1-\alpha)^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}\alpha$

(xiv) $(1+\alpha)^{n}=1+n\alpha$

(xv) $(1+\alpha)^{-n}=1-n\alpha$

অনুশীলনী

আসন্নয়নের সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

1. $1{\cdot}0026\times1{\cdot}0003$
2. $1{\cdot}0025\times0{\cdot}998$
3. $0{\cdot}9921\times0{\cdot}9966$
4. $\dfrac{1{\cdot}0015\times1{\cdot}0009}{0{\cdot}9991}$
5. $\sqrt{1{\cdot}00056}$
6. $\sqrt{0{\cdot}99927}$
7. $\sqrt{1{\cdot}0007\times1{\cdot}0021}$
8. $1\div0{\cdot}9969$
9. $1\div1{\cdot}00016$
10. $\dfrac{1{\cdot}0027\times1{\cdot}0028}{1{\cdot}0006\times\sqrt{1{\cdot}0008}}$
11. $\dfrac{1}{\sqrt{1{\cdot}00072}}$
12. $\sqrt{1+\frac{1}{273}}$
13. $(1{\cdot}00024)^{\frac{1}{3}}$
14. $(0{\cdot}9985)^{4}$

উত্তর

1.	1·0029	2.	1·0005	3.	0·9887
4.	1·0033	5.	1·00028	6.	0·99963
7.	1·0014	8.	1·0031	9.	0 99984
10.	1·0045	11.	0·99964	12.	1·0018
13.	1·00008	14.	0·9940		

গাণিতিক প্রতীক চিহ্নাবলী

$=$ সমান

$\simeq$ প্রায় সমান (আসন্ন মান)

$\neq$ অসমান

$\equiv$ অভিন্ন

$>$ বৃহত্তর [যেমন : $x>y$ বলিতে বুঝায় যে, x রাশিটি y অপেক্ষা বৃহত্তর]

$\gg$ অতি বৃহত্তর

$<$ ক্ষুদ্রতর [যেমন : $x<y$ বলিতে বুঝায় যে, x-এর মান y-এর মান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর]

$\ll$ অতি ক্ষুদ্রতর

$\geqq$ বৃহত্তর বা সমান [যেমন : $A \geqq B$ বলিতে বুঝাইবে যে, A-এর মান B অপেক্ষা বেশি কিংবা সমান]

$\propto$ সমানুপাত বুঝাইবার চিহ্ন [যেমন : বয়েলের সূত্র, $P \propto \frac{1}{V}$]

Σ যোগ-সূচক চিহ্ন (সিগ্‌মা)

$\pm$ যোগ বা বিয়োগ [যেমন : $\sqrt{9} = \pm 3$]

গ্রীক বর্ণমালা

বর্ণমালা		উচ্চারণ	বর্ণমালা		উচ্চারণ
A	α	আল্‌ফা (alpha)	N	ν	নিউ (nu)
B	β	বিটা (beta)	Ξ	ξ	জাই (xi)
Γ	γ	গামা (gamma)	O	o	ওমিক্রন (omicron)
Δ	δ	ডেল্‌টা (delta)	Π	π	পাই (pi)
E	ϵ	এপ্‌সিলন (epsilon)	P	ρ	রো (rho)
Z	ζ	জিটা (zeta)	Σ	σ	সিগ্‌মা (sigma)
H	η	ইটা (eta)	T	τ	টাও (tau)
Θ	θ	থিটা (theta)	Υ	υ	আপ্‌সিলন (upsilon)
I	ι	আইয়টা (iota)	Φ	ϕ	ফাই (phi)
K	k	কাপ্পা (kappa)	X	χ	কাই (chi)
Λ	λ	ল্যাম্‌ডা (lamda)	Ψ	Ψ	সাই (psi)
M	μ	মিউ (mu)	Ω	ω	ওমেগা (omega)

কয়েকটি প্রয়োজনীয় গাণিতিক ধ্রুবকের তালিকা

$\pi=3{\cdot}14$ $\pi^2=9{\cdot}87$ $e=2{\cdot}718$ $e^{-1}=0{\cdot}368$ $\sqrt{2}=1{\cdot}414$

$\sqrt{3}=1{\cdot}732$ $\sqrt{5}=2{\cdot}236$

$$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\tfrac{1}{2}=0{\cdot}500$$

$$\cos 30^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{\cdot}866$$

$$\tan 30^\circ=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=0{\cdot}577$$

$$\tan 60^\circ=\cot 30^\circ=\sqrt{3}=1{\cdot}732$$

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{\cdot}707$$

$$\tan 45° = \cot 45° = 1{\cdot}00$$

কয়েকটি ভৌত ধ্রুবকের মান

শূন্যস্থানে আলোর গতিবেগ, $c = 3{\cdot}00 \times 10^{8}$ m/s
অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা, $N_o = 6{\cdot}02 \times 10^{23}$/mole
প্লাঙ্ক ধ্রুবক, $h = 6{\cdot}63 \times 10^{-34}$ J.s
গ্যাস ধ্রুবক, R=8·31 J/K mole
মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}$ $N.m^2/kg^2$
স্থির ইলেকট্রনের ভর, $m_e = 9{\cdot}11 \times 10^{-31}$ kg
স্থির প্রোটনের ভর, $m_p = 1{\cdot}67 \times 10^{-27}$ kg
ইলেকট্রনের তড়িদাধান, $e = 1{\cdot}60 \times 10^{-19}$ C
তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক $= 4{\cdot}185 \times 10^{7}$ erg/cal
পৃথিবীর ভর $= 5{\cdot}983 \times 10^{24}$ kg
পৃথিবীর মেরু-ব্যাসার্ধ (polar radius) $= 6{\cdot}357 \times 10^{6}$ m
পৃথিবীর নিরক্ষীয় ব্যাসার্ধ (equatorial radius) $= 6{\cdot}378 \times 10^{6}$ m

বলবিজ্ঞান

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ
গতীয় সমীকরণ

2.1 গতীয় সমীকরণ : কোন বস্তু যখন সম-ত্বরণ লইয়া বলরেখা বরাবর চলিতে থাকে তখন উহার গতি কয়েকটি সমীকরণ মানিয়া চলে। সমীকরণগুলি নিম্নরূপ :

$$v=u+ft \quad \cdots \quad (2.1)$$
$$s=ut+\tfrac{1}{2}ft^2 \quad \cdots \quad (2.2)$$
$$v^2=u^2+2fs \quad \cdots \quad (2.3)$$

এখানে, u=বস্তুর প্রাথমিক গতিবেগ, v=বস্তুর অন্তিম গতিবেগ, f=বস্তুর ত্বরণ, t=কোন নির্দিষ্ট সময় এবং s=t সেকেণ্ড সময়ে বস্তু-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব।

2.2 t-তম সেকেণ্ডে বস্তু-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব : কোন বস্তুর প্রাথমিক গতিবেগ u এবং ত্বরণ f হইলে যাত্রা শুরু করিবার পর t-তম সেকেণ্ডে বস্তু-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব s_t-এর মান হইল :

$$s_t=u+\tfrac{1}{2}f(2t-1) \quad \cdots \quad (2.4)$$

● **বিশেষ দ্রষ্টব্য :** বস্তুর ত্বরণ ঋণাত্মক হইলে অর্থাৎ সময়ের সহিত বস্তুর গতিবেগ কমিতে থাকিলে বলা হয় যে, বস্তুর 'মন্দন' (retardation) হইতেছে। কোন বস্তু u প্রাথমিক গতিবেগ লইয়া যাত্রা শুরু করিয়া f মন্দন লইয়া চলিতে থাকিলে ঐ বস্তুর গতি নিম্নের সমীকরণগুলি মানিয়া চলিবে।

$$v=u-ft \quad \cdots \quad (2.5)$$
$$s=ut-\tfrac{1}{2}ft^2 \quad \cdots \quad (2.6)$$
$$v^2=u^2-2fs \quad \cdots \quad (2.7)$$

লক্ষণীয় যে, সমীকরণ (2.1), (2.2) এবং (2.3)-তে f-এর পরিবর্তে $-f$ বসাইয়া যথাক্রমে সমীকরণ (2.5), (2.6) এবং (2.7) পাওয়া যায়।

অনুরূপভাবে, f মন্দন লইয়া চলমান বস্তু যাত্রা শুরু করিবার পর t-তম সেকেণ্ডে যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহার মান,

$$s_t=u-\tfrac{1}{2}f(2t-1) \quad \cdots \quad (2.8)$$

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 2.1 একটি বস্তুকণা স্থির অবস্থা হইতে সম-ত্বরণে যাত্রা শুরু করিয়া 2 মিনিটে ঘণ্টায় 36 কিলোমিটার গতিবেগ লাভ করিল। সি. জি. এস. পদ্ধতিতে বস্তুটির ত্বরণ কত ?

[A particle, starting from rest, acquires a velocity of 36 km/h

in 2 minutes. Find the acceleration of the particle in C. G. S. system.]

সমাধান : বস্তুকণার প্রাথমিক গতিবেগ, $u=0$ km/s

অন্তিম গতিবেগ, $v=36$ km/h

$$=\frac{36\times10^3\times10^2}{60\times60}=10^3 \text{ cm/s}$$

এখানে, সময় $t=2$ মিনিট$=2\times60$ s

এখন, $v=u+ft$

$\therefore\quad 10^3=0+f\times2\times60$

বা, $f=\dfrac{10^3}{2\times60}=8{\cdot}33$ cm/s^2

উদাহরণ 2.2 ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে ধাবমান একটি ট্রেন 15 s সময়ে স্থির অবস্থায় আসিল। ট্রেনের মন্দন সুষম ধরিয়া ইহার মান নির্ণয় কর।

[A train moving with a velocity of 60 miles an hour is brought to rest in 15 s. Find its retardation, assuming it to be uniform.]

সমাধান : ট্রেনের প্রারম্ভিক বেগ, $u=60$ মাইল/ঘণ্টা

বা, $u=\frac{60\times1760\times3}{60\times60}$ ft/s$=88$ ft/s

15 s পর ট্রেনটির অন্তিম বেগ$=0$ ft/s

কাজেই, 15 s সময়ে ট্রেনের গতিবেগের হ্রাস$=(88-0)=88$ ft/s

সুতরাং ট্রেনটির মন্দন$=\dfrac{\text{গতিবেগের হ্রাস}}{\text{সময়}}=\frac{88}{15}=5{\cdot}87$ ft/s^2

উদাহরণ 2.3 কোন বস্তুর প্রাথমিক বেগ এবং ত্বরণ যথাক্রমে 100 cm/s এবং 5 cm/s^2 হইলে (i) 1 মিনিট পর বস্তুটির গতিবেগ কত হইবে এবং (ii) বস্তুটি এক মিনিটে কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে ?

[If the initial velocity and acceleration of a body be 100 cm/s and 5 cm/s^2 respectively, what would be (i) the velocity of the body after 1 minute and (ii) the distance traversed in 1 minute ?]

সমাধান : এখানে, প্রাথমিক গতিবেগ, $u=100$ cm/s

ত্বরণ $f=5$ cm/s^2 এবং $t=1$ মিনিট$=60$ s

(i) কাজেই, 1 মিনিট পর বস্তুর গতিবেগ,

$v=u+ft=100+5\times60=400$ cm/s

(ii) 1 মিনিট সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$

$=100\times60+\frac{1}{2}\times5\times(60)^2=15{,}000$ cm$=150$ m

উদাহরণ 2.4 ঘণ্টায় 72 কিলোমিটার বেগে ধাবমান একটি ট্রেন ব্রেক কষিয়া 2 m/s^2 মন্দন লাভ করিল। (i) ব্রেক কষিবার 5 s পর ট্রেনের গতিবেগ কত হইবে ? (ii) কতক্ষণ পর ট্রেনটি থামিয়া যাইবে ?

[A train moving with a speed of 72 km/h applies brakes and acquires a retardation of 2 m/s². (i) What would be its speed after 5s ? (ii) When would the train come to rest ?]

সমাধান : ট্রেনের প্রাথমিক গতিবেগ, $u=\frac{72\times10^3\times10^2}{60\times60}$ cm/s

$=2\times10^3$ cm/s

ট্রেনের মন্দন, $f=2$ m/s² $=2\times10^2$ cm/s²

(i) কাজেই, ব্রেক কষিবার 5 s পর ট্রেনের গতিবেগ

$v=u-ft=2\times10^3-2\times10^2\times5=10^3$ cm/s

(ii) মনে করি, ব্রেক কষিবার τ s পর ট্রেনটি স্থির অবস্থায় আসে।

$\therefore \quad 0=u-f.\tau$

বা, $\tau=\frac{u}{f}=\frac{2\times10^3}{2\times10^2}=10$ s

উদাহরণ 2.5 একটি বস্তুকণা 50 cm/s গতিবেগ লইয়া যাত্রা শুরু করিয়া 20 s সময়ে 90 m দূরত্ব অতিক্রম করিল। বস্তুটির ত্বরণ নির্ণয় কর।

[A particle starting with an initial velocity of 50 cm/s describes a distance of 90 m in 20 s. Find the acceleration of the particle.]

সমাধান : আমরা জানি, f ত্বরণ লইয়া ধাবমান কোন বস্তুকণা t সেকেণ্ডে যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহার মান, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$

এখানে, $s=90$ m $=9000$ cm, $u=50$ cm/s এবং $t=20$ s

$\therefore \quad 9000=50\times20+\frac{1}{2}\times f\times(20)^2$ বা, $f=40$ cm/s²

উদাহরণ 2.6 স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া একটি বস্তু 2 cm/s² সমত্বরণ লইয়া চলিতে লাগিল। বস্তুটি উহার গতিপথের পঞ্চম সেন্টিমিটার কত সময়ে অতিক্রম করিবে নির্ণয় কর।

[A body starts from rest and moves with a uniform acceleration of 2 cm/s². Find the time taken by the body to traverse the fifth centimeter of its journey.]

সমাধান : মনে করি, গতিপথের প্রথম 5 cm দূরত্ব অতিক্রম করিতে বস্তুটির t_1s সময় লাগে এবং প্রথম 5 cm দূরত্ব অতিক্রম করিতে t_2s সময় লাগে। কাজেই লেখা যায়,

$4=\frac{1}{2}\times2\times t_1^2$ বা, $t_1=\sqrt{4}$ s ... (i)

আবার, $5=\frac{1}{2}\times2\times t_2^2$ বা, $t_2=\sqrt{5}$ s ... (ii)

পঞ্চম সেন্টিমিটার অতিক্রম করিতে বস্তুটি যে-সময় নেয় তাহার মান

$=(t_2-t_1)=\sqrt{5}-\sqrt{4}=0{\cdot}236$ s

উদাহরণ 2.7 একটি গাড়ির ব্রেক কষিলে উহাতে 22 ft/s² মন্দন সৃষ্টি হয়। গাড়িটি প্রতি ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে চালাইবার সময় চালক সম্মুখে বিপদ লক্ষ্য করিয়া

থামিবার মনস্থ করিল। গাড়ি থামাইবার সিদ্ধান্ত লওয়া এবং ব্রেক কষিবার মধ্যে সময়ের ব্যবধান $\frac{1}{4}$ s। চালক থামিবার সিদ্ধান্ত লইবার পর হইতে স্থির অবস্থায় আসা পর্যন্ত গাড়িটি কী দূরত্ব অতিক্রম করিল ?

[An automobile decelerates at 22 ft/s^2 by the application of the brakes. The driver driving the car at 60 miles per hour sees danger ahead of him and decides to stop the car. The time interval between the moment he takes the decision and the moment he actually applies the brakes is $\frac{1}{4}$ s. How far does the train move after the driver's decision to stop it ?]

সমাধান : ট্রেনের প্রাথমিক গতিবেগ, $u=\frac{60\times1760\times3}{60\times60}=88$ ft/s

গাড়ি থামাইবার সিদ্ধান্ত লইবার $\frac{1}{4}$ s সময় পর চালক ব্রেক কষিল। এই $\frac{1}{4}$ s সময়ে গাড়ি 88 ft/s সমবেগে চলে। কাজেই, এই সময়ের মধ্যে গাড়ি-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s_1=88\times\frac{1}{4}=22$ ft

মনে করি, ব্রেক কষিবার পর হইতে থামিবার পূর্ব পর্যন্ত গাড়িটি s_2 ft দূরত্ব অতিক্রম করে।

কাজেই, লেখা যায়, $0=u^2-2fs_2$

এখানে, $f=$ গাড়ির মন্দন $=22$ ft/s^2

$$\therefore \quad s_2=\frac{u^2}{2f}=\frac{88\times88}{2\times22}=176 \text{ ft}$$

কাজেই, গাড়ি থামাইবার সিদ্ধান্ত লইবার পর হইতে গাড়ি থামা পর্যন্ত অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব, $s=s_1+s_2=22+176=198$ ft

উদাহরণ 2.8 একটি উড়োজাহাজ প্রতি ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে ভূমি স্পর্শ করে এবং 352 ft দূরত্ব অতিক্রম করিয়া স্থির অবস্থায় আসে। ইহার মন্দন কত ? স্থির হইতে উড়োজাহাজটির কত সময় লাগে ?

[An aeroplane touches the ground at a speed of 60 miles per hour and comes to rest after traversing a distance of 352 ft. What is its retardation ? Find also the time required by the aeroplane to come to a stop.]

সমাধান : উড়োজাহাজের প্রাথমিক বেগ, $u=\frac{60\times1760\times3}{60\times60}=88$ ft/s

মনে করি, ইহার মন্দন $=f$ ft/s^2

কাজেই, $0=u^2-2fs$

এখানে, $s=$ অতিক্রান্ত দূরত্ব $=352$ ft

$$\therefore \quad f=\frac{u^2}{2s}=\frac{88^2}{2\times352}=11 \text{ ft/s}^2$$

ধরি, স্থির অবস্থার আসিতে সময় লাগে t s ; সুতরাং লেখা যায়,

$$0 = u - ft$$

$$\therefore \quad t = \frac{u}{f} = \frac{88}{11} = 8 \text{ s}$$

উদাহরণ 2.9 10 সেকেণ্ড সময়ে একটি গাড়ির বেগ ঘণ্টায় 10 মাইল হইতে ঘণ্টায় 40 মাইল হইল। ট্রেনটির ত্বরণ নির্ণয় কর। যদি উক্ত অন্তিম গতিবেগ হইতে 4 s সময়ে ট্রেনটিকে স্থির অবস্থায় আনা হয় তাহা হইলে উহার মন্দন কত ?

[A car speeds up from 10 miles per hour to 40 miles per hour in 10 seconds. Find its acceleration in ft/s^2. If it is brought to rest from the latter speed in 4 seconds, what is its retardation ?]

সমাধান : 10 সেকেণ্ড সময়ে ট্রেনের গতিবেগের বৃদ্ধি=(40−10) মাইল/ঘণ্টা $= \frac{30 \times 1760 \times 3}{60 \times 60} = 44$ ft/s

কাজেই, ট্রেনের ত্বরণ $= \frac{\text{গতিবেগের বৃদ্ধি}}{\text{সময়}} = \frac{44}{10} = 4{\cdot}4$ ft/s^2

ট্রেনের অন্তিম গতিবেগ, $u_1 = \frac{40 \times 1760 \times 3}{60 \times 60} = \frac{176}{3}$ ft/s

ধরি, 4 s সময়ে ট্রেনটিকে স্থির অবস্থায় আসিতে হইলে ট্রেনের মন্দন=f ft/s^2

কাজেই, $0 = u_1 - f \times 4$ (2.5 নং সমীকরণ হইতে)

$$\text{বা,} \quad f = \frac{u_1}{4} = \frac{176}{3 \times 4} = 14{\cdot}67 \text{ ft/s}^2$$

উদাহরণ 2.10 যখন একটি গাড়ি ঘণ্টায় 45 মাইল বেগে চলিতেছিল তখন ব্রেক কষা হইল এবং গাড়িটি সমমন্দন লইয়া 5 s সময়ে ঘণ্টায় 15 মাইল গতিবেগ লাভ করিল। (i) গাড়িটির ত্বরণ এবং (ii) পঞ্চম সেকেণ্ডে উহা যে-দূরত্ব অতিক্রম করিল তাহা নির্ণয় কর।

[When a car is travelling at 45 miles/hour, the brakes are applied and it slows down uniformly to 15 miles/hour in 5 s. Derermine (a) the acceleration (b) the distance covered during the fifth second.]

সমাধান : (a) গাড়িটির প্রারম্ভিক গতিবেগ, $u = 45$ miles/hour

$$= \frac{45 \times 1760 \times 3}{60 \times 60} \text{ ft/s} = 66 \text{ ft/s}$$

5 s পর গাড়িটির গতিবেগ, $v = 15$ miles/hour

$$= \frac{15 \times 1760 \times 3}{60 \times 60} = \text{ft/s} = 22 \text{ ft/s}$$

সংজ্ঞানুসারে, গাড়িটির ত্বরণ, $f = \frac{v-u}{t} = \frac{22-66}{5} = -8{\cdot}8$ ft/s

(b) আমরা জানি যে, t-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s_t = u + \frac{1}{2}f\,(2t-1)$

কাজেই, পঞ্চম সেকেণ্ডে গাড়ি-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$= 66 + \tfrac{1}{2} \times (-8{\cdot}8) \times [2 \times 5 - 1] = 66 - 39{\cdot}6 = 26{\cdot}4 \text{ ft}$$

উদাহরণ 2.11 একটি বিন্দুকণা নির্দিষ্ট প্রারম্ভিক গতিবেগ লইয়া যাত্রা

শুরু করিয়া সমত্বরণে 3 সেকেণ্ড সময়ে 81 ft দূরত্ব অতিক্রম করিল। ইহার পর কণাটির ত্বরণ বন্ধ হইয়া গেল। পরবর্তী 3 সেকেণ্ডে কণাটি 72 ft অগ্রসর হইল। কণাটির প্রারম্ভিক গতিবেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর।

[A particle, starting with a definite velocity and moving with uniform acceleration, covers a distance of 81 ft in 3 s. Then the acceleration of the particle ceases. During the next 3 s the particle traverses a distance of 72 ft. Find the initial velocity and acceleration of the train.]

সমাধান : মনে করি, কণাটির প্রারম্ভিক বেগ $=u$ ft/s এবং ত্বরণ $=f$ ft/s^2

কাজেই, প্রশ্নের শর্তানুসারে, $81=u\times 3+\frac{1}{2}f\times(3)^2$ ... (i)

মনে করি, 3 সেকেণ্ড সম-ত্বরণে চলিয়া কণাটির অন্তিম গতিবেগ হইল v ft/s। শর্তানুসারে, এই গতিবেগে 3 সেকেণ্ডে বস্তুকণা 72 ft দূরত্ব অতিক্রম করিল।

কাজেই, $72=v\times 3$ বা, $v=\frac{72}{3}=24$ ft/s

u ft/s হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 3 s সময়ে বস্তুকণা v ft/s গতিবেগ লাভ করিয়াছে বলিয়া লেখা যায়, $v=u+f\times 3$ বা, $24=u+3f$ ... (ii)

সমীকরণ (i) হইতে পাই, $3u+\frac{9}{2}f=81$ ... (iii)

আবার, সমীকরণ (ii) হইতে পাই, $3u+9f=72$ ... (iv)

সমীকরণ (iii) ও (iv) সমাধান করিয়া পাই, $u=30$ ft/s এবং $f=-2$ ft/s^2

উদাহরণ 2.12 150 গজ দূরত্ব অতিক্রম করিবার অবকাশে একটি ট্রেনের গতিবেগ কমিয়া ঘণ্টায় 40 মাইল হইতে ঘণ্টায় 10 মাইল হইল। ট্রেনটি স্থির হইবার পূর্ব পর্যন্ত আর কতটা দূরত্ব অতিক্রম করিবে?

[The speed of a train moving with uniform retardation is reduced from 40 miles an hour to 10 miles an hour while it travels a distance of 150 yards. Find how much further it will travel before coming to rest.]

সমাধান : ট্রেনের প্রাথমিক গতিবেগ, $u=40$ মাইল/ঘণ্টা

$=\frac{40\times 1760\times 3}{60\times 60}=\frac{176}{3}$ ft/s

ট্রেনের অন্তিম গতিবেগ, $v=10$ মাইল/ঘণ্টা $=\frac{44}{3}$ ft/s

অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s=150$ yds $=450$ ft

ধরি, এই দূরত্ব অতিক্রম করিবার অবকাশে ট্রেনের মন্দন $=f$

কাজেই লেখা যায়, $v^2=u^2-2fs$ (2.7 নং সমীকরণ হইতে)

$\therefore\ (\frac{44}{3})^2=(\frac{176}{3})^2-2\times f\times 450$ বা, $f=\frac{22\times 132}{9\times 90}$ ft/s^2

মনে করি, থামিবার পূর্বে ট্রেনটি আরও s_1 ft দূরত্ব অতিক্রম করে। সুতরাং লেখা যায়, $0=v^2-2fs_1$

$$\text{বা, } s_1=\frac{v^2}{2f}=\frac{(44)^2\times 9\times 90}{(3)^2\times 2\times 22\times 132}=30\text{ ft}=10\text{ yds}$$

উদাহরণ 2.13 সম-ত্বরণে ধাবমান একটি বস্তুকণা উহার যাত্রার পঞ্চম সেকেণ্ডে 25 ft এবং সপ্তম সেকেণ্ডে 33 ft দূরত্ব অতিক্রম করিল। কণাটির প্রাথমিক বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর।

[A particle moving with uniform acceleration traverses 25 ft in the fifth second and 33 ft in the seventh second of its journey. Find the initial velocity and acceleration of the particle.]

সমাধান : মনে করি, বস্তুকণার প্রাথমিক বেগ$=u$ ft/s এবং ত্বরণ$=f$ ft/s^2

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $25=u+\frac{f}{2}(2\times5-1)$ ... (i)

$$33=u+\frac{f}{2}(2\times7-1) \quad \text{... (ii)}$$

$$25=u+\frac{9f}{2} \quad \text{... (iii)}$$

এবং $33=u+\frac{13f}{2}$ ... (iv)

(iii) এবং (iv) সমাধান করিয়া পাই, $f=4$ ft/s^2 এবং $u=7$ ft/s

উদাহরণ 2.14 একটি সুষম ত্বরণশীল বস্তু পঞ্চম সেকেণ্ডে 65 ft এবং নবম সেকেণ্ডে 105 ft পথ অতিক্রম করে। 20 সেকেণ্ডে বস্তুটি কতদূর যাইবে তাহা নির্ণয় কর।

[A body moving with uniform acceleration cover 65 ft in 5th second and 105 ft in the 9th second. Find the distance it will cover in 20 s.] [H. S., 1983]

সমাধান : মনে করি, বস্তুটির প্রাথমিক বেগ$=u$ ft/s এবং ত্বরণ$=f$ ft/s^2

কাজেই প্রশ্নানুসারে, $65=u+\frac{1}{2}f(2\times5-1)$

বা, $65=u+\frac{9}{2}f$ ... (i)

এবং $105=u+\frac{1}{2}f(2\times9-1)$

বা, $105=u+\frac{17}{2}f$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) সমাধান করিয়া পাই,

$u=20$ ft/s এবং $f=10$ ft/s^2

সুতরাং, 20 s সময়ে বস্তু-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব

$=ut+\frac{1}{2}ft^2$

$=20\times20+\frac{1}{2}\times10\times20^2$ ft

$=2400$ ft

উদাহরণ 2.15 একটি বস্তু প্রথম দুই সেকেণ্ডে 200 cm এবং পরবর্তী চার সেকেণ্ডে 220 cm দূরত্ব যায়। সপ্তম সেকেণ্ডের শেষে বস্তুটির গতিবেগ কত হইবে ?

[A body travels 200 cm in the first two seconds and 220 cm in the next four seconds. What will be the velocity of the body at the end of seventh second from the start ?]

(I. I. T. Adm. Test, 1964)

সমাধান : বস্তুটির প্রাথমিক বেগ $= u$ cm/s

এবং ইহার ত্বরণ $= f$ cm/s^2

প্রথম দুই সেকেণ্ডে বস্তুটি 200 cm পথ অতিক্রম করে বলিয়া $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সমীকরণ হইতে পাই,

$$200 = u \times 2 + \tfrac{1}{2} f \times 2^2$$

বা, $100 = u + f$ ... (i)

পরবর্তী 4 s সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব 220 cm বলিয়া লেখা যায়,

$220 = (u \times 6 + \frac{1}{2} \times f \times 6^2) - (u \times 2 + \frac{1}{2} \times f \times 2^2)$

বা, $220 = u \times 4 + \frac{1}{2} f \times (6^2 - 2^2)$

বা, $110 = 2u + 8f$ ... (ii)

(i) এবং (ii) হইতে পাই,

$u = 115$ cm/s এবং $f = -15$ cm/s^2

কাজেই, সপ্তম সেকেণ্ডের পর বস্তুর বেগ, $v = u + ft$

$= 115 - 15 \times 7 = 10$ cm/s

উদাহরণ 2.16 150 m/s গতিবেগে ধাবমান একটি বুলেট একটি কাঠের ব্লকে 2 cm প্রবিষ্ট হইতে পারে। বুলেটের গতিবেগ 450 m/s হইলে উহা ঐ কাঠের ব্লকে কতটা প্রবিষ্ট হইতে পারিবে ?

[If a bullet moving with a velocity of 150 m/s can penetrate 2 cm into a block of wood, through what distance would it penetrate when moving at a rate of 450 m/s ?]

সমাধান : মনে করি কাঠের ব্লকের মধ্য দিয়া যাইবার সময় বুলেটের মন্দন $= f$

আমরা জানি, $v^2 = u^2 - 2fs$

এখানে, $v = 0$, $u = 150$ m/s $= 15000$ cm/s এবং $s = 2$ cm

কাজেই, $0 = (15000)^2 - 2 \times f \times 2$

$\therefore \quad f = \frac{1}{4} \times (15000)^2$

ধরি, বুলেটের গতিবেগ 450 m/s বা, 45000 cm/s হইলে উহা কাঠের ব্লকের s_1 গভীরতায় প্রবিষ্ট হয়। সুতরাং লেখা যায়, $0 = (45000)^2 - 2fs_1$

$$\text{বা, } s_1 = \frac{(45000)^2}{2f} = \frac{(45000)^2 \times 4}{2 \times (15000)^2} = 18 \text{ cm}$$

উদাহরণ 2.17 একটি বুলেট 1100 ft/s গতিবেগে একটি পাতলা পাতের মধ্য দিয়া প্রবেশ করিয়া 1000 ft/s গতিবেগ লইয়া বাহির হইয়া আসে। বুলেটটি যদি আরও একটি অনুরূপ পাতের মধ্য দিয়া যায় তাহা হইলে উহা কী গতিবেগ লইয়া বাহির হইয়া আসিবে ?

[A bullet moving with a velocity of 1100 ft/s penetrates a thin plate and emerges out of it with a velocity of 1000 ft/s. What will be the velocity of the bullet if it passes through another plate of similar kind ?]

সমাধান : মনে করি, পাতদ্বয়ের বেধ $=x$ এবং উহাদের মধ্য দিয়া যাইবার সময় বুলেটের মন্দন $=f$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, প্রথম পাতে প্রবেশ করিবার পূর্বে বুলেটের গতিবেগ, $u=1100$ ft/s এবং পাতটি ভেদ করিয়া বাহির হইবার পর ইহার গতিবেগ, $v=1000$ ft/s।

কাজেই লেখা যায়, $v^2=u^2-2fx$ বা, $1000^2=1100^2-2fx$

বা, $2fx=1100^2-1000^2=21\times10^4$ $(\text{ft/s})^2$

দ্বিতীয় পাতটিতে প্রবেশ করিবার পূর্বে বুলেটের গতিবেগ 1000 ft/s

মনে করি, এই পাতটি ভেদ করিবার পর বুলেটটির গতিবেগ $=v'$

$$\therefore \quad v'^2=1000^2-2fx$$

$$=10^6-21\times10^4=79\times10^4\left(\frac{\text{ft}}{\text{s}}\right)^2$$

$$\text{বা, } v=\sqrt{79}\times10^2=888{\cdot}82 \text{ ft/s}$$

উদাহরণ 2.18 একটি গাড়ি স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 10 সেকেণ্ড ধরিয়া 2 m/s^2 ত্বরণ লইয়া চলিল। ইহাতে গাড়িতে যে-গতিবেগ সৃষ্টি হইল গাড়িটি 1 মিনিট সেই গতিবেগ বজায় রাখিল। ইহার পর ব্রেক কষিয়া গাড়িটিতে সম-মন্দন সৃষ্টি করিয়া 5 সেকেণ্ডে গাড়িটিকে থামান হইল। গাড়িটির সর্বোচ্চ গতিবেগ এবং গাড়িটি মোট যে-দূরত্ব অতিক্রম করিল তাহা নির্ণয় কর।

[A car starting from rest moves for 10 seconds with an acceleration of 2 m/s^2. The car then moves for the next 1 minute with the velocity acquired by it. The train is then brought to rest in 5 seconds with uniform retardation by the application of brakes. Find the maximum velocity of the train and the total distance travelled by it.]

সমাধান : গাড়িটি স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়াছে বলিয়া লেখা যায় যে, $u=0$, $f=2$ m/s^2 এবং $t=10$ s

কাজেই, 10 সেকেণ্ডে ট্রেন যে-গতিবেগ লাভ করে তাহার মান, $v=u+f\times t$

$=0+2\times10=20$ m/s ; ইহাই ট্রেনের সর্বোচ্চ গতিবেগ।

প্রথম 10 s সময়ে ট্রেন-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$s_1=\tfrac{1}{2}.f.t^2=\tfrac{1}{2}\times2\times10^2=100 \text{ m}$$

পরবর্তী 1 মিনিট ট্রেনটি উহার গতিবেগ বজায় রাখিয়াছে। অর্থাৎ, এই সময় ত্বরণের মান শূন্য। কাজেই, এই সময়ের মধ্যে ট্রেন-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$s_2=v\times t=20\times60=1200 \text{ m}$$

ব্রেক কষিবার পূর্বে ট্রেনের গতিবেগ 20 m/s এবং ব্রেক কষিবার 5 s পর ইহার গতিবেগ শূন্য। গাড়ির মন্দন f_1 হইলে লেখা যায়,

$$0=v-f_1\times 5 \quad \text{বা, } 0=20-5f_1 \quad \text{বা, } f_1=4 \text{ m/s}^2$$

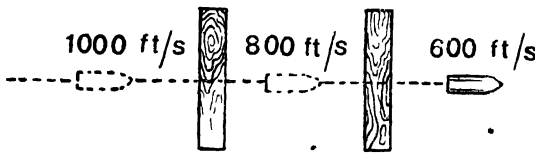
ব্রেক কষিবার পর হইতে থামিবার পূর্ব পর্যন্ত ট্রেন-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব s_3 হইলে লেখা যায়, $0=v^2-2f_1s_3$ বা, $s_3=\dfrac{v^2}{2f_1}=\dfrac{20^2}{2\times 4}=50$ m

কাজেই, ট্রেনটি মোট যে-দূরত্ব অতিক্রম করিল তাহার মান, $s=s_1+s_2+s_3$
$=100+1200+50=1350$ m $=1\cdot 35$ km

উদাহরণ 2.19 1000 ft/s গতিবেগসম্পন্ন একটি বুলেট পর পর দুইটি অসমান বেধবিশিষ্ট কাঠের তক্তার মধ্য দিয়া গেল এবং প্রতিটির মধ্য দিয়া যাইবার সময় 200 ft/s পরিমাণ গতিবেগ হারাইল। তক্তা দুইটির বেধের অনুপাত কত?

[A bullet moving with a velocity of 1000 ft/s passes successively through two planks of wood of unequal thickness and loses a velocity of 200 ft/s in penetrating each plank. What is the ratio of the thickness of the planks ?]

সমাধান: মনে করি, কাঠের তক্তার মধ্য দিয়া যাইবার সময় বুলেটের মন্দন $=f$ ft/s²

প্রথম তক্তার মধ্য দিয়া যাইবার পর বুলেটের গতিবেগ=1000−200) = 800 ft/s
কাজেই, $800^2=1000^2-2fs_1$ ... (i)

s_1 = প্রথম তক্তার বেধ। দ্বিতীয় তক্তার মধ্য দিয়া যাইবার পর বুলেটটির গতিবেগ =(800 − 200) =600 ft/s

চিত্র 2.1

সুতরাং, $600^2=800^2-2fs$ ... (ii)

এখানে, s_2 = দ্বিতীয় তক্তার বেধ

সমীকরণ (i) হইতে পাই, $s_1=\dfrac{1000^2-800^2}{2f}$ ... (iii)

এবং সমীকরণ (ii) হইতে পাই, $s_2=\dfrac{800^2-600^2}{2f}$ ... (iv)

$$\therefore \frac{s_1}{s_2}=\frac{1000^2-800^2}{800^2-600^2}=\frac{1800\times 200}{1400\times 200}=\frac{9}{7}$$

উদাহরণ 2.20 A বিন্দু হইতে AB সরলরেখা বরাবর একই সময়ে দুইটি বস্তুকণা চলিতে আরম্ভ করিল। প্রথমটি 40 ft/s সমবেগে এবং দ্বিতীয়টি 16 ft/s প্রারম্ভিক বেগে এবং 6 ft/s² সমত্বরণে চলিতে আরম্ভ করিল। উহারা কতক্ষণ পর পুনরায় মিলিত হইবে?

[Two particles start at the same instant from a point A and move in the same direction along a straight line AB. The first has a uniform velocity of 40 ft/s, while the second starts with an initial velocity of 16 ft/s and has a uniform acceleration of 6 ft/s^2. Find the time that elapses before the two particles meet again.] (C. U., I. Sc., 1955)

সমাধান : মনে করি, t সেকেণ্ড পর বস্তুকণাদ্বয় পুনরায় পরস্পর মিলিত হয়।

প্রথম বস্তুটি t সেকেণ্ডে যায় $s=v\times t=40\,t$ ft

এবং দ্বিতীয় বস্তুটি t সেকেণ্ডে যায় $s'=ut+\frac{1}{2}ft^2$

বা, $s'=16t+\frac{1}{2}\times 6t^2=16t+3t^2$ ft

শর্তানুসারে, $s=s'$ বা, $40t=16t+3t^2$ বা, $3t^2-24t=0$

বা, $t^2-8t=0$ বা, $t\,(t-8)=0$

অর্থাৎ $t=0$ বা 8। স্পষ্টতই, t-এর গ্রহণযোগ্য মান 8। সুতরাং, বস্তুদ্বয় A বিন্দু হইতে যাত্রা শুরু করিবার 8 s পর পুনরায় পরস্পরের সহিত মিলিত হয়।

উদাহরণ 2.21 প্রতি ঘণ্টায় 60 মাইল গতিবেগে চলমান একটি গাড়ির ব্রেক কষা হইল এবং উহা 2·2 ft/s^2 মন্দন লাভ করিল। থামিবার পূর্বে গাড়িটি কতটা দূরত্ব অতিক্রম করিবে? এই দূরত্বের এক-চতুর্থাংশের মধ্যে থামাইতে হইলে গাড়িটিকে কী মন্দন দিতে হইবে?

[A car, moving with a velocity of 60 miles per hour, acquired a constant retardation of 2·2 ft/s^2 when brake was applied. What is the distance covered by the car before it comes to rest? If the car is to be stopped within one fourth of the above distance, what retardation should be imparted to the car?]

সমাধান : প্রাথমিক গতিবেগ u, অন্তিম গতিবেগ v এবং মন্দন f হইলে অতিক্রান্ত দূরত্ব s-এর মান নিম্নের সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়,

$$v^2=u^2-2fs \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

এখানে, $u=60$ মাইল/ঘণ্টা$=88$ ft/s, $v=0$ ft/s এবং $f=2·2$ ft/s^2

সমীকরণ (i) হইতে পাই, $0=88^2-2\times 2·2\times s$

$$\text{বা,}\quad s=\frac{88\times 88}{2\times 2·2}=1760\text{ ft}$$

এই দূরত্বের এক-চতুর্থাংশের মান, $s'=\frac{s}{4}=\frac{1760}{4}=440$ ft

মনে করি, গাড়িটিকে এই দূরত্বের মধ্যে থামাইতে হইলে উহার মন্দন f' হইবে।

কাজেই, $0=u^2-2f's'$ বা, $f'=\frac{u^2}{2s'}=\frac{88\times 88}{2\times 440}=8·8$ ft/s^2

উদাহরণ 2.22 20 ft/s বেগে ধাবমান এক ব্যক্তিকে তাহার 48 ft পিছন হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 4 ft/s^2 সমত্বরণে ধাবমান অন্য এক ব্যক্তি কতক্ষণে এবং কতদূরে গিয়া ধরিয়া ফেলিবে?

[In what time and at what distance will a man moving with an acceleration of 4 ft/s^2 meet another man who is moving at 20 ft/s and 48 ft ahead of the first man ?]

সমাধান : মনে করি, t সেকেণ্ড পর দ্বিতীয় ব্যক্তি প্রথম ব্যক্তিকে ধরিয়া ফেলিতে সমর্থ হয়। t সেকেণ্ডে প্রথম ব্যক্তি যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহার মান

$$s_1 = 20t \text{ ft} \qquad \cdots \qquad (i)$$

t সেকেণ্ডে দ্বিতীয় ব্যক্তি যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহার মান,

$$s_2 = \tfrac{1}{2}\text{ ft}^2 = \tfrac{1}{2} \times 4 \times t^2 = 2t^2 \text{ ft} \qquad \cdots \qquad (ii)$$

শর্তানুসারে, $s_2 = s_1 + 48$ বা, $2t^2 = 20t + 48$ বা, $t^2 - 10t - 24 = 0$

বা, $(t+2)(t-12) = 0$ বা, $t = 12, -2$

t-এর মান ঋণাত্মক হইতে পারে না। কাজেই, t-এর গ্রহণযোগ্য মান 12। অর্থাৎ যাত্রা শুরু করিবার 12 s পর দ্বিতীয় ব্যক্তি প্রথম ব্যক্তিকে ধরিয়া ফেলে।

এই সময়ে দ্বিতীয় ব্যক্তি যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহার মান,

$$s_2 = 2t^2 = 2 \times (12)^2 = 288 \text{ ft}$$

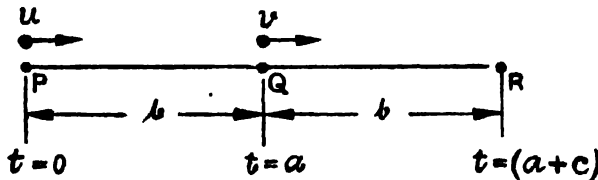
উদাহরণ 2.23 একটি বিন্দুকণা একটি সরলরেখায় অবস্থিত P, Q এবং R—এই তিনটি বিন্দুকে সম-ত্বরণ লইয়া অতিক্রম করে। যদি PQ = QR = b হয়, P হইতে Q বিন্দুতে আসিতে a সময় এবং Q হইতে R বিন্দুতে আসিতে কণাটির c সময় লাগে তাহা হইলে দেখাও যে, বিন্দুকণার ত্বরণ

$$f = \frac{2b(a-c)}{ac(a+c)}$$

[A particle moving with uniform acceleration along a straight line passes through points P, Q and R. If PQ = QR = b and the time taken by the particle in moving from P to Q is a and the time taken by it in moving from Q to R is c, prove that the acceleration of the particle is $f = 2b(a-c)/ac(a+c)$.]

সমাধান : P হইতে Q বিন্দুতে আসিতে (চিত্র 2.2) আলোচ্য বস্তুকণার a সময় লাগে বলিয়া লেখা যায়, PQ $= b = ua + \frac{1}{2}fa^2$

এখানে, f = বিন্দুকণার ত্বরণ, u = P বিন্দুতে ইহার গতিবেগ

$$\text{বা, } \frac{b}{a} = u + \frac{1}{2}fa \qquad \cdots \qquad (i)$$

চিত্র 2.2

Q বিন্দুতে বিন্দুকণার গতিবেগ, $v = u + fa$ $\cdots$ (ii)

Q হইতে R বিন্দুতে আসিতে বিন্দুকণার c সময় প্রয়োজন হয়।

$$\therefore \quad QR=b=vc+\frac{1}{2}fc^2 \text{ বা, } \frac{b}{c}=v+\frac{1}{2}fc \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

সমীকরণ (ii) এবং (iii) হইতে পাই, $\frac{b}{c}=u+fa+\frac{1}{2}fc$ ... (iv)

(iv) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া দেখা যায়, $\frac{b}{c}-\frac{b}{a}=\frac{1}{2}fa+\frac{1}{2}fc=\frac{1}{2}f(a+c)$

বা, $\frac{b(a-c)}{ac}=\frac{1}{2}f(a+c)$ বা, $f=\frac{2b(a-c)}{ac(a+c)}$

উদাহরণ 2.24 একটি বাস স্থিরাবস্থা হইতে 1 ft/s² ত্বরণ লইয়া চলিতে আরম্ভ করিল। পিছনে কিছুদূর হইতে এক ব্যক্তি বাসটি ধরিবার জন্য 9 ft/s গতিবেগে ছুটিতে আরম্ভ করিল। প্রমাণ কর যে, যদি ঐ ব্যক্তি বাসটি হইতে $40\frac{1}{2}$ ফুটের বেশি দূরে থাকে তবে সে বাসখানি ধরিতে পারে না।

[A bus starts from rest with an acceleration of 1 ft/s². A man at some distance behind starts running in order to catch the bus. Prove that he cannot catch the bus if his initial distance from the bus is greater than $40\frac{1}{2}$ ft.]

সমাধান ঃ মনে করি, বাসটি যখন চলিতে শুরু করে তখন ব্যক্তিটি বাসটির x ft পিছনে আছে এবং t s পর বাসটিকে ধরিয়া ফেলে।

এই t s সময়ে বাসটি যদি আরও s দূরত্ব যায় তাহা হইলে, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$

$$=0.t+\frac{1}{2}\times 1\times t^2 \quad \text{বা, } s=\frac{1}{2}t^2$$

বাসটি ধরিতে হইলে লোকটিকে t s সময়ে মোট $(x+s)$ দূরত্ব অতিক্রম করিতে হইবে। কাজেই, $x+s=v\times t$ [v=ব্যক্তিটির গতিবেগ=9 ft/s]

$$\therefore \quad x+\frac{1}{2}t^2=9t \text{ বা, } t^2-18t+2x=0$$

এখানে t-এর মান বাস্তব। সুতরাং, (i) নং সমীকরণের নিরূপক (discriminant) অবশ্যই ধনাত্মক হইবে। অর্থাৎ, $(18)^2-4.1.2x\geqslant 0$

$$\text{বা, } 324-8x\geqslant 0 \quad \text{বা, } x\leqslant 40\tfrac{1}{2}$$

অতএব, বাস হইতে লোকটির দূরত্ব $40\frac{1}{2}$ ft-এর সমান বা কম হইলে তবেই তাহার পক্ষে বাসটি ধরা সম্ভব হইবে।

উদাহরণ 2.25 কোন রাস্তায় এক ব্যক্তি যখন একটি ট্রেনের দরজা হইতে ঠিক 9 m দূরে আছে তখন ট্রেনটি 2 m/s² ত্বরণ লইয়া ছুটিতে আরম্ভ করিল। লোকটিও ট্রেনটি ধরিবার জন্য তৎক্ষণাৎ সমবেগে ছুটিতে আরম্ভ করিল। লোকটি কোনক্রমে ট্রেনটি ধরিতে সমর্থ হইল। ঐ ব্যক্তির দৌড়ের বেগ নির্ণয় কর।

[A man on the road is just 9 m behind the entrance door of a train when the train begins to take motion from rest with a uniform acceleration of 2 m/s². The man immediately starts and runs with full speed (uniform) to get into the train. He is just able to get in. Find the speed of his running.]

সমাধান : মনে করি, লোকটির গতিবেগ v m/s এবং t s পর সে ট্রেনটি ধরিতে সমর্থ হয়। t s সময়ে ট্রেনটি যদি s দূরত্ব অতিক্রম করে তাহা হইলে লেখা যায়, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2=0.t+\frac{1}{2}\times2\times t^2$ বা, $s=t^2$

লোকটি ট্রেনের 9 m পিছনে ছিল। কাজেই, ট্রেনটি ধরিতে হইলে t s সময়ে তাহাকে $(s+9)$ m যাইতে হইবে। সুতরাং লেখা যায়,

$$s+9=v\times t \quad \text{বা,} \quad t^2-vt+9=0 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

t-এর মান বাস্তব হইলে তবেই লোকটি ট্রেনটিকে ধরিতে সমর্থ হইবে।

t-এর বাস্তব মান থাকিলে (i) নং সমীকরণের নিরূপক অবশ্যই ধনাত্মক বা শূন্য হইবে। $\therefore \quad (-v)^2-4.1.9\geqslant0$ বা, $v^2\geqslant36$ বা, $v\geqslant6$ m

লোকটি কোনক্রমে ট্রেনটি ধরিতে সমর্থ হয় বলিয়া তাহার গতিবেগ, $v=6$ m/s

উদাহরণ 2.26 একটি ট্রেন 2 ঘণ্টায় কোন একটি স্টেশন হইতে অন্য স্টেশনে যায়। সময়ের এই অবকাশে উহার দ্রুতির পরিবর্তন লেখচিত্রের সাহায্যে দেখান হইল (চিত্র 2.3)।

(i) গতিপথে ট্রেনটির সর্বোচ্চ ত্বরণ নির্ণয় কর।

(ii) ট্রেনটি প্রথম ঘণ্টায় যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহা নির্ণয় কর।

(iii) স্টেশন দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কত ?

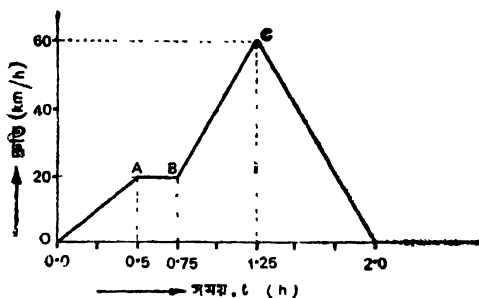
[A train moves from one station to another in 2 hours time; its speed during the motion is shown in the graph (Fig. 2.3).

(i) Calculate the maximum acceleration during the journey.

(ii) Find the distance travelled by the train during the first hour of its journey.

(iii) What is the distance between the stations ?]

সমাধান : (i) যাত্রা শুরু হইবার পর হইতে 0·5 ঘণ্টা সময়ের অবকাশে ট্রেনটির ত্বরণ=লেখচিত্রের OA অংশের নতি (slope)

$$=\frac{20}{0{\cdot}5}=40 \text{ km/h}^2$$

যাত্রা শুরু হইবার 0·5 ঘণ্টা পর হইতে 0·75 ঘণ্টা পর্যন্ত সময়ের অবকাশে ট্রেনটির বেগ স্থির রহিয়াছে। সময়ের এই অবকাশে ট্রেনটির ত্বরণ

=লেখচিত্রের AB অংশের নতি=0 km/h²

0·75 ঘণ্টা হইতে 1·25 ঘণ্টা পর্যন্ত ট্রেনটির বেগ পুনরায় বৃদ্ধি পাইয়াছে। এই সময় ট্রেনটির ত্বরণ=লেখচিত্রের BC অংশের নতি

চিত্র 2.3

$$=\frac{60-20}{1\cdot25-0\cdot75}=\frac{40}{0\cdot50}=80 \text{ km/h}^2$$

ইহাই ট্রেনটির ত্বরণের সর্বোচ্চ মান।

ইহার পর ট্রেনটির গতি ধীরে ধীরে হ্রাস পাইয়াছে এবং অবশেষে ট্রেনটি অন্য স্টেশনে আসিয়া থামিয়াছে। এই সময় ট্রেনটির ত্বরণ ঋণাত্মক। এই ঋণাত্মক ত্বরণের মান,

$$=\text{লেখচিত্রের CD অংশের নতি}=\frac{0-60}{2-1\cdot25}=-\frac{60}{0\cdot75}=-80 \text{ km/h}^2$$

(ii) ট্রেনটি যাত্রা শুরু করিবার পর হইতে 0·5 ঘণ্টা পর্যন্ত যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহার মান $s_1=\frac{1}{2}\times f\times(0\cdot5)^2=\frac{1}{2}\times40\times0\cdot25=5$ km

0·5 ঘণ্টা হইতে 0·75 ঘণ্টা পর্যন্ত গাড়ির ত্বরণ শূন্য এবং গতিবেগ 20 km/h। কাজেই, সময়ের এই অবকাশে ট্রেন-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$s_2=20\times(0\cdot75-0\cdot50)=20\times0\cdot25=5 \text{ km}$$

যাত্রা শুরু করিবার 0·75 ঘণ্টা পর হইতে 1 ঘণ্টা পর পর্যন্ত ট্রেন-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s_3=20\times(1-0\cdot75)+\frac{1}{2}\times80\times(1-0\cdot75)^2$

$$=20\times0\cdot25+\frac{1}{2}\times80\times(0\cdot25)^2=5+40\times0\cdot0625=7\cdot5 \text{ km}$$

কাজেই, প্রথম ঘণ্টার অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$=s_1+s_2+s_3=5+5+7\cdot5=17\cdot5 \text{ km}$$

(iii) ট্রেন ছাড়িবার 0·75 ঘণ্টা পর হইতে 1·25 ঘণ্টা পর পর্যন্ত ট্রেন যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহার মান, $s_3=20\times(1\cdot25-0\cdot75)+\frac{1}{2}\times80\times(1\cdot25-0\cdot75)^2$

$$=20\times0\cdot5+40\times0\cdot25=20 \text{ km}$$

এবং ট্রেন ছাড়িবার 1·25 ঘণ্টা পর হইতে 2 ঘণ্টা পর পর্যন্ত অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$s_4=60\times(2-1\cdot25)-\frac{1}{2}\times80\times(2-1\cdot25)^2$$

$$=60\times0\cdot75-40\times(0\cdot75)^2=45-22\cdot5=22\cdot5 \text{ km}$$

কাজেই, স্টেশন দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব, $s=s_1+s_2+s_3+s_4$

$$=5+5+20+22\cdot5=52\cdot5 \text{ km}$$

উদাহরণ 2.27 একই অনুভূমিক সরলরেখায় অবস্থিত দুইটি স্টেশনের দূরত্ব d ft। একটি ট্রেন স্থির অবস্থা হইতে a ft/s² সম-ত্বরণে যাত্রা করিল এবং কিছুক্ষণ পর b ft/s² সম-মন্দনে চলিতে লাগিল এবং এক স্টেশন হইতে অপর স্টেশনে পৌঁছিল। দেখাও যে, ট্রেনটি এই দূরত্ব অতিক্রম করিতে যে-সময় লইল তাহার মান

$$t=\sqrt{\left\{\frac{2(a+b)d}{ab}\right\}} \text{ s}$$

[The distance between two stations in the same horizontal line is d ft. A train starts from rest from one of the stations with a uniform acceleration of a ft/s² and after certain instant of time moves with a constant retardation of b ft/s² until it stops at the

other station. Prove that the time taken to accomplish the journey is $t=\sqrt{\left\{\frac{2(a+b)d}{ab}\right\}}$ s]

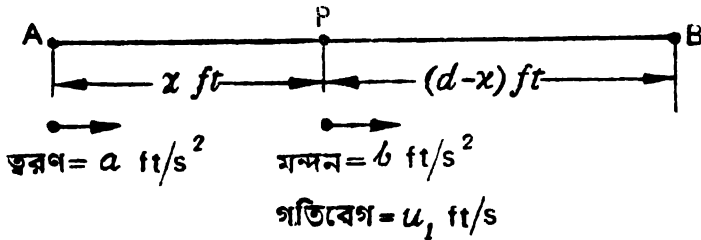
সমাধান : মনে করি ট্রেনটি A স্টেশন হইতে a ft/s² ত্বরণ লইয়া যাত্রা শুরু করিয়া P বিন্দুতে আসিল এবং P বিন্দু হইতে b ft/s² মন্দন লইয়া চলিয়া B স্টেশনে গিয়া থামিল (চিত্র 2.4)। মনে করি, P অবস্থানে ট্রেনটির গতিবেগ $=u_1$ ft/s

$$\text{AP}=x \text{ ft হইলে লেখা যায়, } u_1^2=2ax \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$\text{এবং } u_1^2-2b(d-x)=0 \quad \text{বা, } u_1^2=2b(d-x) \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়, $ax=b(d-x)$

$$\text{বা, } \frac{a}{b}=\frac{d-x}{x} \text{ বা, } \frac{a+b}{b}=\frac{d}{x} \quad \text{বা, } x=\frac{bd}{a+b} \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

$$\text{(i) এবং (iii) হইতে লেখা যায়, } u_1^2=2a\times\frac{bd}{a+b} \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

চিত্র 2.4

ট্রেনটি যদি A স্টেশন হইতে P অবস্থানে আসিতে t_1 s এবং P হইতে B স্টেশনে আসিতে t_2 s সময় লয়, তাহা হইলে $u_1=at_1$ এবং $u_1=bt_2$

$$\text{কাজেই, } t_1=\frac{u_1}{a} \text{ এবং } t_2=\frac{u_1}{b}$$

∴ A স্টেশন হইতে B স্টেশনে আসিতে ট্রেনটি যে-সময় লয় তাহার মান,

$$t=t_1+t_2=u_1\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right]=u_1\times\frac{a+b}{ab} \quad \cdots \quad \text{(v)}$$

এখন, সমীকরণ (iv) হইতে u_1-এর মান বসাইয়া পাই,

$$t=\sqrt{\frac{2abd}{a+b}}\times\frac{a+b}{ab}=\sqrt{\frac{2(a+b)d}{ab}} \text{ s}$$

উদাহরণ 2.28 f সমত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলমান একটি কণা t সেকেণ্ডে s দূরত্ব এবং পরবর্তী t' সেকেণ্ডে s' দূরত্ব অতিক্রম করে। দেখাও যে,

$$f=2\left(\frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}\right)\Big/(t+t')$$

[A particle, moving with a uniform acceleration f in a straight line, traverses a distance s in t s and a distance s' in the next t' s. Show that $f=2\left(\frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}\right)\Big/(t+t')$]

সমাধান : ধরি, বস্তুকণার প্রাথমিক গতিবেগ$=u$

সুতরাং, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ ... (i)

এবং $s+s'=u(t+t')+\frac{1}{2}f(t+t')^2$ ... (ii)

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $s'=ut'+\frac{1}{2}f(t'^2+2tt')$

সমীকরণ (i) হইতে লেখা যায়, $\frac{s}{t}=u+\frac{1}{2}ft$ ... (iii)

আবার সমীকরণ (ii) হইতে লেখা যায়, $\frac{s'}{t'}=u+\frac{1}{2}f(t'+2t)$ ... (iv)

$\therefore \quad \frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}=\frac{1}{2}f(t+t')$ [সমীকরণ (iii) এবং (iv) হইতে]

বা, $f=2\left(\frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}\right)\Big/(t+t')$

উদাহরণ 2.29 সমত্বরণে ধাবমান একটি বস্তুকণা উহার গমনকালের শেষ সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত মোট পথের $\frac{9}{25}$ অংশ যায়। যদি কণাটি স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া প্রথম সেকেণ্ডে 6 cm পথ অতিক্রম করে তবে উহা কতক্ষণ গতিশীল থাকিবে এবং মোট কতটা দূরত্ব অতিক্রম করিবে ?

[A particle moving with a uniform acceleration covers $\frac{9}{25}$th of the whole distance in the last second of its journey. If the particle starts from rest and traverses 6 cm in the first second, how long will it be in motion and what will be total distance traversed ?]

সমাধান : মনে করি, কণাটি t s ধরিয়া গতিশীল রহিয়াছে।

t-সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s=\frac{1}{2}ft^2$, $f=$কণার ত্বরণ [$\because$ প্রাথমিক গতিবেগ$=0$]

t-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s_t=\frac{f}{2}(2t-1)$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $s_t=\frac{9}{25}s$ বা, $\frac{1}{2}f(2t-1)=\frac{9}{25}\cdot\frac{1}{2}ft^2$

বা, $2t-1=\frac{9}{25}t^2$ বা, $9t^2-50t+25=0$ বা, $9t^2-45t-5t+25=0$

বা, $9t(t-5)-5(t-5)=0$ বা, $(t-5)(9t-5)=0$

অর্থাৎ, $t=5$ s বা $\frac{5}{9}$ s

কিন্তু প্রশ্নের শর্তানুসারে, $t \nless 1$ s

কাজেই, t-এর গ্রহণযোগ্য মান 5 s। অর্থাৎ, কণাটি 5 s গতিশীল ছিল। কণাটি প্রথম সেকেণ্ডে 6 cm পথ অতিক্রম করিয়াছে।

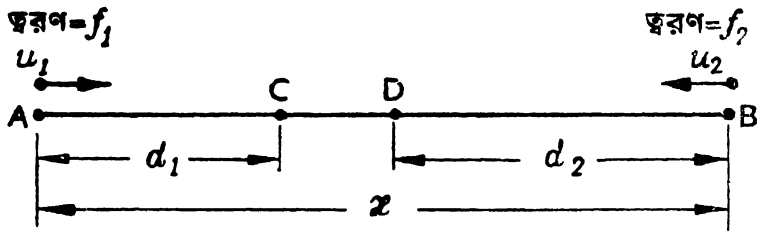
কাজেই, $6=\frac{1}{2}f.1^2$ বা, $f=12$ ft/s^2

অতএব, অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব$=\frac{1}{2}ft^2=\frac{1}{2}\times12\times5^2=150$ cm

উদাহরণ 2.30 একই লাইন বরাবর দুইটি ট্রেন u_1 এবং u_2 বেগে পরস্পরের দিকে আগাইয়া আসিতেছে। যখন ইহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব x তখন উভয় ট্রেনের চালকই ব্রেক কষিল। দেখাও যে, ট্রেনদ্বয়ের সংঘাত এড়াইতে হইলে $u_1{}^2f_2+u_2{}^2f_1 \leqslant 2f_1f_2x$ হওয়া প্রয়োজন। এখানে, f_1 এবং f_2 যথাক্রমে প্রথম এবং দ্বিতীয় ট্রেনের মন্দন।

[Two trains on the same line are approaching each other with velocities u_1 and u_2. The drivers of both the trains apply the brakes when the trains are x distance apart. Show that it is possible to avoid a collision if $u_1{}^2f_2+u_2{}^2f_1 \leqslant 2f_1f_2x$, where f_1 and f_2 are the retardations which the brakes can produce in respective trains.]

সমাধান : ধরি, যখন প্রথম ট্রেনটি এবং দ্বিতীয় ট্রেনটি যথাক্রমে A এবং B অবস্থানে আছে তখন উভয় ট্রেনের চালক ব্রেক কষিল (চিত্র 2.5)। প্রশ্নের শর্তানুসারে, $AB=x$

মনে করি, প্রথম ট্রেনটি C বিন্দুতে আসিয়া এবং দ্বিতীয় ট্রেনটি D বিন্দুতে আসিয়া স্থির হয়। ধরি, $AC=d_1$ এবং $BD=d_2$

চিত্র 2.5

কাজেই, লেখা যায় $0=u_1{}^2-2f_1d_1$ বা, $d_1=\dfrac{u_1{}^2}{2f_1}$ ... (i)

এবং $0=u_2{}^2-2f_2d_2$ বা, $d_2=\dfrac{u_2{}^2}{2f_2}$ ... (ii)

$$\text{সুতরাং, } d_1+d_2=\frac{u_1{}^2}{2f_1}+\frac{u_2{}^2}{2f_2}$$

স্পষ্টতই দেখা যাইতেছে যে, যদি $d_1+d_2 \leqslant x$ হয়, তাহা হইলে ট্রেনদ্বয়ের সংঘাত এড়ান যাইবে।

অর্থাৎ, সংঘাত এড়াইতে হইলে $\dfrac{u_1{}^2}{2f_1}+\dfrac{u_2{}^2}{2f_2} \leqslant x$ বা, $\dfrac{u_1{}^2f_2+u_2{}^2f_1}{2f_1f_2} \leqslant x$

বা, $u_1{}^2f_2+u_2{}^2f_1 \leqslant 2f_1f_2x$

উদাহরণ 2.31 একটি ট্রেন A স্টেশন হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 45 মিনিটে B স্টেশনে গিয়া থামে। A এবং B-এর মধ্যবর্তী কোন অবস্থান C-তে উহা সর্বোচ্চ

গতিবেগ লাভ করে—এই সর্বোচ্চ গতিবেগের মান ঘণ্টায় 45 মাইল। যদি ট্রেনটি A হইতে C পর্যন্ত সমত্বরণে এবং C হইতে B পর্যন্ত সম-মন্দনে আসে তাহা হইলে A হইতে B-এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

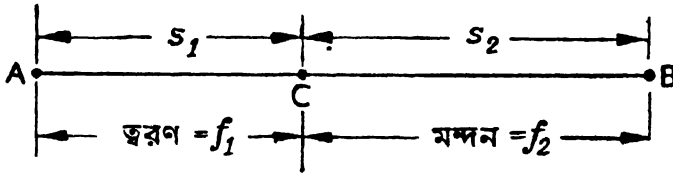
[A train travels from a station A to a station B in 45 minutes. At a point C, somewhere between A and B, the train attains its maximum velocity 45 miles/hour. If the train travels with a uniform acceleration from A to C and with a uniform retardation from C to B, find the distance between the stations A and B, if it is assumed that the train starts from rest at A and comes to rest at B.]

সমাধান : মনে করি, A হইতে C পর্যন্ত ট্রেনটির ত্বরণ $=f_1$

C হইতে B পর্যন্ত ট্রেনটির ত্বরণ $=f_2$

A হইতে C-এর দূরত্ব $=s_1$

এবং C হইতে B-এর দূরত্ব $=s_2$ (চিত্র 2.6)

ট্রেনটি A স্টেশনে স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করে, অর্থাৎ A অবস্থানে ট্রেনের প্রারম্ভিক গতিবেগ=0 ; আবার B বিন্দুতে অন্তিম গতিবেগ=0

চিত্র 2.6

$45^2=0+2f_1s_1$ এবং $0=45^2-2f_2s_2$

$\therefore \quad s_1=\frac{45^2}{2f_1}$ এবং $s_2=\frac{45^2}{2f_2}$, কাজেই $s_1+s_2=\frac{45^2}{2}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$ ... (i)

এইবার মনে করি, A হইতে B পর্যন্ত যাইতে ট্রেনটি সময় নেয় t_1 ঘণ্টা এবং B হইতে C পর্যন্ত যাইতে ট্রেনটি সময় নেয় t_2 ঘণ্টা।

সুতরাং লেখা যায়, $45=f_1t_1$ ... (ii)

এবং $0=45-f_2t_2$ বা, $45=f_2t_2$ ... (iii)

(ii) এবং (iii) হইতে পাই, $(t_1+t_2)=45\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$

কিন্তু শর্তানুসারে, $t_1+t_2=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$ h

$\therefore \quad \frac{3}{4}=45\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$, বা, $\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{60}$ ... (iv)

সমীকরণ (i) এবং (iv) হইতে লেখা যায়, $s_1+s_2=\frac{45\times45}{2}\times\frac{1}{60}$

$=16\frac{7}{8}$ মাইল।

উদাহরণ 3.32 স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া একটি বস্তুকণা একই সরল-রেখায় প্রথমে a সমত্বরণে এবং পরে b সম-মন্দনে যায়। যদি যাত্রার t সময় পরে কণাটি পুনরায় স্থিরাবস্থায় আসে এবং এই সময়ে কণাটি মোট s দূরত্ব অতিক্রম করে তাহা হইলে দেখাও যে, $t^2 = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)s$

[A particle starting from rest travels first with uniform acceleration a and then with uniform retardation b. If the particle comes to rest in t s after its start and if s is the total distance travelled, then show that $t^2 = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)s$]

সমাধান : মনে করি, কণাটি a ত্বরণে যায় t_1 সময় এবং b সম-মন্দনে যায় t_2 সময়; সুতরাং ইহা t_1 সময় পরে সর্বোচ্চ গতিবেগ V লাভ করে।

$$\therefore \quad V = 0 + at_1 \text{ এবং } 0 = V - bt_2 \text{ অর্থাৎ, } t_1 = \frac{V}{a} \text{ এবং } t_2 = \frac{V}{b}$$

$$\therefore \quad t_1 + t_2 = V\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \text{ বা, } t = V\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

আবার, যদি t_1 এবং t_2 সময়ে কণাটির সরণ যথাক্রমে s_1 এবং s_2 হয় তাহা হইলে লেখা যায়, $V^2 = 0 + 2as_1$ এবং $0 = V^2 - 2bs_2$

$$\text{বা, } s_1 = \frac{V^2}{2a} \text{ এবং } s_2 = \frac{V^2}{2b} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$$\therefore \quad s = s_1 + s_2 = \frac{V^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

(i) এবং (ii) হইতে V-এর মান অপনয়ন (eliminating) করিয়া পাই,

$$\frac{t^2}{s} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \text{ বা, } t^2 = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)s$$

উদাহরণ 2.33 একটি মোটরগাড়ি এবং একটি ট্রাক স্থিরাবস্থা হইতে একই মুহূর্তে যাত্রা করিল। প্রারম্ভিক মুহূর্তে গাড়িটি ট্রাক হইতে কিছুটা দূরত্ব পিছনে ছিল। ট্রাকের ত্বরণ 4 ft/s² এবং মোটরগাড়ির ত্বরণ 6 ft/s²। ট্রাকটি যখন 150 ft দূরত্ব অতিক্রম করিল তখন গাড়িটি উহাকে ছাড়াইয়া গেল। (*a*) ট্রাকটিকে অতিক্রম করিতে গাড়িটির কত সময় লাগিয়াছিল, (*b*) প্রারম্ভিক মুহূর্তে গাড়িটি ট্রাক হইতে কতটা পিছনে ছিল? (*c*) যখন উহারা পাশাপাশি আসে তখন উহাদের গতিবেগ কত?

[A car and a truck start from rest at the same instant, with the car initially at some distance behind the truck. The truck has a constant acceleration of 4 ft/s² and the car an acceleration

of 6 ft/s². The car overtakes the truck after the truck has moved 150 ft. Find (*a*) how long does it take the car to overtake the truck, (*b*) how far was the car behind the truck initially ? (*c*) What is the velocity of each when they are abreast ?]

সমাধান : (*a*) মনে করি, যাত্রা শুরু করিবার t s পর গাড়িটি ট্রাকটিকে ছাড়াইয়া যায়।

কাজেই, প্রশ্নের শর্তানুসারে, $150 = \frac{1}{2} \times 4 \times t^2$ বা, $t^2 = 75$

বা, $t = \sqrt{75} = 8 \cdot 66$ s

(*b*) গাড়িটি এই সময়ের মধ্যে যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহার মান

$s = \frac{1}{2} \times 6 \times t^2 = \frac{1}{2} \times 6 \times 75 = 225$ ft

∴ কাজেই, গাড়ি এবং ট্রাকের প্রারম্ভিক দূরত্ব ছিল, $x = s - 150$

$= 225 - 150 = 75$ ft

(*c*) গাড়ি এবং ট্রাকটি $\sqrt{75}$ s পর পাশাপাশি আসিয়াছে। এই সময় গাড়িটির গতিবেগ, $v_c = 6 \times \sqrt{75} = 51 \cdot 96$ ft

এই সময় ট্রাকের গতিবেগ, $v_t = 4 \times \sqrt{75} = 34 \cdot 64$ ft

উদাহরণ 2.34 যখন একটি ট্রেন স্থিরাবস্থা হইতে 2 m/s² ত্বরণ লইয়া চলিতে আরম্ভ করিল ঠিক তখন এক ব্যক্তি ট্রেনের দরজা হইতে 9 m দূরে পৌঁছিল। ঐ ব্যক্তি তখন সমবেগে দৌড় শুরু করিল এবং সময়মত ট্রেনে উঠিতে সক্ষম হইল। ঐ ব্যক্তির গতিবেগ কত ছিল ?

[When a train, starting from rest beings to move with an acceleration of 2 m/s², a person arrived at a distance of 9 m from the door of the train. The man then starts running with an uniform velocity and got into the train in time. What was the velocity of the man ?]

সমাধান : উদাহরণ 2.25 দ্রষ্টব্য।

উদাহরণ 2.35 একটি গাড়ি স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া কিছুক্ষণ α সমত্বরণে ত্বরিত হইল এবং ইহার পর β সম-মন্দনে গতিবেগ কমাইয়া স্থির অবস্থায় আসিল। যদি ইহাতে t সময় লাগে তাহা হইলে (i) গাড়ির সর্বোচ্চ গতিবেগ এবং (ii) ইহার দ্বারা অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব নির্ণয় কর।

[A car accelerates from rest at a constant rate of α for some time, after which it decelerates at a constant rate β to come to rest. If the total time-elapse is t, evaluate (i) the maximum velocity reached and (ii) the total distance covered.]

সমাধান : মনে করি, গাড়িটি t_1 সময় ধরিয়া α ত্বরণ লইয়া চলে। কাজেই, উহা অবশিষ্ট $(t - t_1)$ সময় β মন্দন লইয়া চলে।

∴ গাড়ির সর্বোচ্চ গতিবেগ, $v = \alpha t_1$ ... (i)

এই গতিবেগ কমিতে কমিতে $(t-t_1)$ সময়ে শূন্য হয়। কাজেই লেখা যায়,

$$v-\beta(t-t_1)=0 \quad \text{বা,} \quad v=\beta(t-t_1) \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) হইতে v-এর মান বসাইয়া পাই, $\alpha t_1=\beta(t-t_1)$

$$\text{বা,} \ t_1=\frac{\beta t}{(\alpha+\beta)} \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

(i) নং সমীকরণে t_1-এর এই মান বসাইয়া গাড়ির সর্বোচ্চ গতিবেগের মান পাই,

$$v=\frac{\alpha\beta t}{(\alpha+\beta)}$$

মনে করি, গাড়িটি মোট যে-দূরত্ব অতিক্রম করিয়াছে তাহার মান$=s$; যদি গাড়িটি s_1 দূরত্ব α ত্বরণ লইয়া চলে এবং s_2 দূরত্ব β মন্দন লইয়া চলে তাহা হইলে লেখা যায়,

$$s=s_1+s_2 \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

$$\text{কিন্তু,} \ s_1=\tfrac{1}{2}\alpha t_1^2 \quad \cdots \quad \text{(v)}$$

আবার, $0=v^2-2\beta s_2$ বা, $s_2=\frac{1}{2\beta}.v^2$

সমীকরণ (ii) হইতে v-এর মান বসাইয়া পাই,

$$s_2=\tfrac{1}{2}\beta\,(t-t_1)^2 \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

সমীকরণ (v) এবং (vi) হইতে পাই যথাক্রমে s_1 এবং s_2-এর মান বসাইয়া (iv) নং সমীকরণ হইতে পাই,

$$s=s_1+s_2=\tfrac{1}{2}\alpha t_1^2+\tfrac{1}{2}\beta(t-t_1)^2$$

$$=\tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{\beta t}{\alpha+\beta}\right)^2+\tfrac{1}{2}\beta\left(t-\frac{\beta t}{\alpha+\beta}\right)^2 \quad \text{[সমীকরণ (iii) হইতে]}$$

$$=\tfrac{1}{2}\alpha.\frac{\beta^2t^2}{(\alpha+\beta)^2}+\tfrac{1}{2}\beta\frac{\alpha^2t^2}{(\alpha+\beta)^2}=\tfrac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}\,t^2$$

প্রশ্নাবলী 2

1. একটি বস্তুকণা 10 cm/s বেগে চলিতে আরম্ভ করিয়া সুষম ত্বরণে 50 cm চলিবার পর 20 cm/s বেগ লাভ করিল। বস্তুকণার সুষম ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

[A particle starting with a velocity of 10 cm/s acquires a velocity of 20 cm/s after travelling a distance of 50 cm with a uniform acceleration. Find the acceleration of the particle.]

[3 cm/s²]

2. ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে চলন্ত রেলগাড়িতে ব্রেক কষিয়া 2 ft/s² মন্দন সৃষ্টি করা হইল। গাড়িটি কতক্ষণ পর থামিবে ?

[A train moving with a velocity of 30 miles per hour produces a retardation of 2 ft/s² by applying brake. After how long will the train come to rest ?]

[22 s]

3. একটি বস্তু স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 2 মিনিটে 8 km/s গতিবেগ লাভ করে। বস্তুটির ত্বরণ কত ?

[A body starts from rest and acquires a velocity of 8 km/s in 2 minutes. What is the acceleration of the body ?]

[0·667 km/s^2 (প্রায়)]

4. কোন নির্দিষ্ট সময়ে একটি বস্তুর গতিবেগ 144 m/s এবং মন্দন 32 m/s^2। 10 সেকেণ্ড পর বস্তুটির গতিবেগ কী হইবে ?

[A body has a velocity of 144 m/s and is subjected to a retardation of 32 m/s^2. What is the velocity of the body after 10 seconds ?]

[প্রারম্ভিক গতিবেগের বিপরীত দিকে 176 m/s]

5. যখন একটি ট্রেন প্রতি সেকেণ্ডে 36 ft বেগে চলিতেছে তখন উহার উপর 2 ft/s^2 সুষম মন্দন প্রয়োগ করা হইল। কতদূর গিয়া ট্রেনটি থামিয়া যাইবে ?

[A uniform retardation of 2 ft/s^2 is applied to a train when it was moving with a velocity of 36 ft per second, How far will the train move before it comes to a stop ?] [324 ft]

6. একটি ট্রেন একটি স্টেশন হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 2 মিনিটে ঘণ্টায় 60 মাইল সর্বোচ্চ স্থির গতিবেগ লাভ করিল। ট্রেনটির গতির পরিবর্তনশীল অবস্থায় উহা কতটা দূরত্ব অতিক্রম করিল ?

[A train starting from a station is uniformly gaining speed until after 2 minutes it acquires the maximum uniform speed of 60 mph. What is the distance travelled by the train during the variable state of its speed ?] (C. U. (I. Sc), 1957) [5280 ft]

7. স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া একটি বস্তু 2 cm/s^2 সমত্বরণে চলিতে লাগিল। বস্তুটি উহার গতিপথের পঞ্চম সেন্টিমিটার কত সময়ে অতিক্রম করিবে তাহা নির্ণয় কর।

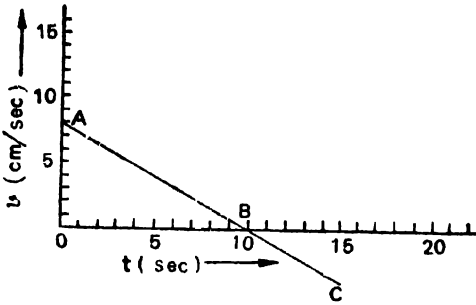
[A body starting from rest, moves with an uniform acceleration of 2 cm/s^2. Find the time taken by the body in traversing 5th centimeter of its journey.] (0·236 s)

8. 54 km h^{-1} গতিবেগে চলমান একটি গাড়ি 2 m/s^2 সমত্বরণ লইয়া চলিতে লাগিল। যে-স্থানে ত্বরণ শুরু হইয়াছিল সেই স্থান হইতে যে-স্থানে উহার গতিবেগ 72 km h^{-1} হইল সেই স্থানের দূরত্ব কত এবং এই দূরত্ব অতিক্রম করিতে কত সময় লাগিল নির্ণয় কর।

[A car moving with a velocity of 54 km h^{-1} accelerated uniformly at the rate of 2 m/s^2. Find the distance travelled from the place where acceleration began to that where the velocity reaches 72 km h^{-1}, and the time taken to cover this distance.] [43·75 m, 2·5 s]

9. কোন বস্তুকণার গতির লেখচিত্রটি দেওয়া হইয়াছে (চিত্র 2.7)। এই গতির প্রকৃতি নির্ণয় কর। বস্তুকণার প্রাথমিক গতিবেগ এবং ত্বরণের মান নির্ণয় কর। বস্তুকণার সরণের সহিত সময়ের সম্পর্কটি সমীকরণের আকারে প্রকাশ কর। লেখচিত্রের B বিন্দুতে বস্তুর গতি কি হইবে ? এই মুহূর্তের পরে বস্তুকণার গতি কীরূপ হইবে ?

[Given the graph of the motion of a particle, determine the nature of the motion (Fig 2.7). Find the initial velocity and the

acceleration of the particle. Write the equation of displacement in terms of time. What happens to the motion of the body at the moment corresponding to the point B? How does the body move after this moment?

চিত্র 2.7

[8 cm/s, $-\frac{4}{5}$ cm/s²; $s=8t-\frac{2}{5}t^2$; B বিন্দুতে বস্তু স্থির অবস্থায় আসে এবং ইহার পর হইতে প্রারম্ভিক গতির বিপরীত দিকে চলিতে শুরু করিবে।]

10. যখন ব্রেক কষা হয় তখন 70 km/h^{-1} গতিবেগে চলমান একটি ট্রেন 2 ms^{-2} মন্দন লইয়া চলিতে থাকে। স্থির অবস্থায় আসিতে ট্রেনটি কতটা সময় লইবে এবং যে-স্থানে ব্রেক কষা হইয়াছিল সেই স্থান হইতে কতটা দূরত্ব অতিক্রম করিবে?

[A train at 72 km h^{-1} undergoes a uniform retardation of 2 ms^{-2} when brakes are applied. Calculate the time taken by the train to come to rest and the distance travelled from the place where the brakes were applied.] [10 s, 100 m]

11. একটি কাঠের মধ্য দিয়া প্রবেশ করিবার সময় 3 ইঞ্চি পথ অতিক্রম করিতে গিয়া একটি বুলেটের গতিবেগ অর্ধেক হ্রাস পায়। গুলিটি কাঠের মধ্যে আর কতটা প্রবেশ করিতে পারিবে?

[A bullet loses half its velocity in penetrating 3 inches through a piece of wood. How much further will it penetrate?

(C. U. (I. Sc.) 1943) [1 ইঞ্চি]

12. একটি বস্তুকণা উহার যাত্রার দ্বাদশতম সেকেণ্ডে 72 cm এবং ষোড়শতম সেকেণ্ডে 96 cm দূরত্ব অতিক্রম করিল। বস্তুকণার প্রাথমিক গতিবেগ এবং ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

[A particle describes 72 cm in the twelfth second and 96 cm in the sixteenth second of its motion. Find its initial velocity and acceleration.] [3 cm/s, 6 cm/s²]

13. স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে যাত্রা শুরু করিয়া একটি বস্তু 5 s সময়ে যে-বেগ লাভ করিল, সেই গতিবেগে বিনা ত্বরণে চলিলে বস্তুটি 4 মিনিটে 320 গজ দূরত্ব অতিক্রম করে। বস্তুটির ত্বরণ নির্ণয় কর।

[A body starting from rest with uniform acceleration acquires in 5s a velocity with which it can move 320 yards in 4 minutes, if there is no acceleration. Find the acceleration of the body.] [0·8 ft/s²]

14. সমত্বরণে চলমান একটি বিন্দুকণা এক সেকেণ্ড চলিবার পর পরবর্তী আধ সেকেণ্ডে 25 ft এবং গতিকালের একাদশতম সেকেণ্ডে 198 ft দূরত্ব অতিক্রম করিল। ইহার ত্বরণ ও প্রারম্ভিক বেগ নির্ণয় কর।

[A particle moving with a uniform acceleration describes 25 ft in the half second that elapses after the first second of its journey and 198 ft in the eleventh second of its motion. Find the acceleration of the particle and its initial velocity.] [16 ft/s^2, 30 ft/s]

15. সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা উহার গতির একাদশ সেকেণ্ডে 720 cm এবং পঞ্চদশ সেকেণ্ডে 960 cm দূরত্ব অতিক্রম করে। 20 সেকেণ্ডে কণাটি কতটা দূরত্ব অতিক্রম করে ?

[A particle moving with uniform acceleration traverses 720 cm in the eleventh second and 960 cm in the fifteenth second of its motion. What is the distance travelled by the particle in 20 seconds ?] [138 m]

16. দুইটি ট্রেন একই স্টেশন হইতে সমান্তরাল লাইন বরাবর যাত্রা করিল। প্রথম ট্রেনটি স্থির অবস্থা হইতে 0·5 ft/s^2 সমত্বরণে চলিয়া 15 mi/h সর্বোচ্চ গতিবেগ লাভ করিয়া ঐ গতিবেগ বজায় রাখিল। প্রথম ট্রেনটি যাত্রা করিবার 40 সেকেণ্ড পর অপর ট্রেনটি স্থির অবস্থা হইতে 1 ft/s^2 ত্বরণ লইয়া চলিতে আরম্ভ করিল এবং 30 mi/h সর্বোচ্চ স্থির গতিবেগ লাভ করিল। স্টেশন হইতে কত দূরে এবং যাত্রা শুরু করিবার কতক্ষণ পর দ্বিতীয় ট্রেনটি প্রথম ট্রেনটিকে অতিক্রম করিবে ?

[Two trains leave the same station on parallel lines. The first starts from rest with a uniform acceleration of 0·5 ft/s^2 and attains a maximum velocity of 15 miles per hour which is kept constant. The other starts from rest 40 seconds after the first with a uniform acceleration of 1 ft/s^2 and attains a maximum and constant velocity of 30 mi/h. At what distance from the station and how long after leaving will the second pass the first ?]

[1760 ft, দ্বিতীয় ট্রেনটি ছাড়িবার 18 s পর]

17. দুইটি ট্রেন একই সরল লাইন ধরিয়া পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইতেছে ; ইহাদের মধ্যে একটি 60 mi/h বেগে এবং অপরটি 80 mi/h বেগে ছুটিতেছে। যখন ইহারা পরস্পর 2·0 মাইল দূরে আসিল তখন উভয় ট্রেনের চালক একই সঙ্গে অপর ট্রেনটিকে দেখিল এবং ব্রেক কষিল। যদি ব্রেকের প্রয়োগের পর প্রতিটি ট্রেনে 3·0 ft/s^2 মন্দন সৃষ্টি হয় তাহা হইলে ট্রেন দুইটির সংঘাত ঘটিবে কিনা স্থির কর।

[Two trains, one travelling at 60 mi/h and the other at 80 mi/h are heading towards one another along a straight track. When they are 2·0 miles apart, both drivers simultaneously see the other's train, and apply their brakes. If the consequent decceleration of each train is 3·0 ft/s^2, determine whether there will be a collision.]

[ট্রেন দুইটির সংঘাত ঘটিবে না]

18. সমমন্দন লইয়া চলমান একটি ট্রেন পর পর দুই কিলোমিটার-চতুর্থাংশ অতিক্রম করিতে 20 s এবং 30 s সময় নেয়। থামিবার পূর্ব পর্যন্ত উহা কতটা দূরত্ব অতিক্রম করিবে ?

[A train moving with uniform retardation takes 20s and 30s to travel two successive quarter kilometers. How much further will the train travel before coming to rest ?] [102·1 m]

19. 5×10^6 cm/s গতিবেগসম্পন্ন একটি ইলেকট্রন একটি বৈদ্যুতিক ক্ষেত্রে প্রবেশ করায় উহার 10^{17} cm/s^2 ত্বরণ সৃষ্টি হয়। (i) কত সময়ে ইলেকট্রনটির গতিবেগ উহার

প্রারম্ভিক গতিবেগের দ্বিগুণ হইবে ? (ii) এই সময়ের মধ্যে ইলেকট্রনটি কতটা দূরত্ব অতিক্রম করিবে ?

[An electron travelling 5×10^6 cm/s passes through an electric field that gives it an acceleration of 10^{17} cm/s^2. (i) How long will it take to acquire a speed which is equal to double its initial speed ? (ii) Through what distance will the electron travel in this time ?]

[5×10^{-11} s, $3 \cdot 75 \times 10^{-4}$ cm]

20. একটি ট্রেন 72 km/h গতিবেগে ছুটিতেছে। ব্রেক কষিবার পর ট্রেনটি 1 km দূরে গিয়া থামিল। ইহার মন্দন কত ? ইহা থামিতে কতক্ষণ সময় লইবে ? উহার গতিপথের মধ্যবর্তী একটি আলোক-সিগন্যাল-এর নিকট উহার গতিবেগ কত ?

[A train travelling at a velocity of 72 km/h stops traversing 1 km after the brakes are applied. What is its decceleration ? How long does it take to stop ? What is its velocity at a midpoint light signal ?] [0·2 m/s^2, 1 min 40 s, 14·1 m/s]

21. একই সময়ে A বিন্দু হইতে দুইটি বস্তুকণা যাত্রা শুরু করিয়া AB সরলরেখা বরাবর চলিতে লাগিল। প্রথমটির সমবেগ 40 ft/s এবং দ্বিতীয়টির প্রারম্ভিক বেগ 16 ft/s এবং ত্বরণ 6 ft/s^2। বস্তুকণাদ্বয় কতক্ষণ পর পুনরায় মিলিত হইবে ?

[Two particles start at the same instant from a point A and move in the same direction along a straight line AB. The first has a uniform velocity of 40 ft/s, while the second starts with an initial velocity of 16 ft/s and has a uniform acceleration of 6 ft/s^2. Find the time that elapse before the two particles meet again]

(C. U., I. Sc., 1955)

22. একটি ট্রেন স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া সমত্বরণে 70 s চলিয়া ঘণ্টায় 30 মাইল গতিবেগ লাভ করিল। ট্রেনটি ইহার পর 10 মাইল পথ স্থির গতিবেগে চলিল। অতঃপর ব্রেক কষিয়া ট্রেনটিকে (সমমন্দনে) 220 গজ দূরত্বে স্থির অবস্থায় আনা হইল। ট্রেনটি মোট কত দূরত্ব অতিক্রম করিল এবং এই দূরত্ব অতিক্রম করিতে কত সময় লইল ?

[A train starts from rest and proceeds with uniform acceleration for 70 seconds, at the end of which time its velocity is 30 miles an hour. It now proceeds with uniform velocity for 10 miles, when the brakes are applied to bring it to rest (with uniform retardation) within 220 yards. What is the total distance traversed and how long does the journey take ?] [10 mi. 2200 ft., 21 min. 40 s]

23. স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া একটি স্কুটার 1 m/s^2 ত্বরণে 200 m দূরত্ব অতিক্রম করিয়া কত গতিবেগ অর্জন করিবে ?

[What speed will a scooter, initially at rest, acquire after travelling 200 m with an acceleration of 1 m/s^2 ?] [20 m/s]

24. 220 গজ দূরত্ব অতিক্রম করিতে ঘণ্টায় 45 মাইল গতিবেগে ধাবমান একটি গাড়ির গতিবেগ ঘণ্টায় 15 মাইলে নামিয়া আসে, মন্দন স্থির হইলে ইহাতে কত সময় লাগিবে ? থামিবার পূর্বে গাড়িটিকে আর কতটা দূরত্ব অতিক্রম করিতে হইবে ?

[A car travelling at 45 miles/hour has its speed reduced to 15 miles/hour whilst travelling over a distance of 220 yards. Assuming the retardation to be uniform find the time required. Find also

how much further the car will need to travel before coming to rest.] [15 s, 82·5 ft]

25. একটি বাস 1 ft/s^2 সমত্বরণে ত্বরান্বিত হয় এবং 4 ft/s^2 হারে মন্দীভূত হয়। ইহার সর্বোচ্চ গতিবেগ ঘণ্টায় 30 মাইল। উহা $\frac{1}{2}$ মাইল দূরত্ব অতিক্রম করিতে ন্যূনতম কত সময় লইবে তাহা নির্ণয় কর।

[A bus accelerates uniformly at a rate of 1 ft/s^2 and retards uniformly at a rate of 4 ft/s^2. Its maximum speed is 30 miles/hour. Find the least time in which it can do a journey of $\frac{1}{2}$ mile.] [87 73s]

26. একটি বস্তু প্রথম দুই সেকেণ্ডে 200 cm এবং পরের 4 সেকেণ্ডে 220 cm অতিক্রম করে। যাত্রা শুরু করিবার সপ্তম সেকেণ্ড পর উহার গতিবেগ কত হইবে?

[A body travels 200 cm in the first two seconds and 220 cm in the next 4 seconds. What will be the velocity at the end of the 7th second from start ?] [10 cm/s]

27. 1600 ft/s গতিবেগে ধাবমান একটি বুলেট একটি লক্ষ্যবস্তুর মধ্যে 1 ইঞ্চি প্রবেশ করিয়া অর্ধেক গতিবেগ হারাইল। যদি বুলেটের উপর ক্রিয়াশীল বিরুদ্ধ বল সমান থাকে তাহা হইলে বুলেটটির গতিবেগ সম্পূর্ণভাবে লুপ্ত হইবার পূর্বে উহা আর কতদূর প্রবেশ করিবে?

[A bullet moving with a velocity of 1600 ft/s has its velocity reduced to one-half after penetrating one inch into a target. Assuming the resistance to be uniform, how far will it penetrate before its velocity is destroyed ?] [$\frac{1}{3}$ inch]

28. একটি বুলেট কোন লক্ষ্যবস্তুতে x ft প্রবেশ করিয়া উহার গতিবেগের $(1/n)$ অংশ হারায়। স্থির হইবার পূর্বে বুলেটটি আর কতটা প্রবেশ করিবে?

[A bullet fired into a target losses $(1/n)$-th of its velocity after penetrating x ft into the target. How further will it penetrate before coming to rest ?] [$x.\frac{(n-1)^2}{(2n-1)}$ ft]

29. একটি ট্রেন A একটি সোজা অনুভূমিক রাস্তা দিয়া ঘণ্টায় 60 km সুষম বেগে চলিতেছে। 70 km/h বেগে ধাবমান অপর একটি গাড়ি B ইহাকে অনুসরণ করিতেছে। যখন ইহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব 2·5 km তখন B গাড়িটিতে 20 km/h^2 মন্দন সৃষ্টি করা হইল। কতটা দূরত্বে এবং কোন্ সময়ে B ট্রেনটি A ট্রেনটিকে ধরিয়া ফেলিবে?

[A car A is travelling on a straight level road with a uniform speed of 60 km/h. It is followed by another car B which is moving with a speed of 70 km/hr. When the distance between them is 2·5 km, the car is given a retardation of 20 km/h^2. After what distance and time will B catch up with A ?]

[32·5 km, 0·5 hr]

30. বোম্বে মেইল হাওড়া হইতে ছাড়িয়া বর্ধমানে থামে। ইহার গতিবেগ সমহারে বৃদ্ধি পাইয়া একটি সর্বোচ্চ মান v-তে পৌঁছে; ইহার পর আবার সমহারে হ্রাস পাইতে থাকে। দেখাও যে, ট্রেনটি হাওড়া হইতে বর্ধমান আসিতে যে-সময় নেয় উহার মান $(2x/v)$, এখানে x হইল স্টেশন দুইটির দূরত্ব।

[The Bombay Mail starts from Howrah and stops at Burdwan. Its velocity increases uniformly till it attain a maximum velocity v

and then decreases uniformly. Show that the time taken by the train to run from Howrah to Burdwan is $(2x/v)$, where x is the distance between the two stations.]

31. প্রতি ঘণ্টায় 30 মাইল গতিবেগে চলমান একটি গাড়ির ব্রেক কষা হইল এবং উহা 4 ft/s² মন্দন লাভ করিল। থামিবার পূর্বে গাড়িটি কতটা দূরত্ব অতিক্রম করিবে? এই দূরত্বের এক-তৃতীয়াংশের মধ্যে থামাইতে হইলে গাড়িটিকে কী মন্দন দিতে হইবে?

[A car. moving with a velocity of 30 miles per hour, applies brakes and acquires a constant retardation of 4 ft/s². What is the distance covered by the car before it comes to rest? If the car is to be stopped within one-third of the above distance, what retardation should be imparted to the car?] [242 ft, 12 ft/s²]

32. দুইটি স্টেশনের দূরত্ব 2 km। একটি ট্রেন একটি স্টেশন হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 0·5 m/s² ত্বরণ লইয়া কিছুটা দূরত্ব অতিক্রম করিল। ইহার পর বাকী দূরত্ব 0·8 m/s² মন্দন লইয়া চলিয়া অপর স্টেশনে গিয়া স্থির হইল। ট্রেনটির দ্বিতীয় স্টেশনে পৌঁছিতে কত সময় লাগিল?

[The distance between two stations is 2 km. A train starting from rest travels a certain distance with an acceleration of 0·5 m/s² Then it covers the rest of the distance with a retardation of 0·8 m/s² and comes to rest at the second station. What is the time taken by the train to reach the second station?] [114 s (প্রায়)]

33. একটি ট্রেনের গতিবেগ f_1 হারে সমভাবে 0 হইতে v পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়; ইহার পর গতিবেগ কিছুক্ষণ স্থির থাকে এবং পরিশেষে f_2 হারে সমভাবে হ্রাস পাইয়া 0 হয়। অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব x হইলে প্রমাণ কর যে, মোট সময়

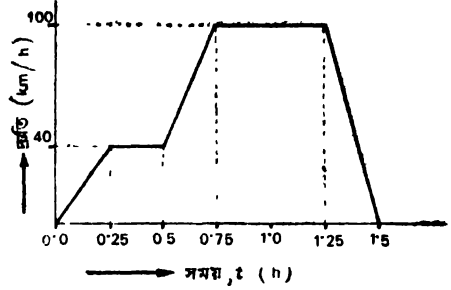
$$\frac{x}{v}+\frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right).$$

[The velocity of a train increases at a constant rate f_1 from 0 to v, then remains constant for an interval, and finally decreases to 0 at the constant rate f_2. If x be the total distance described, prove that the total time taken is $\frac{x}{v}+\frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$.]

34. একটি ট্রেন শিয়ালদা হইতে ছাড়িয়া কৃষ্ণনগরে থামে। ট্রেনটি উহার অতিক্রান্ত পথের প্রথম চতুর্থাংশ সমত্বরণ লইয়া, শেষ চতুর্থাংশ সমমন্দন লইয়া এবং মধ্যবর্তী অর্ধাংশ সম-গতিবেগ লইয়া চলে। দেখাও যে, ট্রেনটির গড় গতিবেগ উহার সর্বোচ্চ গতিবেগের $\frac{2}{3}$ অংশের সমান।

[A train starts from Sealdah and stops at Krishnanagar. The train moves with uniform acceleration for the first quarter of the journey, with uniform retardation for the last quarter, and with uniform velocity during middle half of the journey. Show that the average velocity of the train of $\frac{2}{3}$ of its maximum velocity.]

35. একটি ট্রেন একটি স্টেশন হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 1·5 ঘণ্টা পর অন্য স্টেশনে আসিয়া স্থির হয়। সময়ের এই অবকাশে উহার দ্রুতির পরিবর্তন লেখচিত্রের সাহায্যে

দেখান হইল (চিত্র 2.8)। (i) গতিপথে ট্রেনটির সর্বোচ্চ ত্বরণ নির্ণয় কর। (ii) ট্রেনটি প্রথম ঘণ্টায় যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহার মান নির্ণয় কর। (iii) স্টেশন দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কত ?

[A train moves from one station to another station in 1·5 hour. Its speed during the motion is shown in the graph (Fig. 2.8). (i) Calculate the maximum acceleration during the journey. (ii) Find the distance travelled by the train during the first hour of its journey. (iii) What is the distance between the stations ?] [240 km/h², 57·5 km, 95 km]

চিত্র 2.8

36. কোন নির্দিষ্ট গতিবেগে ধাবমান একটি মোটরগাড়ি P বিন্দুতে আসিয়া এইরূপ ত্বরণ লাভ করিল যাহাতে P বিন্দু অতিক্রম করিবার পর চতুর্থ সেকেণ্ডে গাড়িটি 17 ft এবং পঞ্চম সেকেণ্ডে 19 ft দূরত্ব অতিক্রম করে। P বিন্দু অতিক্রম করিবার 8 সেকেণ্ড পর গাড়িটি Q বিন্দুতে আসিলে PQ দূরত্বের মান নির্ণয় কর।

[A motor car travelling with a certain velocity, is accelerated at a point P such that during the 4th second after passing P it travels 17 ft and during the 5th second it travels 19 ft. If at the end of 8 seconds after passing P the car arrives at the point Q, find the distance PQ.] [144 ft]

37. একটি গাড়ি স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 2 m/s² সমত্বরণে 6 s চলিল। ইহার পর গাড়িটি স্থির গতিবেগে আধ মিনিট চলিল। অতঃপর ব্রেক কষিয়া গাড়িটিকে 5 সেকেণ্ডে স্থির অবস্থায় আনা হইল। গাড়িটির সর্বোচ্চ গতিবেগ এবং ইহার দ্বারা অতিক্রান্ত মোট দূরত্বের মান নির্ণয় কর।

[A car starts from rest and proceeds with an uniform acceleration of 2 m/s² for 5 seconds. It then maintains a constant speed for half a minute. The brakes are then applied and the car is brought to rest with uniform retardation in 5 seconds. Find the maximum speed of the car and the total distance covered by it.] [43·2 km/h, 426 m]

38. যখন ট্রাফিক লাইট সবুজ হইল তখন কোন সংযোগস্থলে অপেক্ষামান একটি গাড়ি 6 ft/s² সমত্বরণ লইয়া সোজা চলিতে শুরু করিল। একই মুহূর্তে 30 ft/s গতিবেগে ধাবমান একটি ট্রাক গাড়িটিকে অতিক্রম করিয়া চলিয়া গেল। (a) যাত্রাস্থল হইতে কত দূরে গিয়া গাড়িটি ট্রাকটিকে অতিক্রম করিবে ? (b) এই সময় গাড়িটির গতিবেগ কত হইবে ?

[At the instant the traffic lights turn green, an automobile that has been waiting at the intersection starts ahead with a constant acceleration of 6 ft/s². At the same instant a truck, travelling with a constant velocity of 30 ft/s, overtakes and passes the auto-

mobile. (a) How far beyond its starting point will the automobile overtake the truck ? (b) How fast will it be travelling ?]

[(a) 300 ft, (b) 60 ft/s]

39. একটি ট্রেন স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 40 মিনিটে A স্টেশন হইতে B স্টেশনে আসিল। ট্রেনটি সমত্বরণে চলিয়া A এবং B-এর মাঝামাঝি C অবস্থানে সর্বোচ্চ গতিবেগ 40 মাইল/ঘণ্টা লাভ করিল। ইহার পর উহা সমমন্দনে চলিয়া B স্টেশনে স্থির অবস্থায় আসিল। AB দূরত্ব নির্ণয় কর।

[A train starts from the station A and reaches the station B in 40 minutes. The train moves with constant acceleration and reaches a maximum velocity of 40 miles/hour at C, between A and B. It then deccelerates at a constant rate and stops at B. Calculate the distance AB.]

[$13\frac{1}{3}$ miles]

40. স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া একটি বস্তু 8 ft/s² সমত্বরণে চলিতে লাগিল। বস্তুটি উহার গতিপথের দ্বিতীয় ফুট কতক্ষণ সময়ে অতিক্রম করিবে তাহা নির্ণয় কর।

[A body starts from rest and moves with a uniform acceleration of 8 ft/s². Find the time taken by the body to traverse the second foot of its jonrney.]

[0·207 s]

41. 132 গজ দীর্ঘ একটি ট্রেন ব্রেকের সাহায্যে সমহারে মন্দিত হইতেছে। এই অবস্থায় উহার দুই প্রান্ত যথাক্রমে 12 মাইল/ঘণ্টা এবং 6 মাইল/ঘণ্টা বেগে একটি সিগন্যাল পোস্ট অতিক্রম করিল। ট্রেনটির মন্দন এবং ট্রেনটি যখন থামিবে তখন উহার পশ্চাৎ-প্রান্ত সিগন্যাল পোস্টটি হইতে কত দূরে থাকিবে তাহা নির্ণয় কর।

[A train 132 yards long is braked with a constant retardation, so that its two ends pass a signal post with speeds 12 miles/hour and 6 miles/hour respectively. Find the retardation and the distance of the rear of the train from the signal-post when it comes to rest.]

[0·293 ft/s², 44 yards]

42. একটি গাড়ি স্থির ত্বরণ লইয়া দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী 180 ft দূরত্ব 6 s সময়ে অতিক্রম করিল। যখন গাড়িটি দ্বিতীয় বিন্দুকে অতিক্রম করিল তখন ইহার গতিবেগ 45 ft/s। (a) প্রথম বিন্দুতে ইহার গতিবেগ কত ? (b) ইহার ত্বরণ কত ? (c) প্রথম বিন্দু হইতে কোন্ প্রারম্ভিক দূরত্বে গাড়িটি স্থির অবস্থায় ছিল ?

[A car moving with constant acceleration covers the distance between two points 180 ft apart in 6 s. Its speed as it passes the second point is 45 ft/s. (a) What is its speed at the first point ? (b) What is the acceleration of the car ? (c) At what prior distance from the first point was the car at rest ?]

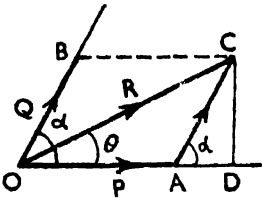
[15 ft/s, 5·0 ft/s, 23 ft]

43. একটি ট্রেন যাত্রা শুরু করিয়া স্থির ত্বরণে চলিতে লাগিল। এক সময় ট্রেনটি 30 ft/s গতিবেগে চলিতেছিল এবং আরও 160 ft দূরত্ব অতিক্রম করিয়া ইহা 50 ft/s গতিবেগে চলিতেছিল। (a) ট্রেনটির ত্বরণ, (b) উক্ত 160 ft দূরত্ব অতিক্রম করিতে প্রয়োজনীয় সময়, (c) 30 ft/s গতিবেগ লাভ করিতে প্রয়োজনীয় সময় এবং (d) স্থির অবস্থা হইতে 30 ft/s গতিবেগ লাভ করিতে যে-সময় লাগে সেই সময়ের মধ্যে ট্রেন-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

[A train started from rest and moved with constant acceleration. At one instant it was travelling 30 ft/s and 160 ft farther on it was travelling 50 ft/s. Calculate (a) the acceleration, (b) the time required to travel the 160 ft mentioned and (c) the time required to attain the speed of 30 ft/s, (d) the distance moved from rest to the time the train had a speed of 30 ft/s.]

[a) $5{\cdot}0$ ft/s^2, (b) 4s, (c) 6s, (d) 90 ft]

তৃতীয় পরিচ্ছেদ
ভেক্টর রাশি

3.1 ভেক্টরের সামান্তরিক সূত্র (Law of parallelogram of vectors) : দুইটি ভেক্টর যদি মানে এবং দিকে উহাদের প্রয়োগবিন্দু হইতে অঙ্কিত একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু দ্বারা সূচিত হয় তবে উক্ত প্রয়োগবিন্দু হইতে অঙ্কিত সামান্তরিকটির কর্ণ দ্বারা ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর সূচিত হইবে।

চিত্র 3.1

ধরা যাক, P এবং Q ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $=\alpha$। ইহাদের লব্ধি ভেক্টরটিকে R দ্বারা সূচিত করা হইল। P-এর সহিত লব্ধি ভেক্টরটি θ কোণে আনত (চিত্র 3.1)। তাহা হইলে নিম্নের সমীকরণ দুইটি হইতে R এবং θ-এর মান পাওয়া যাইবে।

$$R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha \qquad \cdots \qquad (3.1)$$

$$\text{এবং} \quad \tan\theta=\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} \qquad \cdots \qquad (3.2)$$

3.2 সমকৌণিক বিভাজনের সাহায্যে লব্ধি নির্ণয় : পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি অক্ষ বরাবর প্রতিটি ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় করিয়া গাণিতিক পদ্ধতিতে সহজেই বহুসংখ্যক ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয় করা যায়।

$V_1, V_2, V_3,\cdots$ ইত্যাদি ভেক্টরের x-উপাংশগুলি যথাক্রমে $V_{1x}, V_{2x}, V_{3x},\cdots$ ইত্যাদি এবং y-উপাংশগুলি যথাক্রমে $V_{1y}, V_{2y}, V_{3y},\cdots$ইত্যাদি হইলে, লব্ধি ভেক্টরের x-উপাংশ $R_x=$ সবগুলি x-উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল $=V_{1x}+V_{2x}+V_{3x}+\cdots=\Sigma V_x$

অনুরূপভাবে, লব্ধি ভেক্টরের y-উপাংশ, $R_y=$ সবগুলি y-উপাংশের বীজগাণিতিক যোগফল $=V_{1y}+V_{2y}+V_{3y}+\cdots=\Sigma V_y$

এখন, R_x এবং R_y পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত বলিয়া লেখা যায়,

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\sqrt{(\Sigma V_x)^2+(\Sigma V_y)^2} \qquad \cdots \qquad (3.3)$$

এই লব্ধি ভেক্টরটি x-অক্ষের সহিত θ কোণে আনত হইলে লেখা যায়,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \tan^{-1}\frac{\Sigma V_y}{\Sigma V_x} \quad \cdots \quad (3.4)$$

3.3 ভেক্টরের বিয়োগ এবং আপেক্ষিক গতিবেগ (Subtraction of vectors and relative velocity) : একটি ভেক্টরকে অপর একটি ভেক্টর হইতে বিয়োগ করিতে হইলে দ্বিতীয় ভেক্টরটির সমান এবং বিপরীতমুখী একটি ভেক্টরকে প্রথমটির সহিত ভেক্টরের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী যোগ করিতে হয়।

দুইটি গতিশীল বস্তুর আপেক্ষিক গতিবেগ নির্ণয় করিতে হইলে বস্তুদ্বয়ের গতিবেগের ভেক্টর-অন্তর (vector difference) নির্ণয় করিতে হয়। যদি পৃথিবীর সাপেক্ষে A বস্তুর গতিবেগ V_A এবং B-বস্তুর গতিবেগ V_B হয় তবে

B বস্তুর সাপেক্ষে A বস্তুর গতিবেগ,

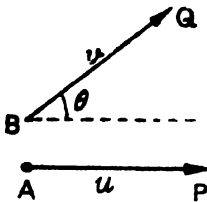
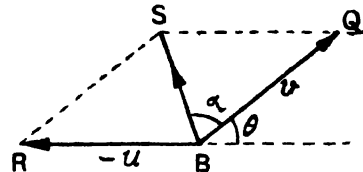
$$V_{AB} = V_A - V_B \text{ (ভেক্টর অন্তর)} \quad \cdots \quad (3.5)$$

এবং A বস্তুর সাপেক্ষে B বস্তুর গতিবেগ,

$$V_{BA} = V_B - V_A \text{ (ভেক্টর অন্তর)} \quad \cdots \quad (3.6)$$

কোন বস্তু A-এর সাপেক্ষে অপর কোন বস্তু B-এর আপেক্ষিক গতিবেগ পাইতে হইলে B-এর গতিবেগের সহিত A-এর গতিবেগের সমান ও বিপরীতমুখী গতিবেগ সংযোজন করিতে হয়। গতিবেগ ভেক্টর রাশি বলিয়া ইহাদের সংযোজন ভেক্টরের সংযোজন নীতি-অনুযায়ী হইবে।

মনে করি, দুইটি বস্তুকণা A এবং B-এর গতিবেগ যথাক্রমে u এবং v, এই দুই গতিবেগের অন্তর্বর্তী কোণ θ (চিত্র 3.2 a)।

A এবং B—ইহাদের উভয়ের উপর A কণার গতিবেগ-এর সমান এবং বিপরীতমুখী গতিবেগ আরোপ করা হইল। B কণার উপর আরোপিত গতিবেগকে BR রেখা দ্বারা সূচিত করা হইল (চিত্র 3.2 b)। BQSR সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করা হইল। উভয় গতিবেগের সহিত A কণার গতিবেগের সমান ও বিপরীত

চিত্র 3.2

গতিবেগ যোগ করায় উহাদের আপেক্ষিক গতিবেগ পরিবর্তিত হয় নাই, কিন্তু A বস্তুটির লব্ধি গতিবেগ শূন্য হইয়াছে। কাজেই, B কণার লব্ধি বেগ BS-ই মানে এবং দিকে A বস্তুর সাপেক্ষে B বস্তুর গতিবেগ।

ইহা সহজেই প্রমাণ করা যায় যে, আপেক্ষিক গতিবেগ V_{BA}-এর মান

$$BS = |V_{BA}| = (u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots \quad (3.7)$$

v-এর অভিমুখের সহিত এই আপেক্ষিক গতিবেগের অভিমুখ α কোণ উৎপন্ন করিলে লেখা যায়,

$$\tan \alpha = \frac{u \sin \theta}{v - u \cos \theta} \quad \cdots \quad (3.8)$$

3.4 একক ভেক্টর ও উপাংশের সাহায্যে ভেক্টরের প্রকাশঃ x, y- এবং z-অক্ষাভিমুখে একক ভেক্টরগুলিকে যথাক্রমে i, j এবং k দ্বারা সূচিত করিলে কোন ভেক্টর $\vec{V}$-কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়,

$$\vec{V} = i\, V_x + j\, V_y + k\, V_z \quad \cdots \quad (3.9)$$

এখানে, V_x, V_y এবং V_z যথাক্রমে $\vec{V}$ ভেক্টরের x-, y- এবং z-উপাংশ।

এখন, $\vec{A} = i\, A_x + j\, A_y + k\, A_z$ এবং $\vec{B} = i\, B_x + j B_y + k\, B_z$ হইলে এই দুই ভেক্টরের লব্ধি (বা, ভেক্টর-যোগফল) $(\vec{A}+\vec{B})$ এবং ভেক্টর অন্তর $(\vec{A}-\vec{B}$ নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়—

$$\vec{A}+\vec{B} = i(A_x+B_x)+j(A_y+B_y)+k(A_z+B_z) \quad \cdots \quad (3.10)$$

এবং $\vec{A}-\vec{B} = i(A_x-B_x)+j(A_y-B_y(+ k(A_z-B_z)$ $\cdots$ (3.11)

$\vec{A}$ ভেক্টরটির মান $= |\,\dot{A}\,| = \sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$ $\cdots$ (3·12)

অনুরূপভাবে $(\vec{A}+\vec{B})$ ভেক্টরের মান $= |\,\vec{A}+\vec{B}\,|$

$$= \sqrt{(A_x+B_x)^2+(A_y+B_y)^2+(A_z+B_z)^2} \quad \cdots \quad (3.13)$$

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 3.1 দুইটি সমান বলের অন্তর্বর্তী কোণ কত হইলে উহাদের লব্ধি বলের মান প্রতিটি বলের অর্ধেক হইবে ?

[What is the angle between two equal force so that their resultant is equal to half of each of the forces ?]

সমাধান ঃ মনে করি, বল দুইটির উভয়ের মান P এবং ইহাদের অন্তর্বর্তী কোণ θ ; তাহা হইলে প্রশ্নের শর্তানুসারে লেখা যায়,

$$\left(\frac{P}{2}\right)^2 = P^2 + P^2 + 2.P.P.\cos\theta$$

বা, $\dfrac{P^2}{4} = 2P^2 + 2P^2 \cos\theta$ বা, $\dfrac{1}{8} = 1 + \cos\theta$

বা, $\cos\theta = -\frac{7}{8} = -0{\cdot}875$ বা, $\theta = 151°$

উদাহরণ 3.2 3P এবং 2P মানের দুইটি বলের লব্ধি R। প্রথম বলটিকে দ্বিগুণ করিলে উহাদের লব্ধিও দ্বিগুণ হয়। বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ কত ?

[The resultant of two forces 3P and 2P is R. If the first force is doubled, the resultant is also doubled. Find the angle between the two forces.]

সমাধান : মনে করি, 3P এবং 2P বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $=\theta$

ইহাদের লব্ধির মান R বলিয়া লেখা যায়,

$$R^2=(3P)^2+(2P)^2+2.(3P).(2P).\cos\theta$$

বা, $R^2=13P^2+12P^2\cos\theta \quad \cdots \quad \text{(i)}$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, প্রথম বলটিকে দ্বিগুণ করিলে উহাদের লব্ধির মান দ্বিগুণ হয়। কাজেই,

$$(2R)^2=(6P)^2+(2P)^2+2.6P.2P.\cos\theta$$

বা, $4R^2=40P^2+24P^2\cos\theta$

বা, $R^2=10P^2+6P^2\cos\theta \quad \cdots \quad \text{(ii)}$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $13P^2+12P^2\cos\theta=10P^2+6P^2\cos\theta$

বা, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ বা, $\theta=120°$

উদাহরণ 3.3 P এবং Q বলের অন্তর্ভুক্ত কোণ α হইলে উহাদের লব্ধির মান হয় $5\sqrt{P^2+Q^2}$ এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ হইলে উহাদের লব্ধির মান হয় $3\sqrt{P^2+Q^2}$; প্রমাণ কর যে, $\tan\alpha=\frac{1}{3}$।

[If the angle between P and Q is α, their resultant is $5\sqrt{P^2+Q^2}$ and when the angle between them is $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, their resultant is $3\sqrt{P^2+Q^2}$, prove that $\tan\alpha=\frac{1}{3}$.]

সমাধান : যখন P এবং Q-এর মধ্যবর্তী কোণ α তখন উহাদের লব্ধি R_1 হইলে লেখা যায়,

$$R_1^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $R_1=5\sqrt{P^2+Q^2}$

কাজেই, সমীকরণ (i) হইতে পাই,

$$25(P^2+Q^2)=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$$

বা, $2PQ\cos\alpha=24(P^2+Q^2) \quad \cdots \quad \text{(ii)}$

যখন P এবং Q-এর মধ্যবর্তী কোণ $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ তখন উহাদের লব্ধি R_2 হইলে লেখা যায়,

$$R_2^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $R_2 = 3\sqrt{P^2+Q^2}$ বলিয়া সমীকরণ (iii) হইতে পাই,

$$9(P^2+Q^2) = P^2+Q^2+2PQ\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

বা, $2PQ\sin\alpha = 8(P^2+Q^2)$ ... (iv)

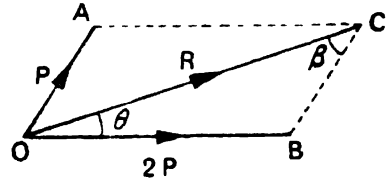
সমীকরণ (iv) এবং সমীকরণ (ii) হইতে লেখা যায়,

$$\frac{2PQ\sin\alpha}{2PQ\cos\alpha} = \frac{8(P^2+Q^2)}{24(P^2+Q^2)} \quad \text{বা, } \tan\alpha = \tfrac{1}{3}$$

উদাহরণ 3.4 একটি বিন্দুকণার উপর ক্রিয়াশীল দুইটি বলের একটির মান অপরটির দ্বিগুণ। উহাদের লব্ধি বল এবং বৃহত্তর বলটির মধ্যবর্তী কোণ θ হইলে দেখাও যে, θ-এর মান $\pi/6$ অপেক্ষা বেশি হইতে পারে না।

[The magnitude of one of the two forces acting on a particle is double that of the other. If the angle between their resultant and the greater force is θ, show that θ cannot be greater than $\pi/6$.]

সমাধান : মনে করি, ক্ষুদ্রতর বলটির মান P এবং বৃহত্তর বলটির মান 2P। ইহাদের লব্ধির মান R।

3.3 নং চিত্রে OA এবং OB যথাক্রমে P এবং 2P বলকে সূচিত করিতেছে। OACB সামান্তরিকের কর্ণ OC-ই হইল উক্ত বলদ্বয়ের লব্ধি।

চিত্র 3.3

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\angle COB = \theta$

ধরি, $\angle OCB = \beta$

$\triangle OCB$ হইতে লেখা যায়,

$$\frac{OB}{\sin\angle OCB} = \frac{BC}{\sin\angle COB} \quad \text{বা, } \frac{OB}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\theta}$$

বা, $\sin\theta = \frac{BC}{OB}\cdot\sin\beta$ বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\beta$ ... (i)

কিন্তু, $\sin\beta$-এর মান 1 অপেক্ষা বেশি হইতে পারে না।

অর্থাৎ, $\sin\beta \leqslant 1$ ... (ii)

(i) নং সমীকরণে (ii) নং শর্তটি প্রয়োগ করিয়া পাই,

$$\sin\theta \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{বা, } \theta \leqslant \sin^{-1}\tfrac{1}{2} \quad \text{বা, } \theta \leqslant \frac{\pi}{6}$$

সুতরাং, θ-এর মান $\pi/6$ অপেক্ষা বেশি হইতে পারে না।

উদাহরণ 3.5 একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P এবং Q বলের লব্ধির মান R ; Q-কে দ্বিগুণিত করিলে লব্ধি বলটিও দ্বিগুণিত হয়। আবার, Q বলকে বিপরীত-মুখী করিলেও লব্ধি বলের মান দ্বিগুণিত হয়। প্রমাণ কর যে,

$$P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$$

[The resultant of the two forces P and Q acting at a point is R. If Q is doubled, the resultant also gets doubled. If Q is reversed, then also, the resultant gets doubled. Prove that

$$P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}]$$

সমাধান : মনে করি, P এবং Q বলের অন্তর্বর্তী কোণ $= \alpha$

কাজেই, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$

বা, $R^2 - P^2 - Q^2 = 2PQ \cos \alpha$ ... (i)

Q-এর মান দ্বিগুণিত হইলে লব্ধির মানও দ্বিগুণিত হয় বলিয়া লেখা যায়,

$$(2R)^2 = P^2 + (2Q)^2 + 2.P.2Q.\cos \alpha$$

বা, $2R^2 - (P^2/2) - 2Q^2 = 2PQ \cos \alpha$ ... (ii)

আবার, Q বলকে বিপরীতমুখী করিলেও লব্ধির মান দ্বিগুণিত হয় বলিয়া,

$$(2R)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos (180^\circ - \alpha)$$

বা, $P^2 + Q^2 - 4R^2 = 2PQ \cos \alpha$ ... (iii)

সমীকরণ (i) এবং (iii) হইতে α অপনয়ন করিয়া পাই,

$$2P^2 + 2Q^2 - 5R^2 = 0 \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

আবার, সমীকরণ (ii) এবং (iii) হইতে α অপনয়ন করিয়া পাই,

$$P^2 + 2Q^2 - 4R^2 = 0 \quad \cdots \quad \text{(v)}$$

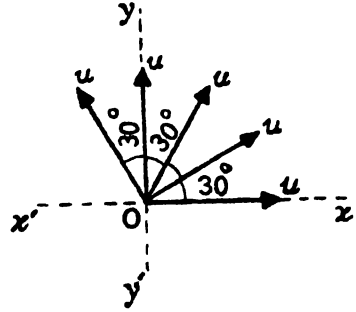
সমীকরণ (iv) এবং (v) হইতে বজ্রগুণন করিয়া পাই,

$$\frac{P^2}{-8+10} = \frac{Q^2}{-5+8} = \frac{R^2}{4-2} \quad \text{বা,} \quad \frac{P^2}{2} = \frac{Q^2}{3} = \frac{R^2}{2}$$

$$\text{বা} \quad \frac{P}{\sqrt{2}} = \frac{Q}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad \text{বা,} \quad P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$$

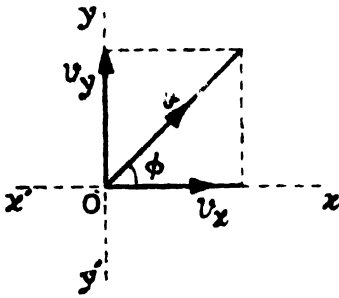
উদাহরণ 3.6 একটি কণার যুগপৎ পাঁচটি গতিবেগ রহিয়াছে ; ইহাদের প্রতিটির মান u-এর সমান এবং প্রতিটি পাশেরটির সহিত 30° কোণে আনত, যাহাতে প্রথম ও শেষ গতিবেগের মধ্যবর্তী কোণ 120°। কণাটির লব্ধি গতিবেগ নির্ণয় কর।

[A particle possesses simultaneously five velocities, each equal to u and inclined to the next at an angle of 30°, so that the angle between the first and the last is 120°. Find the resultant velocity of the particle.]

সমাধান : মনে করি, প্রথম গতিবেগটি x অভিমুখে ক্রিয়াশীল (চিত্র 3.4)। সুতরাং, প্রশ্নের শর্তানুসারে, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ ও পঞ্চম গতিবেগগুলি x-অক্ষের সহিত যথাক্রমে 30°, 60°, 90° এবং 120° কোণে আনত।

চিত্র 3.4

এখন, লব্ধি গতিবেগের x-উপাংশ,

$$v_x=u+u\cos 30^\circ+u\cos 60^\circ+u\cos 90^\circ+u\cos 120^\circ$$

$$=u\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}\right]=u\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

চিত্র 3.5

আবার, লব্ধি গতিবেগের y-উপাংশ,

$$v_y=u\sin 0^\circ+u\sin 30^\circ+u\sin 60^\circ+u\sin 90^\circ+u\sin 120^\circ$$

$$=u\left[0+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$=u[\tfrac{3}{2}+\sqrt{3}]=\sqrt{3}u\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{(ii)}$$

∴ লব্ধি গতিবেগ-এর মান,

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

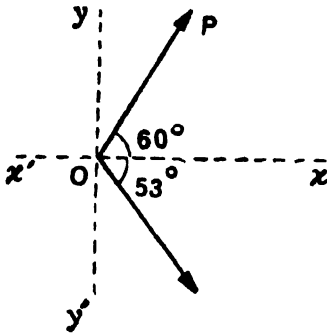
$$=\sqrt{\left\{u\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2+\left\{\sqrt{3}u\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2}=(2+\sqrt{3})u$$

লব্ধি গতিবেগ x-অক্ষের সহিত ϕ কোণে আনত থাকিলে লেখা যায় যে,

$$\tan\phi=\frac{v_y}{v_x}=\sqrt{3} \quad \therefore \quad \phi=60^\circ$$

উদাহরণ 3.7 একটি বিন্দুতে দুইটি বল P এবং Q ক্রিয়া করে। P-এর মান 8 lb-wt এবং ইহার অভিমুখ নির্দেশ-তন্ত্রের প্রথম পাদে x-অক্ষের উপরে 60° কোণে আনত। Q বলের মান হইল 5 lb-wt এবং ইহার অভিমুখ চতুর্থ পাদে x-অক্ষের নিচের দিকে 53° কোণে আনত। (a) ইহাদের লব্ধির অনুভূমিক এবং উল্লম্ব উপাংশের মান কত ? (b) লব্ধি বলটির মান কত ? (c) ভেক্টর অন্তর (P−Q)-এর মান কত ?

[Two forces P and Q act at a point. The magnitude of P is 8 lb-wt and its direction is 60° above the x-axis in the first

quadrant of the coordinate system. The magnitude of the force Q is 5 lb-wt and its direction is 53° below the x-axis in the fourth quadrant. (a) What are the horizontal and vertical components of the resultant of the two forces? (b) What is the magnitude of the resultant force? (c) What is the magnitude of the vector difference (P–Q)?]

চিত্র 3.6

সমাধান : (a) 3.6 নং চিত্রানুসারে, লব্ধি বল R-এর x-উপাংশ বা অনুভূমিক উপাংশ,

$$R_x = P_x + Q_x = P\cos 60° + Q\cos 53° = 8\times0{\cdot}5 + 5\times0{\cdot}6018$$
$$= 4 + 3{\cdot}009 = 7{\cdot}009 \text{ lb-wt}$$

লব্ধি বলের y-উপাংশ, বা উল্লম্ব উপাংশ, $R_y = P\sin 60° - Q\sin 53°$

$$= 8\times0{\cdot}867 - 5\times0{\cdot}7986 = 6{\cdot}936 - 3{\cdot}993 = 2\ 943 \text{ lb-wt}$$

(b) লব্ধি বলের মান, $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(7{\cdot}009)^2 + (2{\cdot}943)^2}$

$$= \sqrt{49{\cdot}1261 + 8{\cdot}6612} = 7{\cdot}602 \text{ lb-wt}$$

(c) (P – Q)-এর x-উপাংশ,

$$R_x' = P\cos 60° - Q\cos 53° = 8\times0{\cdot}5 - 5\times0{\cdot}6018$$
$$= 1{\cdot}00 \text{ lb-wt (প্রায়)}$$

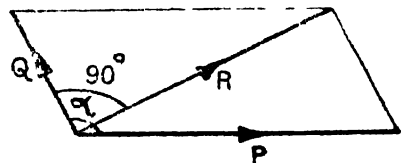
(P – Q)-এর y-উপাংশ, $R_y' = P\sin 60° + Q\sin 53°$

$$= 8\times0{\cdot}867 + 5\times0{\cdot}7986 = 6{\cdot}936 + 3{\cdot}993 = 10{\cdot}929$$

(P – Q)-এর মান, $R' = \sqrt{R_x'^2 + R_y'^2}$

$$= \sqrt{(10{\cdot}929)^2 + (1{\cdot}00)^2} = \sqrt{120{\cdot}443} = 10{\cdot}97 \text{ lb-wt}$$

উদাহরণ 3.8 একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের মানের সমষ্টি 18 dyn এবং ইহাদের লব্ধির মান 12 dyn ; ইহা ক্ষুদ্রতর বলটির সহিত সমকোণে অবস্থিত। বল দুইটির মান নির্ণয় কর।

[The sum of the magnitudes of two forces is 18 dyn. The magnitude of their resultant is 12 dyn. If the resultant is inclined at a right-angle with the smaller of the two forces, find their magnitudes.]

চিত্র 3.7

সমাধান : মনে করি, বল দুইটির মান P এবং Q (P > Q) এবং ইহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ ∠।

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $P+Q=18$ dyn ... (i)

লব্ধি বলটি Q-এর সহিত 90° কোণে আনত বলিয়া লেখা যায়,

$$\tan 90^\circ = \frac{Q \sin \alpha}{Q+P\cos\alpha} \quad \text{বা,} \quad Q+P\cos\alpha=0 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

P এবং Q-এর লব্ধি R হইলে লেখা যায়,

$$R^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha = (Q+P\cos\alpha)^2+P^2\sin^2\alpha \cdots \text{(iii)}$$

সমীকরণ (ii) এবং (iii) হইতে পাই, $R^2 = P^2\sin^2\alpha$ ... (iv)

আবার সমীকরণ (ii) হইতে লেখা যায়, $P\cos\alpha = -Q$

$$\text{বা,} \quad Q^2 = P^2\cos^2\alpha \quad \cdots \quad \text{(v)}$$

সমীকরণ (iv) এবং (v) যোগ করিয়া পাই,

$$P^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) = Q^2+R^2$$

$$\text{বা,} \quad P^2 = Q^2+R^2 = Q^2+12^2 \quad [\because \quad R=12 \text{ dyn}]$$

সমীকরণ (i) হইতে $P=18-Q$ বলিয়া লেখা যায়,

$$(18-Q)^2 = Q^2+12^2$$

$$\text{বা,} \quad 324-36Q=144 \quad \text{বা,} \quad Q=5 \text{ dyn}$$

$$\therefore \quad P=18-Q=18-5=13 \text{ dyn}$$

উদাহরণ 3.9 একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান যথাক্রমে 29 নিউটন ও 5 নিউটন। যদি উভয় বলের মান 3 নিউটন বৃদ্ধি করা হয় এবং যদি এই দুই নূতন বল পরস্পরের সহিত 90° কোণে আনত অবস্থায় ক্রিয়া করে তাহা হইলে ইহাদের লব্ধি কত হইবে ?

[The greatest and the least resultant of two forces acting at a point are 29 N and 5 N respectively. If each force is increased by 3 N, find the resultant of the two new forces acting at a point and making angle of 90° with each other.]

সমাধান : মনে করি, বলদ্বয়ের প্রাথমিক মান P এবং Q $(P>Q)$।

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $P+Q=29$ নিউটন ... (i)

$P-Q=5$ নিউটন ... (ii)

কাজেই, (i) এবং (ii) নং সমীকরণ সমাধান করিয়া পাই,

$P=17$ নিউটন এবং $Q=12$ নিউটন

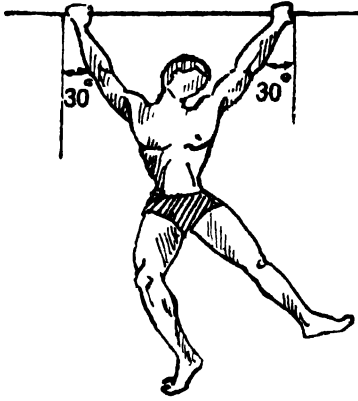
উভয় বলের মান 3 নিউটন বৃদ্ধি করিলে নূতন ভেক্টরদ্বয়ের মান হইবে

$P'=P+3=17+3=20$ নিউটন,

এবং $Q'=Q+3=12+3=15$ নিউটন

ইহারা পরস্পর 90° কোণে কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করিলে উহাদের লব্ধির মান,

$$R=\sqrt{P'^2+Q'^2}=\sqrt{20^2+15^2}=25 \text{ নিউটন}$$

উদাহরণ 3.10 160 lb-wt ওজন-বিশিষ্ট এক ব্যক্তি দুই হাতে একটি অনুভূমিক দণ্ড ধরিয়া ঝুলিতেছে। তাহার প্রতিটি বাহু উল্লম্বরেখার সহিত 30° কোণ করিয়া আছে (চিত্র 3.8)। ঐ ব্যক্তির প্রতিটি বাহু কী বল প্রয়োগ করিতেছে ?

চিত্র 3.8

[A man weighing 160 lb-wt is hanging from a horizontal bar. Each arm of the man makes an angle of 30° with the vertical (Fig. 3.8). What is the pull exerted by each arm ?]

সমাধান : মনে করি, প্রতিটি বাহুতে T টান ক্রিয়া করিতেছে। শর্তানুসারে, দুই বাহুর টানই উল্লম্বরেখার সহিত 30° কোণে আনত রহিয়াছে (চিত্র 3.9)। উল্লম্ব অভিমুখে ব্যক্তিটির সাম্য বিবেচনা করিয়া লেখা যায় যে,

চিত্র 3.9

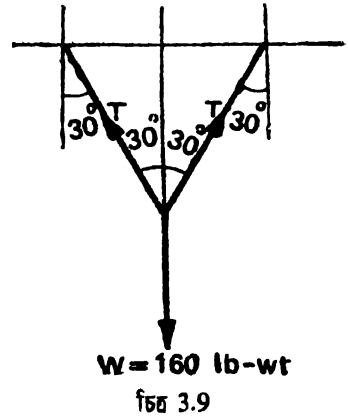
ব্যক্তির ওজন, W = দুই বাহুর টান T-এর লব্ধির উল্লম্ব উপাংশ

$$= T\cos 30^\circ + T\cos 30^\circ$$

বা, $W = 2T\cos 30^\circ$

বা, $T = \dfrac{W}{2\cos 30^\circ} = \dfrac{160}{2\times\sqrt{3}/2}$

$$\times\frac{160}{\sqrt{3}}\text{lb-wt}$$

বা, $T = 92{\cdot}38$ lb-wt (প্রায়)

উদাহরণ 3.11 10 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে দুইটি তারের সাহায্যে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল, ইহাদের মধ্যে একটি তার অনুভূমিক এবং অপরটি উল্লম্ব রেখার সহিত 45° কোণে আনত। তার দুইটির টান নির্ণয় কর।

[A body of mass 10 kg is suspended by two strings, one horizontal and the other making an angle of 45° with the vertical. Find the tension in each string.

সমাধান : মনে করি, অনুভূমিক তারের টান T_1 এবং উল্লম্ব রেখার সহিত 45° কোণে আনত তারের টান T_2 (চিত্র 3.10)। T_1 এবং T_2-টানের ক্রিয়ায় বস্তুটি সাম্যে আছে।

উল্লম্ব অভিমুখে বস্তুটির সাম্য বিবেচনা করিয়া লেখা যায়,

$$T_1 = T_2 \sin 45^\circ$$

বা, $T_1 = T_2/\sqrt{2}$ ... (i)

অনুরূপভাবে, উল্লম্ব অভিমুখে বস্তুটির সাম্য বিবেচনা করিয়া লেখা যায়,

$$T_2 \cos 45^\circ = W$$

বা, $T_2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 10$ kg-wt

বা, $T_2 = 10\sqrt{2}$ kg-wt

(i) নং সমীকরণে T_2-এর এই মান বসাইয়া পাই,

$T_1 = T_2/\sqrt{2} = 10$ kg-wt

চিত্র 3.10

চিত্র 3.11

উদাহরণ 3.12 দুইটি বস্তুকণা যথাক্রমে u এবং $2u$ বেগে পরস্পর 60° কোণে আনত অবস্থায় চলিতেছে। একটি কণার সাপেক্ষে অপরটির আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় কর।

[Two particles moving with velocities u and $2u$ are inclined at an angle 60°. Find the relative velocity of one with respect to the other.] (H. S. 1979)

সমাধান : মনে করি, প্রথম বস্তুকণার সাপেক্ষে দ্বিতীয় কণার আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করিতে হইবে। 3.3 নং চিত্রে প্রথম কণার বেগকে OA রেখার দ্বারা এবং দ্বিতীয় কণার বেগকে OB রেখার দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে। OC রেখাটি প্রথম কণার সমান ও বিপরীতমুখী বেগ নির্দেশ করে। স্পষ্টতই, OC এবং OB ভেক্টরদ্বয়ের যোগফলই প্রথম কণার সাপেক্ষে দ্বিতীয় কণার আপেক্ষিক বেগ। ইহা OD রেখা দ্বারা সূচিত হইয়াছে। এই আপেক্ষিক বেগের মান v হইলে লেখা যায়,

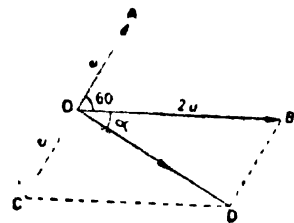
$$v^2 = u^2 + (2u)^2 + 2.\, u.\, 2u.\, \cos(180^\circ - 60^\circ)$$

বা, $v^2 = u^2 + 4u^2 + 4u^2 \cos 120^\circ$

বা, $v^2 = u^2 + 4u^2 + 4u^2 \times (-\frac{1}{2})$

বা, $v = \sqrt{3}\,u$

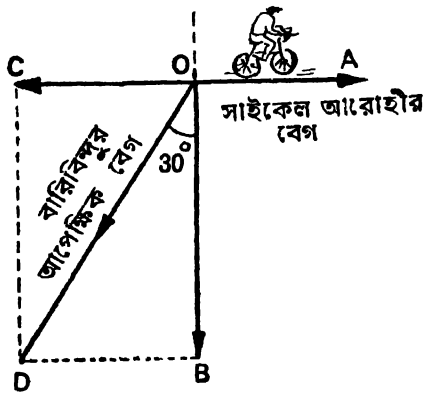
চিত্র 3.12

দ্বিতীয় কণার প্রকৃত বেগের সহিত এই আপেক্ষিক বেগ α কোণ করিলে লেখা যায়,

$$\tan \alpha = \frac{u \sin(180° - 60°)}{2u + u \cos(180° - 60°)}$$

$$= \frac{u \times \sin 120°}{2u + u \cos 120°} = \frac{u \times (\sqrt{3}/2)}{2u - u \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{u \times (\sqrt{3}/2)}{\frac{3}{2}u} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

সুতরাং, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$

উদাহরণ 3.13 বৃষ্টির জলের ফোঁটাগুলি উল্লম্বভাবে 3 m/s গতিবেগে পড়িতেছে। জনৈক সাইকেল-আরোহী ভূমির উপর দিয়া কত বেগে সাইকেল চালাইলে বৃষ্টির ফোঁটাগুলি তাহার গায়ে উল্লম্ব রেখার সহিত 30° কোণে আঘাত করে? সাইকেল-আরোহীর সাপেক্ষে বৃষ্টির জলের ফোঁটার আপেক্ষিক বেগ কত?

[Drops of rain are falling vertically downwards with a velocity of 3 m/s. With what velocity must a cyclist move on the ground so that the drops strike him at 30° with the vertical? What is the relative velocity of the rain-drops with respect to the cyclist?]

চিত্র 3.13

সমাধান : মনে করি, $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরটি সাইকেল-আরোহীর গতিবেগ এবং $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরটি বারিবিন্দুর গতিবেগ নির্দেশ করিতেছে (চিত্র 3.13)। $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরের সমান ও বিপরীতমুখী ভেক্টর $\overrightarrow{OC}$ সাইকেল-আরোহীর গতিবেগের সমান ও বিপরীতমুখী গতিবেগ নির্দেশ করিতেছে। সুতরাং, $\overrightarrow{OB}$ এবং $\overrightarrow{OC}$ গতিবেগ-ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধিই সাইকেল-আরোহীর সাপেক্ষে বারিবিন্দুর আপেক্ষিক বেগ। OB এবং OC রেখাকে সন্নিহিত বাহু ধরিয়া OBDC সামান্তরিক অঙ্কন করা হইল। ভেক্টরের সামান্তরিক সূত্রানুসারে এই সামান্তরিকের কর্ণ OD-ই সাইকেল-আরোহীর সাপেক্ষে বারিবিন্দুর আপেক্ষিক গতিবেগ নির্দেশ করিতেছে।

প্রশ্নের শর্তানুসারে, OB = 3 m/s এবং $\angle BOD = 30°$

সুতরাং, $\frac{BD}{OB} = \tan 30°$.

$\therefore \quad BD = OB \tan 30^\circ$ বা, $BD = 3 . \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ m/s

কিন্তু, BD=OC=OA=সাইকেল-আরোহীর গতিবেগ।

কাজেই, সাইকেল-আরোহীর গতিবেগ= $\sqrt{3}$ m/s

সাইকেল-আরোহীর সাপেক্ষে বারিবিন্দুর আপেক্ষিক গতিবেগ

$$OD = \frac{OD}{OB} . OB = OB \sec 30^\circ = 3 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

উদাহরণ 3.14 ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে চলমান এক ব্যক্তির নিকট মনে হয় যে, বৃষ্টি উল্লম্বভাবে পড়িতেছে। বৃষ্টির আপাত বেগ ঘণ্টায় $4\sqrt{3}$ মাইল হইলে প্রকৃত গতিবেগের মান ও অভিমুখ নির্ণয় কর।

[To a man walking at a rate of 4 miles an hour, rain appears to fall vertically. If the apparent velocity of rain is $4\sqrt{3}$ miles an hour, find the magnitude and direction of its real velocity.]

সমাধান ঃ মনে করি, চলমান ব্যক্তির গতিবেগকে OA ভেক্টর দ্বারা, এবং বারিবিন্দুর প্রকৃত গতিবেগকে OB ভেক্টর দ্বারা নির্দেশ করা হইয়াছে। OC ভেক্টরটি চলমান ব্যক্তির গতিবেগের সমান ও বিপরীতমুখী গতিবেগ নির্দেশ করে। স্পষ্টতই, OC এবং OB ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি OD-ই (চিত্র 3.14) চলমান ব্যক্তির সাপেক্ষে বারিবিন্দুর আপেক্ষিক গতিবেগ।

চিত্র 3.14

প্রশ্নের শর্তানুসারে, OD রেখাটি উল্লম্ব। কাজেই OD রেখাটি OA এবং DB রেখার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত।

কাজেই, বারিবিন্দুর প্রকৃত গতিবেগের মান $= OB = \sqrt{OD^2 + DB^2}$

কিন্তু, $OD = 4\sqrt{3}$ mi/h এবং

$DB = OA = 4$ mi/h

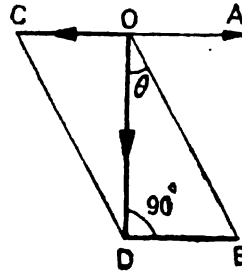
$\therefore \quad OB = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (4)^2} = 8$ mi/h

বারিবিন্দুর প্রকৃত গতিবেগের অভিমুখ উল্লম্বরেখার সহিত θ কোণে আনত থাকিলে (চিত্র 3.14) লেখা যায়,

$$\tan\theta = \frac{BD}{OD} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ বা, } \theta = 30^\circ$$

সুতরাং, বারিবিন্দুর প্রকৃত গতিবেগের মান ঘণ্টায় 8 মাইল এবং ইহার অভিমুখ উল্লম্ব রেখার সহিত 30° কোণে আনত।

উদাহরণ 3.15 ঘণ্টায় 40 মাইল বেগে দক্ষিণ দিকে চলমান একটি মোটর-গাড়ির চালকের মনে হইতেছে যে, পশ্চিমদিক হইতে পূর্বদিকে বায়ু বহিতেছে। মোটরগাড়ির বেগ কমিয়া ঘণ্টায় 20 মাইল হইলে চালকের মনে হয় যে, উত্তর-

পশ্চিম দিক হইতে বায়ু বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ এবং ইহার অভিমুখ নির্ণয় কর।

[To the driver of a car moving southward with a velocity of 40 miles an hour, the wind appears to blow from west to east. But when the speed of the car is reduced to 20 miles an hour, it appears to the driver that the wind is blowing from north-west direction. Find the real velocity of wind and its direction.

সমাধান ঃ মনে করি, প্রথম ক্ষেত্রে মোটরগাড়ির বেগ [ঘণ্টায় 40 মাইল] OA রেখার দ্বারা এবং চালকের সাপেক্ষে বায়ুর তৎকালীন আপাত বেগ OB রেখার দ্বারা সূচিত হইয়াছে (চিত্র 3.15)।

OA এবং OB বাহুর সাহায্যে OACB সামান্তরিকটি অঙ্কন করা হইল। এই সামান্তরিকের কর্ণ OC-ই বায়ুর প্রকৃত বেগ নির্দেশ করিতেছে।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, মোটরের গতিবেগ [ঘণ্টায় 20 মাইল] OD রেখার দ্বারা সূচিত হইয়াছে। OD রেখার সমান ও বিপরীত-মুখী OD′ রেখা অঙ্কন করা হইল। OD′ এবং OC রেখাকে সন্নিহিত বাহু ধরিয়া OD′EC সামান্তরিক অঙ্কন করা হইল। স্পষ্টতই, OE রেখা এক্ষেত্রে চালকের সাপেক্ষে বায়ুর আপাত বেগ বা আপেক্ষিক বেগ। প্রশ্নের শর্তানুসারে, OE রেখার অভিমুখ দক্ষিণ-পূর্ব দিকে,

চিত্র 3.15

অর্থাৎ, $\angle BOE = 45^\circ$

অতএব, $OB = BE$

আবার, $BE = BC - EC$

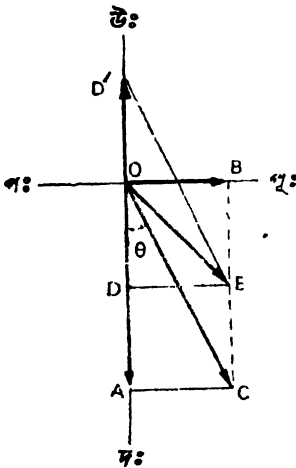
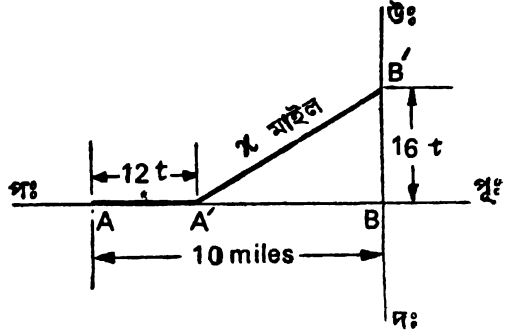
$= BC - DA$

কিন্তু, $OA = BC = 40$ মাইল/ঘণ্টা, এবং $DA = OD = 20$ মাইল/ঘণ্টা $\therefore$ $OB = BE = (40-20) = 20$ মাইল/ঘণ্টা

$\therefore$ বায়ুর প্রকৃত বেগ, $OC = \sqrt{OB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{20^2 + 40^2} = 20\sqrt{5}$ মাইল/ঘণ্টা

বায়ুর প্রকৃত গতিবেগ উত্তর-দক্ষিণ রেখার সহিত পূর্বদিকে θ কোণ করিয়া থাকিলে লেখা যায়,

$$\tan\theta = \frac{AC}{OA} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \quad \text{বা, } \theta = 26{\cdot}6^\circ$$

উদাহরণ 3.16 কোন নির্দিষ্ট মুহূর্তে একটি জাহাজ A অপর একটি জাহাজ B হইতে 10 মাইল পশ্চিমে রহিয়াছে। A জাহাজটি ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে পূর্ব দিকে চলিতেছে এবং B-জাহাজটি ঘণ্টায় 16 মাইল বেগে উত্তর দিকে চলিতেছে। জাহাজ দুইটি কখন সর্বাপেক্ষা নিকটবর্তী হইবে? এই সময় জাহাজদ্বয়ের দূরত্ব কত হইবে?

চিত্র 3.16

[A ship A is 10 miles west of another ship B at an instant of time. The ship A is sailing due east at the rate of 12 miles per hour and the ship B is sailing due north at the rate of 16 miles per hour. When will they be nearest to each other? What will be the distance between the ships at that time?]

সমাধান ঃ মনে করি, 3.16 নং চিত্রে A এবং B অক্ষর দ্বারা A-জাহাজ এবং B-জাহাজের প্রাথমিক অবস্থান সূচিত করা হইয়াছে। t ঘণ্টা পরে A-জাহাজটি উহার পূর্বাবস্থান হইতে $12t$ মাইল পশ্চিমে এবং B-জাহাজটি উহার পূর্বাবস্থান হইতে $16t$ মাইল উত্তর দিকে আসিবে।

t ঘণ্টা পর জাহাজদ্বয়ের অবস্থানকে চিত্রে A′ এবং B′ দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে। t ঘণ্টা পর জাহাজদ্বয়ের দূরত্ব, $x = A'B'$ ... (i)

এখন, $A'B = AB - AA' = (10 - 12t)$ মাইল

এবং $BB' = 16t$ মাইল

∴ সমীকরণ (i) হইতে পাই,

$$x^2 = A'B'^2 = A'B^2 + BB'^2 = (10 - 12t)^2 + (16t)^2$$
$$= 100 - 240t + 144t^2 + 256t^2 = 400t^2 - 240t + 100$$
$$= (20t)^2 - 2.6.20t + 36 + 64 = (20t - 6)^2 + 64 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (ii) হইতে দেখা যাইতেছে যে, x-এর মান ন্যূনতম হইতে হইলে $(20t - 6) = 0$ হইবে।

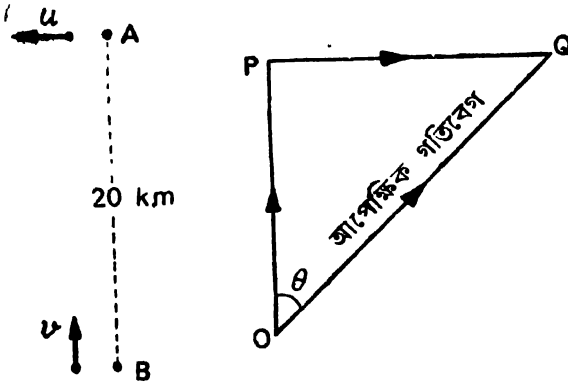
কাজেই, জাহাজদ্বয় যে-সময় পর সর্বাপেক্ষা নিকটবর্তী হইবে তাহার মান,

$t = \frac{6}{20} = 0{\cdot}3$ ঘণ্টা $= 18$ মিনিট

এই সময়, $x^2 = 64$ ∴ $x = 8$ মাইল

অর্থাৎ, জাহাজদ্বয়ের সর্বনিম্ন দূরত্ব 8 মাইল।

উদাহরণ 3.17 দুইটি জাহাজ উত্তর-দক্ষিণ রেখা বরাবর পরস্পর হইতে

20 km দূরে অবস্থিত। যে-জাহাজটি উত্তরে রহিয়াছে, সেই জাহাজটি ঘণ্টায় 20 কিলোমিটার বেগে পশ্চিমদিকে চলিতেছে, অপর জাহাজটি ঘণ্টায় 20 কিলোমিটার বেগে উত্তরদিকে চলিতেছে। (i) জাহাজদ্বয় যখন পরস্পর হইতে সর্বাপেক্ষা কাছাকাছি আসে তখন উহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? (ii) পরস্পর সর্বনিম্ন দূরত্বে আসিতে উহারা কত সময় লইবে?

(a) চিত্র 3.17 (b)

[Two ships are 20 km apart on a line running north to south. The one further north is steaming westward at 20 km/h. The other is steaming northward at 20 km/h. (i) What is their distance of closed approach? (ii) How long will it take to reach it?]

সমাধান : মনে করি, দুইটি জাহাজের একটির প্রাথমিক অবস্থান A এবং অপরটির প্রাথমিক অবস্থান B। A জাহাজটি ঘণ্টায় 20 কিলোমিটার বেগে পশ্চিমদিকে এবং B জাহাজটি ঘণ্টায় 20 কিলোমিটার বেগে উত্তর দিকে চলিতেছে (চিত্র 3.17 a)। A জাহাজের গতিবেগকে $\vec{u}$ এবং B জাহাজের গতিবেগকে $\vec{v}$ দ্বারা সূচিত করা হইল। এখন, A জাহাজের সাপেক্ষে B জাহাজের আপেক্ষিক গতিবেগ,

$$\vec{v}_{BA}=\vec{v}-\vec{u}=\vec{v}+(-\vec{u})$$

মনে করি, 3.17 b চিত্রে OP রেখাটি B জাহাজের গতিবেগ $(\vec{v})$ সূচিত করে এবং PQ রেখাটি A জাহাজের সমান ও বিপরীতমুখী গতিবেগ $(-\vec{u})$ সূচিত করে। ভেক্টরের ত্রিভুজ-সূত্র অনুসারে, OQ রেখাটি A জাহাজের সাপেক্ষে B জাহাজের গতিবেগ নির্দেশ করে। প্রশ্নের শর্তানুসারে,

$OP=|\vec{u}|=20$ km/h এবং $PQ=|\vec{v}|=20$ km/h

OPQ ত্রিভুজটি সমকোণী বলিয়া লেখা যায়,

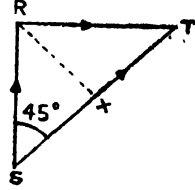
$$OQ=\sqrt{OP^2+PQ^2}=\sqrt{20^2+20^2}=28{\cdot}28 \text{ km/h}$$

3.17 b নং চিত্রানুসারে,

$$\tan\ \theta=\frac{PQ}{OP}=\frac{20}{29}=1 \text{ বা, } \theta=45^\circ$$

কাজেই A জাহাজের সাপেক্ষে B জাহাজটি ST অভিমুখে চলে, এই ST রেখাটি উত্তর-দক্ষিণ-রেখা SR-এর সহিত 45° কোণ করিয়া রহিয়াছে [চিত্র 3.18]।

চিত্র 3.18

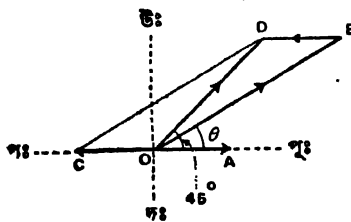
এইবার মনে করা যাক যে, প্রথম জাহাজটি R অবস্থানে স্থির রহিয়াছে এবং অপর জাহাজটি S হইতে যাত্রা শুরু করিয়া আপেক্ষিক গতিবেগ লইয়া ST পথে 28·28 km/h গতিবেগে চলিতেছে। স্পষ্টতই, ইহাদের ন্যূনতম দূরত্ব RX, এখানে RX রেখাটি R বিন্দু হইতে ST রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব।

$$RX=SR\ \sin 45^\circ=20\ \sin 45^\circ=\frac{20}{\sqrt{2}}=14{\cdot}14 \text{ km}$$

ইহাই জাহাজদ্বয়ের ন্যূনতম দূরত্ব। দ্বিতীয় জাহাজটি আপেক্ষিক বেগ লইয়া SX পথ অতিক্রম করিতে যে-সময় লইবে তাহার মান,

$$t=\frac{SX}{28{\cdot}28}=\frac{SR\ \cos 45^\circ}{28{\cdot}28}=\frac{20\ \cos 45^\circ}{28{\cdot}28}=\frac{1}{2}\text{h}$$

উদাহরণ 3.18 একটি স্টীমার ঘণ্টায় u মাইল বেগে পূর্বদিকে চলিতেছে। দ্বিতীয় একটি স্টীমার ঘণ্টায় $2u$ মাইল বেগে পূর্বদিকের সহিত θ-কোণ উত্তরে চলিতেছে। প্রথম স্টীমারের জনৈক আরোহীর মনে হইতেছে যে, দ্বিতীয় স্টীমারটি উত্তর-পূর্ব দিকে যাইতেছে। দেখাও যে, $\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$।

[A steamer is travelling due East at a rate of u miles an hour. A second steamer is travelling at a rate of $2u$ miles an hour along a direction θ North of East, and appears to be travelling North-East to a passenger on the first steamer. Prove that $\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$.]

সমাধান: 3.19 নং চিত্রে প্রথম স্টীমারের বেগকে OA ভেক্টর দ্বারা এবং দ্বিতীয় স্টীমারের বেগকে OB ভেক্টর দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে। OC ভেক্টরটি হইল OA ভেক্টরের সমান এবং বিপরীতমুখী। OB এবং OC ভেক্টরের লব্ধি OD ভেক্টরই প্রথম স্টীমারের সাপেক্ষে দ্বিতীয় স্টীমারের আপেক্ষিক বেগ। প্রশ্নের শর্তানুসারে, OD ভেক্টরটি OA অভিমুখের সহিত 45° কোণে আনত।

চিত্র 3.19

△OBD হইতে লেখা যায়,

$$\frac{BD}{\sin\angle DOB}=\frac{OB}{\sin\angle ODB}$$

এখন, $\angle DOB=(45^\circ-\theta)$ এবং $\angle ODB=(180^\circ-45^\circ)$ বলিয়া লেখা যায়,

$$\frac{BD}{\sin(45^\circ-\theta)}=\frac{OB}{\sin(180^\circ-45^\circ)}$$

বা, $\dfrac{\sin(45^\circ-\theta)}{\sin(180^\circ-45^\circ)}=\dfrac{BD}{OB}$ বা, $\dfrac{\sin(45^\circ-\theta)}{\sin 45^\circ}=\dfrac{u}{2u}=\dfrac{1}{2}$

বা, $\sin(45^\circ-\theta)=\frac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ বা, $\sin 45^\circ\cos\theta-\cos 45^\circ\sin\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta-\sin\theta)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ বা, $2(\cos\theta-\sin\theta)=1$

উভয় পার্শ্বের বর্গ করিয়া পাই, $4(\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta)=1$

বা, $4(1-\sin 2\theta)=1$ বা, $\sin 2\theta=\frac{3}{4}$ বা, $\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

উদাহরণ 3.20 $P=10i-12j+16k$ ভেক্টরটির মান নির্ণয় কর।
$Q=4i+5j-12k$ হইলে P এবং Q-এর লব্ধির মানও নির্ণয় কর।

[Find the magnitude of the vector $P=10i-12j+16k$. Find also the magnitude of the resultant of the vector P and Q, where $Q=4i+5j-12k$.]

সমাধান : $P=10i-12j+16k$

কাজেই, P ভেক্টরটির মান $=|P|$

$$=\sqrt{10^2+12^2+16^2}=\sqrt{500}=24{\cdot}49 \text{ units}$$

এখন, $Q=4i+5j-12k$

কাজেই, P এবং Q ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি=

$P+Q=i(10+4))+j(-12+5)+(16-12)k=14i-7j+4k$

$\therefore$ (P + Q)-বলের লব্ধির মান $=|P+Q|$

$$=\sqrt{(14)^2+(7)^2+4^2}=\sqrt{196+49+16}=\sqrt{261}=16{\cdot}16 \text{ units}$$

উদাহরণ 3.21 ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, যে-কোন ত্রিভুজের দুইটির সংলগ্ন বাহুর মধ্যবিন্দুগামী সরলরেখাটি তৃতীয় বাহুটির সমান্তরাল এবং অর্ধেক।

[Show by vector method that the line joining the middle points of two adjacent sides of a triangle is parallel and half the third side.

সমাধান : মনে করি, $\overline{AB}$ রেখাটি P ভেক্টর এবং $\overline{AC}$ রেখাটি Q ভেক্টর নির্দেশ করে।

অর্থাৎ, $\overline{AB}=P$ এবং $\overline{AC}=Q$

ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্র হইতে আমরা জানি যে,

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$

বা, $\overline{BC}=-\overline{CA}-\overline{AB}$

বা, $\overline{BC}=(Q-P)$ ... (i)

এখন, D এবং E বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে AB এবং AC রেখার মধ্যবিন্দু বলিয়া লেখা যায়,

$$\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}P$$

$$\text{এবং } \overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}Q$$

পুনরায় ভেক্টরের ত্রিভুজ-সূত্র প্রয়োগ করিয়া পাই,

$\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EA}=0$

বা, $\overline{DE}=-\overline{EA}-\overline{AD}$

বা, $\overline{DE}=\frac{1}{2}(Q-P)$ ... (ii)

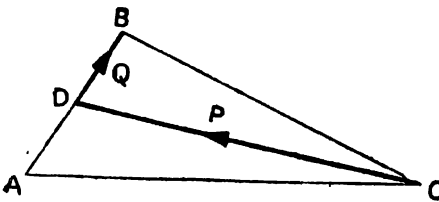
চিত্র 3.20

(i) এবং (ii) হইতে লেখা যাইতেছে যে, $\overline{BC}$ এবং $\overline{DE}$ একই ভেক্টর (Q – P)-এর সমানুপাতিক। কাজেই BC এবং DE রেখা পরস্পর সমান্তরাল।

আবার, (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AB}$$

কাজেই, DE রেখার দৈর্ঘ্য AB বাহুর দৈর্ঘ্যের অর্ধেক।

উদাহরণ 3.22 ABC ত্রিভুজে D হইল AB বাহুর মধ্যবিন্দু (চিত্র 3.21)। CD এবং DB রেখাদ্বয় যথাক্রমে P এবং Q ভেক্টর নির্দেশ করে। তাহা হইলে (i) CB, (ii) AD, (iii) DA, (iv) AB এবং (v) CA—এই দিকনির্দেশী রেখাগুলিকে P এবং Q ভেক্টর দুইটির সাহায্যে প্রকাশ কর।

[In the triangle ABC (Fig 3.21), D is the midpoint of the side AB. The directed lines CD and DB represent the vectors P and Q respectively. Express each of the following directed line segments in terms of the vectors P and Q : (i) CB, (ii) AC, (iii) DA, (iv) AB and (v) CA.]

চিত্র 3.21

সমাধান ঃ (i) ভেক্টরের ত্রিভুজ-সূত্র-অনুসারে লেখা যায়,

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$$

বা, $\overrightarrow{CB}=P+Q$

(ii) AB রেখার AD অংশ এবং DB অংশ পরস্পর সমান, কেননা D বিন্দুটি AB রেখার মধ্যবিন্দু। আবার $\vec{AD}$ ভেক্টরের অভিমুখ $\vec{DB}$ ভেক্টরের অভিমুখ সমান। কাজেই লেখা যায়,

$$\vec{AD} = \vec{DB} = Q$$

(iii) এখন, $\vec{AD} = -\vec{DA} = -Q$

(iv) আবার, $\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DB} = Q + Q = 2Q$

(v) ত্রিভুজ-সূত্র-অনুসারে, $\vec{CA} = \vec{CD} + \vec{DA} = P - Q$

প্রশ্নমালা 3

1. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বল P এবং 2P-এর লব্ধি P-বলের সহিত সমকোণে আনত। উক্ত বল দুইটির অন্তর্বর্তী কোণ কত ?

[The resultant of two forces P and 2P acting at a point is perpendicular to the force P. Find the angle between the two forces.] [120°]

2. একটি বিন্দুকণার উপর পরস্পর 60° কোণে আনত 60 dyn এবং 80 dyn মানের দুইটি বল ক্রিয়া করিতেছে। ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

[Two forces of 60 dyn and 80 dyn act on a particle at an angle of 60° with each others. Find the resultant of these two forces ?]

[121·66 dyn, 60 dyn মানের বলের সহিত 34·71° কোণে আনত]

3. দুইটি সমান বলের মধ্যবর্তী কোণ কত হইলে উহাদের লব্ধি বলের মান উক্ত বলদ্বয়ের প্রতিটির সমান হইবে ?

[What is the angle between two equal forces so that their resultant is equal to each of the forces ?] [120°]

4. দেখাও যে, পরস্পরের সহিত লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি সমান বলের যোগফল এবং অন্তরফল পরস্পর সমান এবং উহারা পরস্পরের সহিত লম্বভাবে অবস্থিত।

[Show that the sum and the difference of two forces that are perpendicular and equal in magnitude are also equal in magnitude and perpendicular to each other.]

5. একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল দুইটি বলের একটি অপরটির $\sqrt{2}$ গুণ। যদি ইহাদের লব্ধি এবং বৃহত্তর বলটির মধ্যবর্তী কোণ α হয়, তাহা হইলে দেখাও যে, α-এর মান $\pi/4$ অপেক্ষা বেশি হইতে পারে না।

[The magnitude of one of the two forces acting on a particle is double that of the other. If the angle between their resultant and the greater force is α, show that α cannot be greater than $\pi/4$.]

6. 30 N এবং 40 N মানের দুইটি বলের লব্ধি 36 N হইলে উহাদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

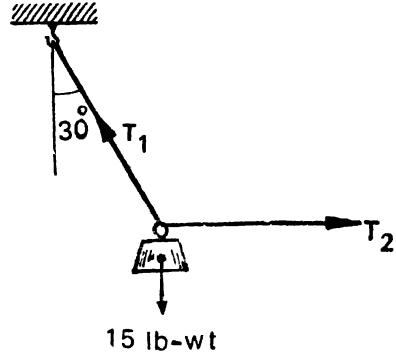
[If two forces of 30 N and 40 N produce a resultant of 36 N, find the angle between the forces.] [120° (প্রায়)]

7. 5 একক মানবিশিষ্ট দুইটি ভেক্টর পরস্পরের সহিত 120° কোণে একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করিতেছে। ইহাদের লব্ধির মান এবং অভিমুখ নির্ণয় কর।

[Two vectors of 5 units each acting at a point make an angle of 120° with each other. Find the magnitude and the direction of their resultant.] [5 unit, প্রতিটি বলের সহিত 60° কোণে আনত]

8. F_1 এবং F_2 বলদ্বয় একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করিতেছে। F_1-এর মান 10 dyn এবং ইহা অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণ করিয়া ডানদিকে ক্রিয়াশীল F_2-এর মান 5 dyn এবং ইহা উল্লম্ব রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল। বলদ্বয়ের লব্ধির অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশের মান নির্ণয় কর।

[Two forces F_1 and F_2 are acting at a point. The magnitude of F_1 is 10 dyn and its direction is 30° above the horizontal to the right. The magnitude of F_2 is 5 dyn and its directions is along the vertical. What are the horizontal and vertical components of their resultant ?] [8·67 dyn, 10 dyn]

9. একটি 15 lb-wt ভারকে একটি সরু দড়ির সাহায্যে সিলিং-এর একটি হুক হইতে ঝুলান রহিয়াছে। যতক্ষণ পর্যন্ত প্রথম দড়িটি উল্লম্ব রেখার সহিত 30° কোণ করে ততক্ষণ ভারের আংটার সহিত যুক্ত অপর একটি দড়ির সাহায্যে ভারটিকে অনুভূমিক অভিমুখে টানা হইল (চিত্র 3.22)। দড়ি দুইটির টান নির্ণয় কর।

[A body of 15 lb-wt is supported by a thin cord attached to a hook in the ceiling. Another cord is attached to the ring of the weight Fig. 3.22) and pulled horizontally until the supporting cord makes an angle of 30° with the vertical. Find the tensions in the strings.]

চিত্র 3.22

[$T_1 = 17·3$ lb-wt, $T_2 = 8·7$ lb-wt]

10. ঠিক মধ্যাহ্নে একটি জাহাজে A অপর একটি জাহাজ B হইতে 20 মাইল উত্তরে রহিয়াছে। A জাহাজটি ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে দক্ষিণ দিকে এবং B জাহাজটি ঘণ্টায় 9 মাইল বেগে পূর্বদিকে চলিতেছে। জাহাজ দুইটি কখন সর্বাপেক্ষা নিকটবর্তী হইবে ?

[A ship A was 20 miles north of another ship B at noon. A was sailing due south at the rate of 12 miles per hour and B was sailing due east at 9 miles per hour. At what time were they nearest to each other and how far apart were they then ?]

(Cambridge School Certificate, 1893)

[বেলা 1টা 4 মিনিট, 12 মাইল]

11. একটি বস্তুর 4 ft/s, 8 ft/s, $12\sqrt{3}$ ft/s এবং 16 ft/s—যুগপৎ এই চারিটি তৃতীয় বেগ রহিয়াছে। প্রথম বেগের সহিত দ্বিতীয় বেগের কোণ 60°, দ্বিতীয় বেগের সহিত

বেগের কোণ 90° এবং তৃতীয় বেগের সহিত চতুর্থ বেগের কোণ 150°। বস্তুর লব্ধি বেগের মান ও অভিমুখ নির্ণয় কর।

[A body possesses four simultaneous velocities of which magnitudes are 4 ft/s, 8 ft/s, $12\sqrt{3}$ ft/s and 16 ft/s respectively. The angle between the first and second velocities is 60°, that between the second and third velocities is 90° and between the third and the fourth velocities is 150°. Find the magnitude and resultant of the velocity of the body.]

[4 ft/s, প্রথম বেগের সহিত 120° কোণে ক্রিয়াশীল]

12. বৃষ্টির জলের ফোঁটাগুলি উল্লম্বভাবে 1 m/s বেগে নিচের দিকে পড়িতেছে। ভূপৃষ্ঠে জনৈক সাইকেল-আরোহী কত বেগে সাইকেল চালাইলে বৃষ্টির ফোঁটাগুলি তাহার গায়ে উল্লম্বরেখার সহিত 30° কোণে আঘাত করে? সাইকেল-আরোহীর সাপেক্ষে বৃষ্টির জলের ফোঁটার আপেক্ষিক বেগ কত?

[Drops of rain are falling vertically downwards with a velocity of 1 m/s With what velocity must a cyclist move on the ground so that the drops strike him at 30° with the vertical? What is the velocity of the drops relative to the cyclist?]

$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ m/s},\quad \frac{2}{\sqrt{3}}\text{ m/s}\right]$

13. ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলমান এক ব্যক্তির নিকট মনে হয় যে, বৃষ্টি উল্লম্বভাবে পড়িতেছে। বৃষ্টির আপাত বেগ ঘণ্টায় $3\sqrt{3}$ মাইল হইলে ইহার প্রকৃত গতিবেগের অভিমুখ নির্ণয় কর।

[To a man walking at a rate of 3 miles an hour rain appears to fall vertically. If the apparent velocity of rain is $3\sqrt{3}$ miles an hour, find the magnitude and direction of its real velocity]

[6 mi/h, উল্লম্বরেখার সহিত 30° কোণে]

14. একটি নৌকা ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে উত্তরদিকে যাইতেছে এবং অপর একটি নৌকা ঘণ্টায় $12\sqrt{2}$ মাইল বেগে উত্তর-পশ্চিম দিকে যাইতেছে। প্রথম নৌকার সাপেক্ষে দ্বিতীয় নৌকাটির আপেক্ষিক গতিবেগ নির্ণয় কর।

[A boat is moving due north with a velocity of 12 mi/h and another boat is travelling towards north-west with a velocity of $12\sqrt{2}$ mi/h. Find the relative velocity of the second boat with respect to the first? [12 মাইল/ঘণ্টা, পশ্চিমদিকে]

15. ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে দক্ষিণদিকে ধাবমান একটি মোটরগাড়ির চালকের মনে হইতেছে যে, পশ্চিমদিক হইতে পূর্বদিকে বায়ু বহিতেছে। মোটরগাড়ির গতিবেগ কমাইয়া ঘণ্টায় 15 মাইল করা হইলে চালকের মনে হয় যেন উত্তর-পশ্চিম দিক হইতে বায়ু বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ এবং ইহার অভিমুখ নির্ণয় কর।

[The wind appears to blow from west to east to the driver moving southwards with a velocity of 30 miles an hour. When the speed of the car is reduced to 15 miles an hour, it appears to the driver that the wind is blowing from north-west direction. Find the real velocity of the wind and its direction]

[$15\sqrt{5}$ mi/h, দক্ষিণদিকের সহিত পূর্বাভিমুখে 26·6° কোণে আনত]

16. 100 dyn মানের একটি বলকে দুইটি সমকৌণিক উপাংশে বিভাজিত করা হইল। ইহাদের একটির মান 50 dyn হইলে অপরটির মান কত ?

[A force of 100 dyn is resolved into two components at right angles to each other. One of them is 50 dyn ; find the other ?

[$50\sqrt{3}$ dyn]

17. 150 lb-wt ওজনের এক ব্যক্তি দুই হাতে একটি অনুভূমিক দণ্ড ধরিয়া ঝুলিতেছে। তাহার প্রতিটি বাহু উল্লম্বরেখার সহিত 45° কোণ করিয়া আছে। ঐ ব্যক্তির প্রতিটি বাহু কী টান প্রয়োগ করিতেছে ?

[A man weighing 150 lb-wt is hanging from a horizontal bar by the arms. Each arm makes an angle of 45° with the vertical. What is the pull exerted by each arm ?] [106·07 lb-wt]

18. একটি তারের প্রান্ত হইতে 5 kg ভরবিশিষ্ট একটি লোহার বল ঝুলিতেছে। বলটির উপর কী পরিমাণ স্থির অনুভূমিক বল প্রয়োগ করিলে তারটি উল্লম্বরেখার সহিত 30° কোণে বিক্ষিপ্ত হইবে ? এই সময় তারের টান কত ?

[An iron ball of mass 5 kg hangs from the lower end of a long wire. When steady horizontal force must be exerted on the ball to deflect the wire 30° with the vertical ? What must be the tension in the wire ?] [2·89 kg-wt, 5·77 kg-wt]

19. দুইটি নৌকার প্রতিটি ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে 880 গজ প্রস্থবিশিষ্ট নদী পার হইতে চেষ্টা করে। নদীটিতে স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 মাইল। একটি নৌকা ন্যূনতম পথে এবং অপরটি ন্যূনতম সময়ে নদীটি অতিক্রম করিল। যদি উহারা একই সঙ্গে রওনা হইয়া থাকে তাহা হইলে উহারা কতটা সময়ের ব্যবধানে অপর পারে পৌঁছে ?

[Two boats, eaeh moving with a velocity of 5 miles per hour, try to cross a stream of breadth 880 yards. The current flows at a rate of 3 miles per hour. One of the boats crosses the stream by the shortest path and the other in shortest time. If they start together, calculate the interval between their times of arrival at the opposite bank.] [1·5 মিনিটে]

20. দুইটি বস্তুকণা একই সঙ্গে একটি বিন্দু হইতে যাত্রা শুরু করিল এবং উহারা পরস্পর θ কোণে আনত দুইটি সরলরেখা বরাবর চলিতে লাগিল। ইহাদের একটি u সমবেগে এবং অপরটি স্থির অবস্থা হইতে f সমত্বরণে চলিতে লাগিল। দেখাও যে, $u \cos \theta / f$ সময় পর ইহাদের আপেক্ষিক বেগ সর্বনিম্ন হইবে এবং এই সর্বনিম্ন আপেক্ষিক বেগ $u \sin \theta$-এর সমান।

[Two particles start simultaneously from the same point and travel along two straight lines inclined at an angle θ, one with uniform velocity u and the other from rest with an uniform acceleration f. Show that their relative velocity is least after a time $u \cos \theta / f$ and that the least relative velocity is equal to $u \sin \theta$.]

21. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান যথাক্রমে 15 lb-wt এবং 7 lb-wt। যদি উভয় বলের মান 1 lb-wt বৃদ্ধি করা হয় এবং যদি এই দুই নূতন বল পরস্পরের সহিত 90° কোণে আনত অবস্থায় ক্রিয়া করে তাহা হইলে ইহাদের লব্ধি কত হইবে ?

[The greatest and the least resultant of two forces acting at a point are 15 lb-wt and 7 lb-wt respectively. If each force is increased by 1 lb-wt, find the resultant of the two new forces when acting at an angle of 90° with each other.] [13 lb-wt]

22. একটি বিন্দুতে চারিটি বল ক্রিয়া করিতেছে। প্রথম বলটির মান 200 dyn এবং ইহা উত্তরাভিমুখে ক্রিয়াশীল, দ্বিতীয় বলটির মান 100 dyn এবং ইহা দক্ষিণদিকে ক্রিয়াশীল, তৃতীয় বলটির মান 500 dyn এবং ইহা পূর্বদিকে ক্রিয়াশীল এবং চতুর্থ বলটির মান 300 dyn, ইহা পশ্চিমদিকে ক্রিয়াশীল। এই বলগুলির লব্ধির মান ও অভিমুখ কী হইবে?

[Four forces act at a point. The first force is 200 dyn acting due north, the second force is 100 dyn acting due south, the third is 500 dyn acting due east and the fourth force is 300 dyn acting due west. What is the magnitude and direction of the resultant force ?] [223·6 dyn, 63·43° east of north]

23. একটি বস্তুর গতিবেগ 4 cm/s এবং উহা উত্তরমুখী। অপর একটি বস্তুর গতিবেগ 3 cm/s, ইহা পশ্চিমমুখী। দ্বিতীয় বস্তুর সাপেক্ষে প্রথম বস্তুটির আপেক্ষিক গতিবেগ নির্ণয় কর।

[A body is moving with a velocity of 4 cm/s due north and another body is moving with a velocity of 3 cm/s due west. Find the relative velocity of the first body with respect to the second.]

[5 cm/s, উত্তরদিকের সহিত 36·87° পূর্বে]

24. A এবং B বিন্দু দুইটি এইরূপ যাহাতে AB সরলরেখাটি অনুভূমিক এবং ইহার দৈর্ঘ্য 2 ft ; 3 ft দীর্ঘ একটি তারের দুই প্রান্ত A এবং B-এর সহিত যুক্ত রহিয়াছে এবং ইহার মধ্যবিন্দুতে 20 lb ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু বিধৃত রহিয়াছে। তারের টান নির্ণয় কর।

[A and B are two points such that the straight line AB is horizontal and equal to 2 ft. A string 3 ft long its ends fixen at A and B. It carries a body of mass 20 lb at its midpoint. Find the tension of the string] [13·42 lb-wt]

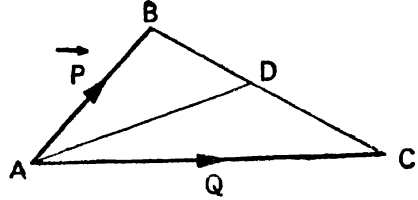
25. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বল P এবং Q-এর অন্তর্ভুক্ত কোণ যদি θ হয় তাহা হইলে উহাদের লব্ধির মান $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$; এবং যদি উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\left[\frac{\pi}{2}-\theta\right]$ হয় তাহা হইলে লব্ধির মান হয় $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$; প্রমাণ কর যে, $\tan\theta=(m-1)/(m+1)$

[If the angle between the two forces P and Q acting at a point is θ, the magnitude of their resultant is $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$, and if the angle between them is $(\pi/2-\theta$, the magnitude of that resultant is $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$. Prove that $\tan\theta=(m-1)/(m+1)$

26. একই সমতলে অবস্থিত নিম্নের বলগুলির লব্ধি নির্ণয় কর : x-অক্ষের সহিত 0° কোণে আনত 30 dyn, 30° কোণে আনত 40 dyn এবং 150° কোণে আনত 40 dyn।

[Find the resultant of the following coplanar forces : 30 dyn at 0°, 40 dyn at 30° and 40 dyn at 150° with the x-axis.]

[50 dyn, x-অক্ষের সহিত 53° কোণে আনত]

27. ABC ত্রিভুজে D হইল BC বাহুর মধ্যবিন্দু (চিত্র 3.23)। AB এবং AC রেখাদ্বয় যথাক্রমে P এবং Q ভেক্টর নির্দেশ করে। তাহা হইলে (i) BC, (ii) CD, (iii) DB, (iv) AD (v) DA—এই সদিক রেখাগুলিকে P এবং Q ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ কর।

চিত্র 3.23

[In the triangle ABC (Fig. 3.21), D is the midpoint of the side BC. The directed lines AB and AC represent the vectors P and Q respectively. Express the following directed lines in terms of the vectors P and Q: (i) BC, (ii) CD, (iii) DB, (v) AD and (v) DA.]
[(i) $\mathbf{Q}-\mathbf{P}$, (ii) $\frac{1}{2}(\mathbf{P}-\mathbf{Q})$, (iii) $\frac{1}{2}(\mathbf{P}-\mathbf{Q})$. (iv) $\frac{1}{2}(\mathbf{P}+\mathbf{Q})$, (v) $-\frac{1}{2}(\mathbf{P}+\mathbf{Q})$]

28. $A=i3+j4-k6$ হইলে এই ভেক্টরটির মান নির্ণয় কর। এখানে, i, j এবং k হইল যথাক্রমে x-, y- এবং z-অক্ষাভিমুখী ক্রিয়াশীল একক ভেক্টর। $B=i5-j7+k9$ হইলে A এবং B ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মানও নির্ণয় কর।

[Find the magnitude of the vector $A=i3+j4-k6$, where i, j and k are unit vectors along the x-, y- and z-axes respectively. If $\mathbf{B}=i5-j7+k9$, find the magnitude of the resultant of the vectors A and B.] [7·81 units, 9·06 units]

29. $\mathbf{P}=i3+j5$ এবং $\mathbf{Q}=i4+k6$ হইলে $(P+Q)$ এবং $(P-Q)$ ভেক্টরদ্বয়ের মান নির্ণয় কর। এখানে, i, j এবং k হইল যথাক্রমে x-, y- এবং z-অক্ষাভিমুখী ক্রিয়াশীল একক ভেক্টর।

[If $\mathbf{P}=i3+j5$ and $\mathbf{Q}=i4+k6$, find the magnitudes of the two vectors $(P+Q)$ and $(P-Q)$. Here, i, j and k are the unit vectors along the x-, y- and z-axes respectively.] [10·49 units, 7·87 units]

30. যদি ABCD সামান্তরিকের AB এবং AD বাহু যথাক্রমে P এবং Q ভেক্টর নির্দেশ করে তাহা হইলে (i) AC, (ii) BC, (iii) CD এবং (iv) BD রেখাগুলি দ্বারা সূচিত ভেক্টরগুলি নির্ণয় কর।

[If the sides AB and AD of a parallelogram ABCD represent the vectors **P** and **Q**, what are the vectors represented by sides (i) AC, (ii) BC, (iii) CD and (iv) BD.] [(i) $P+Q$, (ii) Q, (iii) $-P$, (iv) $Q-P$]

চতুর্থ পরিচ্ছেদ
নিউটনের গতিসূত্রাবলী

4.1 নিউটনের সূত্রাবলী : প্রথম সূত্র : বাহির হইতে প্রযুক্ত বল দ্বারা বাধ্য না হইলে স্থির বস্তু চিরকাল স্থির অবস্থায় থাকে এবং সচল বস্তু চিরকাল সমবেগে সরলরেখা অবলম্বন করিয়া চলিতে থাকে।

দ্বিতীয় সূত্র : কোন বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার উহার উপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং বল যেদিকে ক্রিয়া করে ভরবেগের পরিবর্তনও সেইদিকে ঘটে।

তৃতীয় সূত্র : প্রত্যেক ক্রিয়ারই সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া রহিয়াছে।

4.2 বলের একক ও মান : একক ভরের উপর ক্রিয়া করিয়া যে-বল একক ত্বরণ সৃষ্টি করে তাহাকে বলের একক ধরা হয়। বলের এককের এই সংজ্ঞানুসারে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র হইতে পাই,

$$P=mf \quad \text{বা, বল=ভর×ত্বরণ}$$

সি. জি. এস. পদ্ধতিতে বলের একক ডাইন। যে-বল এক গ্রাম ভরবিশিষ্ট বস্তুর উপর ক্রিয়া করিয়া 1 cm/s^2 ত্বরণ উৎপন্ন করে তাহাকে এক 'ডাইন' বলা হয়।

$$1 \text{ dyne}=1 \text{ g}\times 1 \text{ cm/s}^2=1 \text{ g cm/s}^2$$

এফ. পি. এস. পদ্ধতিতে বলের একক পাউণ্ডাল। যে-বল এক পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট বস্তুর উপর ক্রিয়া করিয়া 1 ft/s^2 ত্বরণ উৎপন্ন করে তাহাকে এক পাউণ্ডাল বলা হয়।

$$1 \text{ পাউণ্ডাল} = 1 \text{ পাউণ্ড} \times 1 \text{ ফুট/সেকেণ্ড}^2$$

$$1 \text{ poundal} = 1 \text{ lb} \times 1 \text{ ft/s}^2 = 1 \text{ lb-ft/s}^2$$

এম. কে. এস. পদ্ধতিতে বলের একক নিউটন। যে-বল এক কিলোগ্রাম ভরবিশিষ্ট বস্তুর উপর ক্রিয়া করিয়া 1 m/s^2 ত্বরণ উৎপন্ন করে তাহাকে এক নিউটন বলে।

$$1 \text{ নিউটন} = 1 \text{ কিলোগ্রাম} \times 1 \text{ মিটার/সেকেণ্ড}^2$$

$$1 \text{ newton} = 1 \text{ kg} \times 1 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ kg-m/s}^2$$

নিউটন ও ডাইনের সম্পর্ক :

$$1 \text{ নিউটন} = 1 \text{ kg} \times 2 \text{ m/s}$$

$$= 10^3 \text{ g} \times 10^2 \text{ cm/s}^2 = 10^5 \text{ g-cm/s}^2$$

$$\therefore 1 \text{ newton} = 10^5 \text{ dyn}$$

পাউণ্ডাল ও ডাইনের সম্পর্ক :

$$1 \text{ পাউণ্ডাল} = 1 \text{ পাউণ্ড} \times \text{ফুট/সেকেণ্ড}^2$$

$$= 453{\cdot}6 \text{ g} \times 30{\cdot}48 \text{ cm/s}^2 = 13{,}826 \text{ dyn (প্রায়)}$$

$$\therefore 1 \text{ poundal} = 13{,}826 \text{ dyn}$$

বলের অভিকর্ষীয় একক : সি. জি. এস. পদ্ধতিতে বলের অভিকর্ষীয় একক হইল গ্রাম-ভার (g-wt)। এক গ্রাম ভরবিশিষ্ট কোন বস্তুকে পৃথিবী আপন কেন্দ্রাভিমুখে যে-বলে আকর্ষণ করে তাহাই এক গ্রাম-ভার।

ওজনের সংজ্ঞানুসারে, 1 গ্রাম-ভর $= g$ ডাইন

বা, 1 গ্রাম-ভার $=$ 981 ডাইন (প্রায়)

এফ. পি. এস. পদ্ধতিতে বলের অভিকর্ষীয় একক হইল পাউণ্ড-ভার (lb-wt)। এক পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট কোন বস্তুকে পৃথিবী যে-বলে আপন কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে তাহাই এক পাউণ্ড-ভার।

1 পাউণ্ড-ভার $= g$ পাউণ্ডাল $= 32{\cdot}2$ পাউণ্ডাল (প্রায়)

কেননা এফ. পি. এস. পদ্ধতিতে অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর মান 32·2 ft/s^2।

4.3 বলের ঘাত (Impulse of a force) : বল ও বলের ক্রিয়াকালের গুণফলকে বলের ঘাত বলা হয়। অর্থাৎ,

বলের ঘাত (I) $=$ বল (P) $\times$ বলের ক্রিয়া কাল (t)

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে,

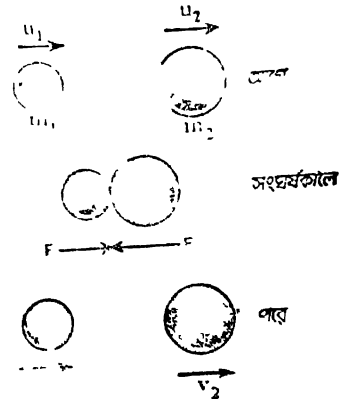
$$\frac{\text{ভরবেগের পরিবর্তন}}{\text{বলের ক্রিয়াকাল } (t)} = \text{বল (P)}$$

$\therefore$ বলের ঘাত (I) $=$ ভরবেগের পরিবর্তন

4.4 রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র (Law of conservation of linear momentum) : বাহ্যিক বল অনুপস্থিত থাকিলে (বস্তুসমূহের পারস্পরিক ক্রিয়া ভিন্ন অন্য কোন বল না থাকিলে) একটি বস্তু-সংহতির (system of particles) মোট ভরবেগ সর্বদা ধ্রুবক থাকে। ইহাকে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র বলা হয়।

চিত্র 4.1

মনে করি, সংঘাতের পূর্বে m_1 এবং m_2 ভরবিশিষ্ট বস্তুদ্বয়ের গতিবেগ u_1 এবং u_2। সংঘাতের পর ইহাদের গতিবেগের মান যথাক্রমে v_1 এবং v_2 (চিত্র 4.1)।

মনে করি, সংঘাতের সময় প্রথম বস্তুটি সুতরাং, বস্তুটির উপর F বল প্রয়োগ করে। সুতরাং, নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে দ্বিতীয় বস্তুটি প্রথম বস্তুটির উপর $-$F বল প্রয়োগ করিবে।

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে, দ্বিতীয় বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বল,

$$F = \frac{m_2 v_2 - m_2 u_2}{t} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

এবং প্রথম বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বল,

$$-F=\frac{m_1v_1-m_1u_1}{t} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়,

$$(m_1v_1-m_1u_1+(m_2v_2-m_1v_1)=0$$

$$\text{বা, } m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2$$

অর্থাৎ, বস্তুদ্বয়ের প্রাথমিক ভরবেগ = বস্তুদ্বয়ের অন্তিম ভরবেগ

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 4.1 100 dyn মানের একটি বল 25 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর 5 s ধরিয়া ক্রিয়া করিল। বস্তুটি কী গতিবেগ লাভ করিবে ?

[A force of 100 dyn acts on a body of mass 25 g for 5 seconds. What will be the velocity acquired by the body ?]

(Tripura H. S., 1981)

সমাধান : ধরি, বস্তুটির ত্বরণ $=f$ cm/s^2

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে লেখা যায়,

$$f=\frac{\text{বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল বল, P}}{\text{বস্তুর ভর, } m}$$

শর্তানুসারে, P=100 dyn এবং m=25 g

$$\therefore \quad f=\frac{100 \text{ dyn}}{25 \text{ g}}=4 \text{ cm/s}^2 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

আলোচ্য বলের ক্রিয়ায় 5 s পর বস্তুর বেগ v হইলে লেখা যায়,

$$v=ft=(4 \text{ cm/s}^2).(5 \text{ s})=20 \text{ cm/s}$$

উদাহরণ 4.2 কত মানের বল 100 kg ভরবিশিষ্ট বস্তুর উপর ক্রিয়া করিয়া 5 m/s^2 ত্বরণ উৎপন্ন করে ? বলটিকে মেগাডাইন এককে প্রকাশ কর।

[What is the magnitude of the force that produces an acceleration of 5 m/s^2 in a mass of 100 kg ? Express the force in megadynes.]

সমাধান : আমরা জানি যে, বল (P) = ভর (m) × ত্বরণ (f)

এখানে, m = 100 kg এবং f = 5 m/s^2

$\therefore$ P = 100 kg×5 m/s^2 = 500 newtons

আবার, 1 নিউটন = 10^5 ডাইন

কাজেই, P = 500 × 10^5 dyn = 40×10^6 dyn

বা, P = 50 Mdyn

উদাহরণ 4.3 800 kg ভরবিশিষ্ট একটি গাড়ি 20 সেকেণ্ড সময়ে 10 m/s

হইতে 30 m/s গতিবেগ লাভ করিল। গাড়ির উপর প্রযুক্ত বলের মান কত ? ঘর্ষণ উপেক্ষা কর।

[A car of mass 800 kg acquires a velocity from 10 m/s to 30 m/s in 20 seconds. What is the force applied to the car? Neglect friction.]

সমাধান : গাড়ির ত্বরণ,

$$f=\frac{\text{গতিবেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}}=\frac{30-10}{20}\text{m/s}^2=1\text{ m/s}^2$$

আবার, $P=mf=800\text{ kg}\times1\text{ m/s}^2=800$ newtons

উদাহরণ 4.4 প্রাথমিক অবস্থায় স্থির 2 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর 5 s সময় ধরিয়া একটি নির্দিষ্ট মানের বল ক্রিয়া করিল এবং ইহার পর বলের ক্রিয়া বন্ধ হইয়া গেল। পরবর্তী 4 s সময়ে বস্তুটি 200 cm দূরত্ব অতিক্রম করিল। বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল বলটির মান নির্ণয় কর।

[A constant force acts on a body of mass 2 kg, initially at rest, for 5 s and then ceases to act. During the next 4 s the body covers a distance of 200 cm. Find the magnitude of the force acting on the body.]

সমাধান : বলের ক্রিয়া বন্ধ হইয়া গেলে বস্তুটি স্থির গতিবেগে চলিতে থাকে। এই অবস্থায় বস্তুটি 4 s সময়ে 200 cm দূরত্ব অতিক্রম করে। কাজেই, বস্তুটির অন্তিম গতিবেগ, $v=\frac{s}{t}=\frac{200}{4}=25\text{ cm/s}$

প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ায় বস্তুটি স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 5 s সময়ে এই গতিবেগ লাভ করিয়াছে। কাজেই, বস্তুটির ত্বরণ,

$$f=\frac{v-u}{t}=\frac{25-0}{5}=5\text{ cm/s}$$

সুতরাং প্রযুক্ত বল, $P=mf=2000\text{ g}\times5\text{ cm/s}^2=10{,}000$ dyn

উদাহরণ 4.5 100 g ভরবিশিষ্ট কোন বস্তুর উপর 0·5 নিউটন মানের একটি স্থির বল কতক্ষণ ধরিয়া ক্রিয়া করিলে বস্তুটিতে 500 m/s গতিবেগ সঞ্চারিত হইবে ?

[During what time must a constant force of 0·5 N act upon a body of mass 100 g in order to generate in it a velocity of 500 m/s ?

সমাধান : আমরা জানি যে, $P=mf$

এক্ষেত্রে, $m=100\ g=\frac{1}{10}$ kg এবং $P=0{\cdot}5$ N

$$\therefore\quad f=\frac{P}{m}=\frac{0{\cdot}5}{\frac{1}{10}}=5\text{ m/s}^2$$

যদি t s সময় ধরিয়া ক্রিয়া করিয়া উক্ত বল বস্তুটিতে 500 m/s গতিবেগ সৃষ্টি করে তাহা হইলে,

$$500 = f \times t \quad \text{বা,}\ t = \frac{500}{5} = 100 \text{ s}$$

উদাহরণ 4.6 400 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু প্রতি মিনিটে 300 মিটার গতিবেগে চলিতেছে। যে-বিরুদ্ধ বল বস্তুটির উপর ক্রিয়া করিয়া উহাকে 10 s সময়ে স্থির অবস্থায় আনিবে তাহার মান কত ?

[A body of mass 400 g is moving with a velocity of 300 m per minute. What is the magnitude of the retarding force which will bring the body to rest in 10 seconds ?]

সমাধান : বস্তুটির প্রাথমিক বেগ $= \frac{300}{60}$ m/s $=5$ m/s $= 500$ cm/s

10 s সময়ে বস্তুটি স্থির অবস্থায় আসিলে বস্তুটির মন্দন,

$$f = \frac{500}{10} = 50 \text{ m/s}^2$$

কাজেই বস্তুটির গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল বিরুদ্ধ বল,

$$P = mf = (400 \text{ g}) \times (50 \text{ cm/s}^2) = 20{,}000 \text{ dyn}$$

উদাহরণ 4.7 10 lb ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু স্থির অবস্থা হইতে 10 ft উচ্চতা নামিয়া আসিল এবং বালির মধ্যে 6 ইঞ্চি প্রবেশ করিয়া স্থির হইল। বালি-কর্তৃক প্রযুক্ত গড় ঘাত নির্ণয় কর।

[A body of mass 10 lb falls from rest through a height of 10 ft and stops after penetrating 6 inches of sand. Find the average thrust of sand.] (I.Sc. (C. U.) 1961)

সমাধান : বস্তুটি u গতিবেগে ভূমিতে নামিয়া আসিলে দেখা যায়,

$$v^2 = 2gh$$

এখানে $h = 10$ ft বলিয়া

$$v^2 = 2g \times 10 = 20g \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

বালির মধ্য দিয়া 6 ইঞ্চি বা $\frac{1}{2}$ ft দূরত্ব গিয়া বস্তুটি স্থির অবস্থায় আসে বলিয়া লেখা যায়,

$$0 = v^2 - 2fs$$

এখানে, f = বালির মধ্য দিয়া যাইবার সময় বস্তুটির মন্দন এবং $s = \frac{1}{2}$ ft

$$\therefore \quad v^2 = 2f \times \tfrac{1}{2} = f \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$f = 20\ g$$

বালি-কর্তৃক বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল P পাউণ্ডাল হইলে বালির মধ্য দিয়া যাইবার সময় বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল ঊর্ধ্বমুখী অসম বল,

$$mf = (P - mg)$$

$$\text{বা,}\quad P = m(f + g) \qquad \cdots \qquad \text{(iii)}$$

(ii) এবং (iii) হইতে পাই,

বালি-কর্তৃক প্রযুক্ত বল, $P = m \times [20g + g]$ পাউণ্ডাল
$= 10 \times 21\ g$ পাউণ্ডাল
$= 210$ lb-wt

উদাহরণ 4.8 60 lb-ভরবিশিষ্ট একটি ব্লকের উপর 10 lb-wt মানের অনুভূমিক বল প্রয়োগ করা হইল। ঐ ব্লকটি আবার 40 lb ভরবিশিষ্ট একটি ব্লককে ঠেলিতেছে (চিত্র 4.2)। যদি ব্লক দুইটি ঘর্ষণহীন তলের উপর থাকে তবে প্রথম ব্লকটি দ্বিতীয় ব্লকটির উপর কত বল প্রয়োগ করে ?

চিত্র 4.2

[A force of 10 lb-wt is exerted horizontally against a 60 lb block which in turn pushes 40 lb block as shown in Fig. 4.2. If the blocks are on a frictionless surface, what force does the first block exert on the second ?]

সমাধান : 10 lb-wt বলের ক্রিয়ায় দুইটি ব্লকেরই ত্বরণ সৃষ্টি হইবে। মনে করি, ব্লকদ্বয়ের ত্বরণের মান f। আমরা জানি,

$$P = mf$$

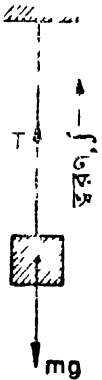
এখানে, $P = 10$ lb-wt $= 10 \times 32$ poundals
$m = (60 + 40)$ lbs $= 100$ lb

$$\therefore \quad f = \frac{P}{m} = \frac{10 \times 32}{100} \text{ft/s}^2 = 3.2 \text{ ft/s}^2$$

যদি দ্বিতীয় ব্লকটির উপর ক্রিয়াশীল বলের মান P_1 হয় তাহা হইলে লেখা যায়,

$$P_1 = m_1 f$$

এখানে, $m_1 =$ দ্বিতীয় ব্লকের ভর $= 40$ lb

$$\therefore \quad P_1 = 40 \times 3.2 \text{ poundals} = \frac{40 \times 3.2}{32} \text{lb-wt} = 4 \text{ lb-wt}$$

উদাহরণ 4.9 8 lb ভরবিশিষ্ট একটি ব্লককে 20 lb-wt অসহ ভারবিশিষ্ট একটি দড়ির সাহায্যে ত্বরিত বেগে ঊর্ধ্বমুখে তোলা হইতেছে। দড়ি না ছিঁড়িয়া ব্লকটির সর্বোচ্চ ত্বরণ কত হইতে পারে ?

[A 8 lb block is accelerated upward by a cord whose breaking strength is 20 lb-wt. Find the maximum acceleration which can be given to the block without breaking the cord.]

T
mg

চিত্র 4.3

সমাধান : মনে করি, দড়ির টান $= T$ poundals এবং ব্লকটির ঊর্ধ্বমুখী ত্বরণের মান f cm/s² ।

কাজেই, $T - mg = mf$ ... (i)

কাজেই, f-এর মান যখন সর্বোচ্চ তখন T-এর মান সর্বোচ্চ। T-এর সর্বোচ্চ মান দড়ির অসহ ভারের সমান।

কাজেই, $T_{max} = 20$ lb-wt $= 20 \times 32$ poundals

সুতরাং, $mf_{max} = T_{max} - mg$

বা, $mf_{max} = 20 \times 32 - 8 \times 32$

বা, $f_{max} = \frac{20 \times 32 - 8 \times 32}{8} = \frac{12 \times 32}{8} = 48$ ft/s^2

উদাহরণ 4.10 একটি জলের পাইপ 20 cm/s দ্রুতিতে 100 cm^2 ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট ছিদ্র হইতে জল উৎক্ষেপ করিতেছে। যদি এই জল একটি দৃঢ় দেওয়ালে লম্বভাবে আঘাত করে তাহা হইলে নিউটন এককে দেওয়ালে প্রযুক্ত বল নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, সংঘাতের পর দেওয়ালের অভিলম্বের দিকে জলের গতিবেগ শূন্য।

[A hose ejects water at a speed of 20 cm/s through a hole of area 100 cm^2. If the water strikes a rigid wall normally, calculate the force exerted on the wall in newton. Assume that the velocity of the water normal to the wall is zero after collision.]

সমাধান : প্রতি সেকেণ্ডে যে-পরিমাণ জল দেওয়ালে আঘাত করে তাহার আয়তন $= 100 \times 20 = 2000$ cm^3

প্রতি সেকেণ্ডে যে-পরিমাণ জল দেওয়ালে আঘাত করে উহার ভর,

$= 2000$ g/s $= 2$ kg/s

দেওয়ালে আঘাত করিয়া জলের গতিবেগের পরিবর্তন,

$= (20 - 0) = 20$ cm/s $= 0{\cdot}2$ m/s

প্রতি সেকেণ্ডে ভরবেগের পরিবর্তন = প্রতি সেকেণ্ডে দেওয়ালে আপতিত জলের ভর × জলের গতিবেগের পরিবর্তন $= (2$ kg/s$) \times (0{\cdot}2$ m/s$)$

$= 0{\cdot}4$ kg. m/s^2 $= 0{\cdot}4$ N

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে, ইহাই দেওয়ালে জল-কর্তৃক প্রযুক্ত বল।

উদাহরণ 4.11 30 g ভরবিশিষ্ট এবং 40 cm/s গতিবেগে ধাবমান একটি ক্রিকেট বলকে ব্যাটের সাহায্যে আঘাত করার ফলে উহা বিপরীত দিকে 60 cm/s গতিবেগে চলিতে আরম্ভ করিল। ক্রিকেট-বলটির উপর প্রযুক্ত বলের ঘাত (impulse) কত ? যদি ব্যাটে-বলে সংঘাত 0·01 s স্থায়ী হয় তাহা হইলে নিউটন এককে ব্যাট-কর্তৃক প্রযুক্ত বলের মান নির্ণয় কর।

[A cricket ball of mass 30 g moving with a velocity of 40 cm/s is hit by a bat which causes it to move in reverse direction with velocity 60 cm/s. What is the impulse of the force ? If the blow lasts for 0·01 s, find the average force in newton exerted by the bat.]

সমাধান : সংঘাতের পর ক্রিকেট-বলের গতিবেগের অভিমুখ পরিবর্তিত হয়। বলটির সংঘাতোত্তর গতিবেগকে (অর্থাৎ, অন্তিম গতিবেগকে) ধনাত্মক ধরিলে উহার সংঘাত-পূর্ব (অর্থাৎ, প্রারম্ভিক) গতিবেগকে ঋণাত্মক ধরিতে হইবে। কাজেই,

$v = 60$ cm/s

$u = -40$ cm/s

কাজেই, বলের ঘাত, $I = F \times t = m(v-u)$

$$= 30 \times [60-(-40)] = 30 \times 100 \text{ g-cm/s} = 3000 \text{ g-cm/s}$$

কাজেই, ব্যাট-কর্তৃক প্রযুক্ত গড় বল, $F = \frac{I}{t}$

এখানে, সময়, $t = 0{\cdot}01$ s

$$\therefore \quad F = \frac{3000}{0{\cdot}01} = 3 \times 10^5 \text{ dyn} = 3 \text{ N}$$

উদাহরণ 4.12 দুইটি সমান ভরবিশিষ্ট বস্তু পাশাপাশি স্থির অবস্থায় আছে। একটি বস্তু একটি স্থির বল F-এর প্রভাবে চলিতে শুরু করিল। একই মুহূর্তে অপর বস্তুটির উপর একটি ঘাত I প্রযুক্ত হইল। দেখাও যে, বস্তুদ্বয় 2 I/F সময় পরে পুনরায় পাশাপাশি আসিবে।

[Two equal masses are at rest side by side. One moves from rest under a constant force F while at the same instant the other receives an impulse I. Show that they will be again side by side after a time 2 I/F.] (Camb. B. A., 1893)

সমাধান : ধরা যাক, বস্তুদ্বয়ের প্রতিটির ভর $= m$

F বলের প্রভাবে প্রথম বস্তুর ত্বরণ, $f = \frac{F}{m}$

দ্বিতীয় বস্তুর উপরে প্রযুক্ত ঘাত, I = ইহার ভরবেগের পরিবর্তন

বস্তুটির প্রাথমিক বেগ শূন্য বলিয়া, $I = mv$ (অন্তিম ভরবেগ)

$$\therefore \quad \text{বস্তুটির গতিবেগ, } v = \frac{I}{m}$$

মনে করি, t সময় পর বস্তুদ্বয় পুনরায় পাশাপাশি আসিবে। t সময়ে প্রথম বস্তু-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$= \tfrac{1}{2} f t^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t^2 \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

আবার, t সময়ে দ্বিতীয় বস্তু-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$= v \times t = \frac{I}{m} \times t \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

t সময় পর বস্তুদ্বয় পুনরায় পাশাপাশি আসে বলিয়া t সময়ে প্রথম বস্তু-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব পরস্পর সমান।

$$\text{অর্থাৎ, } \tfrac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t^2 = \frac{I}{m} \cdot t \quad \text{বা,} \quad t = \frac{2I}{F}$$

উদাহরণ 4.13 অনুভূমিক অভিমুখে 0·1 m/s গতিবেগে চলমান একটি বাহক বেল্টের উপর 2 kg/s হারে বালি পড়িতেছে। (*a*) বেল্টটির দ্রুতি বজায় রাখিতে কী পরিমাণ অতিরিক্ত বল প্রয়োগ করিতে হইবে ? (*b*) এই বল কী

হারে কার্য করে এবং (c) বেল্টের বালির গতিশক্তির পরিবর্তনের হার কত তাহা নির্ণয় কর। (b) ও (c) অংশের উত্তরের পার্থক্য ব্যাখ্যা কর।

[Sand drops vertically at the rate of 2 kg/s on to a conveyor belt moving horizontally with a velocity of 0·1 m/s. Calculate (a) the extra force necessary to maintain the speed of the belt, (b) the rate at which the work is done by this force and (c) the change in kinetic energy per second of the sand on the belt. Explain the difference in the results of (b) and (c).]

সমাধান : (a) বেল্টটিকে চলমান রাখিবার জন্য প্রয়োজনীয় বল
=বালির অনুভূমিক ভরবেগ-বৃদ্ধির হার
=প্রতি সেকেণ্ডে বেল্টের উপর পতিত বালির ভর × বালির গতিবেগ
$=(2 \text{ kg/s}) \times (0{\cdot}1 \text{ m/s}) = 0{\cdot}2 \text{ kg.m/s}^2 = 0{\cdot}2 \text{ N}$

(b) এই বল-কর্তৃক বালির উপর কৃত কার্যের হার=বল × সরণের হার
$=(0{\cdot}2 \text{ N}) \times (0{\cdot}1 \text{ m/s})$
$=0{\cdot}02 \text{ N.m/s} = 0{\cdot}02 \text{ W}$

(c) বালির গতিশক্তির পরিবর্তনের হার$=\frac{1}{2}\times$ প্রতি সেকেণ্ডে বেল্টের উপর পতিত বালির ভর × (গতিবেগ)$^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times (0{\cdot}1)^2 = 0{\cdot}01$ W

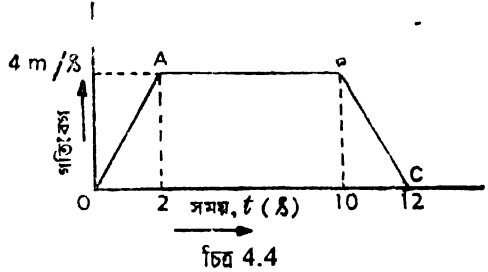
কাজেই দেখা যাইতেছে যে, বেল্ট-কর্তৃক বালির উপর কৃত কার্যের হার বালির গতিশক্তির পরিবর্তনের দ্বিগুণ। অর্থাৎ, বেল্ট-কর্তৃক সরবরাহিত শক্তির অর্ধেক মাত্র বালির গতি-শক্তি বৃদ্ধির জন্য ব্যয়িত হইতেছে। এখন প্রশ্ন হইল, সরবরাহিত শক্তির বাকি অংশ কোথায় যায় ?

বেল্টের উপর পতিত বালি বেল্টে পড়ার সঙ্গে সঙ্গেই বেল্টের গতিবেগ লাভ করিতে পারে না। প্রথমে বালি ও বেল্টের মধ্যে একটি আপেক্ষিক গতি থাকে। এই সময় বালির সাপেক্ষে বেল্টের গতি থাকে বলিয়া উহাদের মধ্যে ঘর্ষণ-বল ক্রিয়া করে। এই ঘর্ষণ-বলের বিরুদ্ধে বেল্টকে কিছু পরিমাণ কার্য করিতে হয় বলিয়া বেল্ট-কর্তৃক সরবরাহিত শক্তির হার বালির গতিশক্তির পরিবর্তনের হার অপেক্ষা বেশি।

উদাহরণ 4.14 একটি লিফ্‌ট উপরে উঠিতেছে। লিফ্‌ট ও ইহার আরোহীদের মোট ভর 1000 kg। লিফ্‌টের গতিবেগের পরিবর্তন একটি লেখ-চিত্রের সাহায্যে দেখান হইয়াছে (চিত্র 4.4)। (a) যে-তারটি লিফ্‌টটিকে উপরে তুলিতেছে, সময় t-এর মান যখন (i) 1 s, (ii) 5 s এবং (iii) 11 s, তখন উহার টান কত ? (b) লিফ্‌টটি আরোহীদিগকে কতটা উপরে তুলে ? (c) লিফ্‌টের সমগ্র গতিকালে ইহার গড় গতিবেগ এবং গড় ত্বরণ কত হইবে ? ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ$=9{\cdot}8 \text{ m/s}^2$ ।

[A lift is going up. The total mass of the lift and the passengers is 1000 kg. The variation in the velocity of the lift is given in the graph (Fig. 4.4). (a) What will be the tension in the cable pulling the lift at time t equal to (i) 1 s, (ii) 5 s and

(iii) 11 s ? (b) What is the height to which the lift tak[illegible] the passengers ? (c) What will be the average velocity and the average acceleration during the course of the entire motion ? Assume that the acceleration due to gravity is equal to 9.8 m/s^2.]

চিত্র 4.4

সমাধান : (a) (i) 4.4 নং চিত্র হইতে দেখা যায় যে, যখন $t=1$ s তখন লিফ্‌টের গতিবেগের পরিবর্তনের হার বা ত্বরণ, f=OA সরলরেখার নতি

$$=\frac{4 \text{ m/s}}{2 \text{ s}}=2 \text{ m/s}^2$$

কাজেই, লিফ্‌টটিকে যে-তারের সাহায্যে উপরে তোলা হইতেছে উহার টান

$$T=m(g+f)$$

এখানে, m = লিফ্‌ট ও আরোহীর মোট ভার

$= 1000$ kg এবং g = অভিকর্ষজ ত্বরণ $= 9.8 \text{ m/s}^2$

$\therefore \quad T = 1000 \, [9.8+2]$ newtons $= 11800$ N

(ii) যখন, $t=5$ s, তখন লিফ্‌টের ত্বরণ, f = AB সরলরেখার নতি $=0 \text{ m/s}^2$

কাজেই, এই সময় তারের টান, $T = mg = 1000 \times 9.8 = 9800$ N

(iii) যখন $t = 11$ s, তখন লিফ্‌টের ত্বরণ,

$$f=\text{BC সরলরেখার নতি} = -\frac{4 \text{ m/s}}{2 \text{ s}} = -2 \text{ m/s}^2$$

এই সময় তারের টান, $T = m(g+f)$ [এক্ষেত্রে, f ঋণাত্মক]

$= 1000 \, [9.8-2] = 7800$ N

(b) লিফ্‌ট মোট যে-উচ্চতা পর্যন্ত উঠে তাহার মান

$$h=(\tfrac{1}{2}\times 2\times 2^2)+4\times 8+[4\times 2-\tfrac{1}{2}\times 2\times 2^2]$$

$= 4+32+4=40$ m

(c) লিফ্‌টের গড় গতিবেগ $=\dfrac{\text{অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}}=\dfrac{40}{12}=3.33$ m/s

গড় ত্বরণ $=\dfrac{(2\times 2)+(0\times 8)+(-2\times 2)}{12}=0 \text{ m/s}^2$

উদাহরণ 4.15 1 kg ভরবিশিষ্ট একই প্রক • তিনটি ব্লককে সূতার সাহায্যে যুক্ত করিয়া একটি অনুভূমিক টেবিলে রাখা হইল (চিত্র 4.5)। প্রথম ব্লকটিতে 3 N বল প্রয়োগ করা হইল। প্রতিটি সূতার টান নির্ণয় কর। ব্লক এবং টেবিলের স্পর্শতলের ঘর্ষণ-বল উপেক্ষা কর।

[Three similar blocks, each of mass 1 kg, are joined by strings

and placed on a smooth table (Fig 4.5). A force of 3 N is applied to the first block. Find the tension in each of the strings. Neglect the frictional forces between the blocks and the table.]

চিত্র 4.5

সমাধান : প্রথম ব্লকে প্রযুক্ত 3N বলের প্রভাবে তিনটি ব্লকই একই ত্বরণ f লইয়া চলিতে শুরু করিবে। মনে করি, প্রথম ও দ্বিতীয় ব্লকের সহিত যুক্ত সূতার টান T_1 নিউটন এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় ব্লকের সহিত যুক্ত সূতার টান T_2 নিউটন।

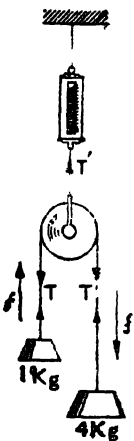
চিত্র 4.6

এখন, প্রথম ব্লকটির গতি বিবেচনা করিয়া লেখা যায়, $3-T_1=1\times f$ ... (i)
দ্বিতীয় ব্লকটির গতি বিবেচনা করিয়া লেখা যায়, $T_1-T_2=1\times f$ ... (ii)
এবং তৃতীয় ব্লকটির গতি বিবেচনা করিয়া লেখা যায়, $T_2=1\times f$ ... (iii)
(i), (ii) এবং (iii) নং সমীকরণ যোগ করিয়া পাই,

$$3=3\times f \quad \therefore \quad f=1 \text{ m/s}^2$$

সমীকরণ (i)-এ f-এর মান বসাইয়া পাই, $T_1=2\text{N}$

এবং (iii) নং সমীকরণ হইতে পাই, $T_2=1$ N

উদাহরণ 4.16 একটি ওজনহীন কপিকলকে একটি স্প্রিং-তুলা হইতে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। একটি সূতার দুই প্রান্তে দুইটি ওজন 1 kg এবং 4 kg যুক্ত রহিয়াছে। ঐ সূতাটি কপিকলের উপর দিয়া গিয়াছে। ওজন দুইটি অভিকর্ষের প্রভাবে চলমান। ইহারা যখন গতিশীল তখন স্প্রিং-তুলার পাঠ কত হইবে ?

[A weightless pulley is suspended by a spring balance. Two weights 1 kg and 4 kg are attached to two ends of a string which passes over the pulley and the weights move due to gravity. What will be the reading of the spring balance during the motion of the weights ?]

চিত্র 4.7

সমাধান : ধরি, কপিকলের সাপেক্ষে 4 kg ভরবিশিষ্ট বস্তুটির নিম্নাভিমুখী ত্বরণ $=f$ m/s² (চিত্র 4.7)।

কাজেই, 1 kg ভরবিশিষ্ট বস্তুটির ঊর্ধ্বাভিমুখী ত্বরণ $=f$ m/s²
মনে করি, সূতার টান $=$ T kg-wt ;
তাহা হইলে 4 kg ভরবিশিষ্ট বস্তুটির গতি বিবেচনা করিয়া লেখা যায়,

$$4-T=\frac{4\times f}{g} \qquad \text{... (i)}$$

এখানে, g=অভিকর্ষজ ত্বরণ

অনুরূপভাবে, 1 kg ভরবিশিষ্ট বস্তুটির গতি বিবেচনা করিয়া পাই,

$$T-1=\frac{1\times f}{g} \quad \cdots \quad (ii)$$

সমীকরণ (ii)-কে 4 দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$4T-4=\frac{4f}{g} \quad \cdots \quad (iii)$$

(i) এবং (iii) হইতে লেখা যায়, $4-T=4T-4$

বা, $T=\frac{8}{5}$ kg-wt

কাজেই, কপিকলটিকে যে-স্প্রিং-তুলা হইতে ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে উহার পাঠ, $T'=2T=\frac{16}{5}=3{\cdot}2$ kg-wt

উদাহরণ 4.17 ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে ধাবমান 2000 lb ভরবিশিষ্ট একটি গাড়ি ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে ধাবমান 6000 lb ভরবিশিষ্ট একটি ট্রাকের সহিত ধাক্কা খাইল। ইহার ফলে উহাদের বাম্পার দুইটি পরস্পরের সহিত আটকাইয়া গেল। সংঘাতের অব্যবহিত কাল পরে উহাদের বেগ কত হইবে ?

[A 2000 lb car travelling 60 mi/h collides with a 6000 lb truck travelling in the same direction at 30 mi/h. The bumpers lock together due to the collision. What is the speed of the locked-together cars immediately after the collision ?]

সমাধান : আমরা জানি যে, সংঘাতকালে গাড়ি দুইটির রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষিত হইবে। কাজেই লেখা যায়, $m_1u_1+m_2u_2=(m_1+m_2)v$

এখানে, m_1=গাড়ির ভর=2000 lb

u_1=গাড়ির প্রাথমিক বেগ=60 mi/h

m_2=ট্রাকের ভর=6000 lb

u_2=ট্রাকের প্রাথমিক বেগ=30 mi/h

এবং v=গাড়িদ্বয়ের অন্তিম গতিবেগ

$$\therefore \quad v=\frac{m_1u_1+m_2u_2}{(m_1+m_2)}$$

$$=\frac{2000\times60+6000\times30}{2000+6000}=\frac{120+120}{8}=37{\cdot}5 \text{ mi/h}$$

উদাহরণ 4.18 A এবং B বল দুইটির ভর যথাক্রমে 100 g এবং 250 g ; ইহাদিগকে উপেক্ষণীয় ভারসম্পন্ন একটি প্রসারিত স্প্রিং-এর দুই প্রান্তে যুক্ত করিয়া একটি মসৃণ টেবিলের উপর স্থাপন করা হইল। যখন বল দুইটিকে একই সঙ্গে ছাড়িয়া দেওয়া হইল তখন B বলটি পূর্বদিকে 10 cm/s^2 প্রারম্ভিক ত্বরণ লইয়া চলে। A বলটির প্রারম্ভিক ত্বরণের মান ও অভিমুখ কী হইবে ?

[Two balls A and B of masses 100 g and 250 g respectively are connected by a stretched string of negligible mass and placed on a

smooth table. When the balls are released simultaneously, the initial acceleration of the ball B is 10 cm/s^2 eastward. What are the magnitude and direction of the initial acceleration of the ball A ?]

সমাধান ঃ মনে করি, প্রসারিত অবস্থায় A এবং B বলের সংযোজী তারের টান=T

কাজেই, বল দুইটিকে ছাড়িয়া দিলে তারের স্থিতিস্থাপকতার জন্য B বলের উপর F বল (force) ক্রিয়া করিবে। এই বল-এর ক্রিয়ায় B-তে 10 cm/s^2 ত্বরণ উৎপন্ন হয় বলিয়া লেখা যায়,

$$F = mf = (250\ g)\ (10\ cm/s^2)$$
$$= 2500\ dyn \quad \cdots \quad (i)$$

শর্তানুসারে, এই বল পূর্ব দিকে ক্রিয়াশীল। সুতরাং, A বলের উপর ক্রিয়াশীল প্রারম্ভিক বলের মান 2500 dyn এবং ইহা পশ্চিমাভিমুখী।

সুতরাং, A বলের প্রারম্ভিক ত্বরণ, $f = \frac{F}{m}$

$$= \frac{2500\ dyn}{100\ g} = 25\ cm/s^2$$

স্পষ্টতই, এই ত্বরণ পশ্চিমাভিমুখী।

উদাহরণ 4.19 50 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর কী পরিমাণ ঊর্ধ্বমুখী বল প্রয়োগ করিলে বস্তুটি 6·8 m/s^2 ত্বরণে নিচে পড়িবে ? ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 9·8 m/s^2।

[What shall be the upward force exerted on a body of mass 50 kg so that it causes the body to fall with an acceleration of 6·8 m/s^2. Assume that the acceleration due to gravity is 9 8/s^2.]

সমাধান ঃ বস্তুটির উপর নিম্নাভিমুখী ক্রিয়াশীল অভিকর্ষজ বল=বস্তুটির ওজন

$$mg = 50\ kg \times 9{\cdot}8\ m/s^2 = 50 \times 9{\cdot}8\ N$$

বস্তুটির নিম্নাভিমুখী ত্বরণ, $f = 6{\cdot}8\ m/s^2$

মনে করি, বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল ঊর্ধ্বাভিমুখী বল=P

প্রশ্নের শর্তানুসারে, বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল নিম্নাভিমুখী অসম বল,

$= mg = P = mf = 50\ kg \times 6{\cdot}8\ m/s^2 = 50 \times 6\ 8\ N$

$\therefore P = mg - mf = (50 \times 9{\cdot}8 - 50 \times 6{\cdot}8) = 50 \times 3 = 150\ N$

উদাহরণ 4.20 একটি কামানের ভর 1000 kg এবং উহার একটি গোলার ভর 7·5 kg। গোলাটি 240 m/s গতিবেগে কামান হইতে বাহির হইয়া গেল। কামানটির প্রতিক্ষেপ বেগ কত হইবে ?

[The mass of a cannon is 1000 kg and that of the shot is 7·5 ke. The shot leaves the gun with a velocity of 240 m/s. What is the velocity of the recoil of the cannon ?]

সমাধান : কামান ও গোলা উভয়েই প্রথম অবস্থায় স্থির ছিল। সুতরাং ইহাদের মোট ভরবেগের মান শূন্য ছিল। ধরা যাক, গুলি ছুঁড়িবার পর গোলার গতিবেগ $= v$ এবং কামানের প্রতিক্ষেপ বেগ $= \mathrm{V}$

∴ ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র হইতে লেখা যায়, $\mathrm{MV}+mv=0$

এখানে, $\mathrm{M}=$কামানের ভর $= 1000$ kg

$m =$ গোলার ভর $= 7{\cdot}5$ kg

$v = 240$ m/s

$$\therefore \quad \mathrm{V} = -\frac{mv}{\mathrm{M}} = -\frac{7{\cdot}5 \times 240}{1000} = -1{\cdot}8 \text{ m/s}$$

উদাহরণ 4.21 সেকেণ্ডে 100 m/s গতিবেগে উল্লম্বভাবে নিম্নগামী একটি বোমা বিস্ফোরিত হইয়া দুইটি খণ্ডে বিভক্ত হইল। উক্ত খণ্ডদ্বয়ের ভরের অনুপাত 2 : 1। বিস্ফোরণের অব্যবহিত পরে অপেক্ষাকৃত ভারী খণ্ডটি 200 m/s গতিবেগে উল্লম্বভাবে নিচের দিকে নামিতে থাকে। বিস্ফোরণের অব্যবহিত পরে অপেক্ষাকৃত হাল্কা খণ্ডটির গতিবেগ কত ?

[A bomb falling vertically downwards with a velocity of 100 m/s burst into two fragments whose masses are in the ratio 2 : 1. The velocity of the heavier fragment immediately after the explosion is 200 m/s vertically downwards. What is the velocity of the lighter fragment immediately after the explosion ?]

(Jt. Entrance, 1976)

সমাধান : মনে করি, বিস্ফোরণের ফলে উৎপন্ন খণ্ড দুইটির ভর m_1 kg এবং m_2 kg $m_1 > m_2)$

শর্তানুসারে, $\frac{m_1}{m_2} = 2$ বা, $m_1 - 2\, m_2$ .. (i)

∴ অখণ্ড বোমার ভর $= (m_1 + m_2)$ kg

বিস্ফোরণের পূর্বে বোমার মোট ভরবেগ ছিল

$(m_1 + m_2) \times 100$ kg-m/s ... (ii)

এই ভরবেগের অভিমুখ উল্লম্ব রেখা বরাবর নিচের দিকে।

বিস্ফোরণের ফলে বোমার মোট ভরবেগের কোন পরিবর্তন হইবে না, কেননা বিস্ফোরণের সময় কোন বাহ্যিক বল বোমার উপর ক্রিয়া করে না।

মনে করি, অপেক্ষাকৃত হাল্কা খণ্ডটির (অর্থাৎ m_2 ভরবিশিষ্ট খণ্ডটির) গতিবেগ $= \mathrm{V}$ m/s

বিস্ফোরণের অব্যবহিত পরে অপেক্ষাকৃত ভারী খণ্ডটির (অর্থাৎ, m_1 ভরবিশিষ্ট খণ্ডটির) গতিবেগ $= 200$ m/s। এই গতিবেগ নিম্নাভিমুখী।

কাজেই, বিস্ফোরণের অব্যবহিত পরে উৎপন্ন খণ্ড দুইটির মোট ভরবেগ

$= m_1 \times 200 + m_2 \times \mathrm{V}$ kg-m/s ... (iii)

(ii) এবং (iii) হইতে পাই,

$$m_1 \times 200 + m_2 \times V = (m_1 + m_2) \times 100$$

বা, $2\, m_2 \times 200 + m_2 V = (2\, m_2 + m_2) \times 100$ [$\because m_1 = 2\, m_2$]

বা, $400 + V = 300$ বা, $V = -100$ m/s

কাজেই, অপেক্ষাকৃত হাল্কা খণ্ডটির গতিবেগ 100 m/s ; এই গতিবেগ ঋণাত্মক। নিম্নমুখী গতিবেগকে আমরা ধনাত্মক ধরিয়াছি। কাজেই আলোচ্য খণ্ডটির গতিবেগ ঊর্ধ্বাভিমুখী।

উদাহরণ 4.22 20 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে একটি স্প্রিং তুলার হুকের সহিত যুক্ত করা হইল। স্প্রিং-তুলাটি একটি লিফ্‌টের ছাদ হইতে ঝুলান রহিয়াছে। যখন (i) লিফ্‌টটি 0·2 m/s² ত্বরণ লইয়া উপরে উঠিতেছে, (ii) 0 1 m/s² ত্বরণ লইয়া নিচের দিকে নামিতেছে, (iii) 0·15 m/s সমবেগে উপরে উঠিতেছে তখন স্প্রিং-তুলার পাঠ কী হইবে ? ($g = 9{\cdot}8$ m/s²)

[An object of mass 20 kg is attached to the hook of a spring balance and the latter is suspended vertically from the roof of a lift. What is the reading on the spring balance when the lift is (i) ascending with an acceleration of 0·2 m/s², (ii) descending with an acceleration of 0 1 m/s², (iii) ascending with a uniform velocity of 0 15 m/s, ($g = 9{\cdot}8$ m/s²)]

সমাধান : মনে করি, স্প্রিং-তুলার টান = T নিউটন

(i) বস্তুটির উপর দুইটি বল ক্রিয়াশীল ; (a) স্প্রিং-এর টান T, উহা ঊর্ধ্বমুখে ক্রিয়া করিতেছে, (b) বস্তুর ওজন=20·0 × 9·8 নিউটন, ইহা নিম্নাভিমুখে ক্রিয়াশীল। বস্তুটি ত্বরণ লইয়া ঊর্ধ্বমুখে উঠিতেছে বলিয়া T-এর মান বস্তুর ওজন অপেক্ষা বেশি হইবে।

বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল ঊর্ধ্বমুখী অসম বল, $F = T - 20 \times 9{\cdot}8$

কিন্তু, $F = mf$, f = বস্তুর ত্বরণ = 0·2 m/s²

$\therefore\ T - 20 \times 9{\cdot}8 = mf = 20 \times 0\ 2$

$\therefore\ T = 20 \times [9\ 8 + 0{\cdot}2] = 200$ N

কাজেই, এক্ষেত্রে স্প্রিং-তুলার পাঠ = 200 N

(ii) যখন লিফ্‌টটি নিম্নাভিমুখে ত্বরণ লইয়া নামিতেছে তখন বস্তুর ওজন স্প্রিং-এর টান অপেক্ষা বেশি হইবে। এই সময়, $20 \times 9{\cdot}8 - T = mf$,

f = বস্তুর নিম্নাভিমুখী ত্বরণ = 0·1 m/s²

$\therefore\ T = 20 \times 9{\cdot}8 - mf = 20 \times 9{\cdot}8 - 20 \times 0{\cdot}1 = 20 \times 9{\cdot}7 = 194$ N

এক্ষেত্রে, স্প্রিং-তুলার পাঠ = 194 N

(iii) যখন বস্তুটি সমবেগে উপরের দিকে উঠিতেছে তখন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল ঊর্ধ্বমুখী অসম বল শূন্য। কাজেই, এই সময় স্প্রিং-এর টান, T = বস্তুর ওজন

$= 20 \times 9{\cdot}8\ \text{N} = 196$ N

এক্ষেত্রে, স্প্রিং-তুলার পাঠ = 196 N

উদাহরণ 4.23 70 kg ভরবিশিষ্ট এক ব্যক্তি একটি লিফ্‌টে দাঁড়াইয়া আছে। (i) লিফ্‌ট স্থির থাকিলে, (ii) লিফ্‌টটি $4\cdot9\ m/s^2$ ত্বরণে উপরে উঠিতে থাকিলে, (iii) লিফ্‌টটি সমবেগে উপরের দিকে উঠিতে থাকিলে, (iv) লিফ্‌টটি $4\ 9 m/s^2$ মন্দন লইয়া উপরে উঠিতে থাকিলে, (v) লিফ্‌টটি $4\ 9\ m/s^2$ ত্বরণ লইয়া নিচের দিকে নামিতে থাকিলে এবং (vi) লিফ্‌টটি সমবেগে নিচের দিকে নামিতে থাকিলে লিফ্‌টের ভূমির উপর ব্যক্তিটি কী বল প্রয়োগ করিবে? (অভিকর্ষজ ত্বরণ= $9\cdot8\ m/s^2$)।

[A man of mass 70 kg is standing on a lift. What will be the force exerted by the man on the floor of the lift (i) if the lift remains at rest, (ii) if the lift ascends with an acceleration of $4\cdot9\ m/s^2$, (iii) if the lift ascends with uniform velocity ; (iv) if the lift ascends with a retardation of $4\cdot9\ m/s^2$, (v) if the lift descends with an acceleration of $4\cdot9\ m/s^2$ and (vi) if the lift descends with a uniform velocity. (The acceleration due to gravity=$9\cdot8\ m/s^2$)]

সমাধান : (i) লিফ্‌ট যখন স্থির অবস্থায় আছে তখন লিফ্‌টের ভূমিতে ব্যক্তি-কর্তৃক প্রযুক্ত বল=ব্যক্তির ওজন=70 kg-wt

(ii) লিফ্‌টটি যখন f ($=4\cdot9\ m/s^2$) ত্বরণ লইয়া উপরে উঠিতে থাকে তখন লিফ্‌টের ভূমিতে ব্যক্তি-কর্তৃক প্রযুক্ত বল$=m(g+f)=70\ [9\cdot8+4\cdot9]$

$$=70\times14\cdot7\ N=\frac{70\times14\cdot7}{9\cdot8}\ kg\text{-}wt=105\ kg\text{-}wt$$

(iii) লিফ্‌টটি সমবেগে উপরের দিকে উঠিতে থাকিলে ইহার ত্বরণ $f=0$ হইবে। কাজেই এক্ষেত্রে লিফ্‌টের ভূমিতে প্রযুক্ত বল$=mg=70$ kg-wt

(iv) লিফ্‌টটি যখন $4\cdot9$ m/s মন্দন লইয়া উপরে উঠিতে থাকে তখন লিফ্‌টের ভূমিতে ব্যক্তি-কর্তৃক প্রযুক্ত বল$=m(g-f)=70(9\cdot8-4\cdot9)-70\times4\cdot9$ N

$$=\frac{70\times4\cdot9}{9\cdot8}kg\text{-}wt=35\ kg\text{-}wt$$

(v) লিফ্‌টটি যখন $4\cdot9\ m/s^2$ ত্বরণ লইয়া নিচে নামিতে থাকে তখন লিফ্‌টের ভূমিতে ব্যক্তি-কর্তৃক প্রযুক্ত বল$=m(g-f)=70\ [9\ 8-4\cdot9]$ N

$$=70\times4\cdot9\ N=\frac{70\times4\cdot9}{9\cdot8}kg\text{-}wt=35\ kg\text{-}wt$$

(vi) লিফ্‌টটি যখন সমবেগে নামিতে থাকে তখন $f=0$ বলিয়া লিফ্‌টের ভূমিতে ব্যক্তি-কর্তৃক প্রযুক্ত বল$=mg$=ব্যক্তির ওজন=70 kg-wt

উদাহরণ 4.24 1 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 10 cm/s গতিবেগে চলিতেছে এবং $0\cdot5$ kg ভরবিশিষ্ট অপর একটি বস্তু বিপরীত দিক হইতে 5 cm/s গতিবেগে আসিতেছে। পরস্পর সংঘর্ষের পর বস্তু দুইটি একে অন্যের সহিত জুড়িয়া গেলে গঠিত যুগ্মভরের বেগ এবং অন্তিম ও প্রাথমিক গতিশক্তির অনুপাত নির্ণয় কর।

[A body of mass 1 kg is moving with a velocity of 10 cm/s

and another body of mass 0·5 kg is approaching it from opposite direction with a velocity of 5 cm/s. If the two bodies coalesce, calculate the velocity of the combined mass and the ratio of final and initial kinetic energies.]

সমাধান : এখানে, প্রথম বস্তুর ভর, $m_1=1$ kg
এবং ইহার প্রাথমিক বেগ, $u_1=10$ cm/s$=0·1$ m/s
দ্বিতীয় বস্তুর ভর, $m_2=0·5$ kg
এবং ইহার প্রাথমিক বেগ, $u_2=-5$ cm/s$=-0·05$ m/s

[বস্তুদ্বয়ের বেগ বিপরীতমুখী বলিয়া প্রথম বস্তুর গতিবেগকে ধনাত্মক ধরিলে দ্বিতীয় বস্তুর গতিবেগকে ঋণাত্মক ধরিতে হইবে ।]

বস্তুদ্বয়ের প্রাথমিক ভরবেগ$=m_1u_1+m_2u_2$

$$=(1 \text{ kg})\times(0·1 \text{ m/s})+(0·5 \text{ kg})\times(-0·05 \text{ m/s})$$
$$=(0·1-0·025)=0·075 \text{ kg.m/s}$$

সংঘর্ষের পর বস্তুদ্বয় মিলিত হইয়া যে-বস্তু গঠিত হয় উহার ভর,

$$M=1+0·5=1·5 \text{ kg}$$

মনে করি, এই যুগ্মভরের গতিবেগ$=$V m/s

$\therefore$ অন্তিম ভরবেগ$=$MV$=1·5$ V kg.m/s ... (11)

ভরবেগের নিত্যতা সূত্রানুসারে, $1·5$ V$=0·075$

$$V=\frac{0·075}{1·5}=0·05 \text{ m/s}$$

$\therefore$ অন্তিম গতিশক্তি$=\frac{1}{2}$ MV$^2=\frac{1}{2}\times(1·5 \text{ kg})\times(0·05 \text{ m/s})^2$

$$=0·001875 \text{ J}$$

প্রাথমিক গতিশক্তি$=\frac{1}{2}m_1u_1{}^2+\frac{1}{2}m_2u_2{}^2$

$$=\frac{1}{2}(1 \text{ kg})\times(0·1 \text{ m/s})^2+\frac{1}{2}\times(0·5 \text{ kg})\times(-0·05 \text{ m/s})^2$$
$$=0·005+0·000625=0·005625$$

কাজেই, $\dfrac{\text{অন্তিম গতিশক্তি}}{\text{প্রাথমিক গতিশক্তি}}=\dfrac{0·001875}{0·005625}=\dfrac{1}{3}$

উদাহরণ 4.25 0·2 kg ভরবিশিষ্ট একটি বলের সহিত 3 kg ভরবিশিষ্ট একটি ধাতব প্লেটের স্থিতিস্থাপক সংঘাত ঘটিল। সংঘাতের পূর্বে প্লেটটি স্থির অবস্থায় ছিল। বলটির প্রারম্ভিক বেগ ছিল 30 m/s। সংঘাতের পর বলটির এবং প্লেটটির বেগ কত হইবে ?

[A ball of mass 0·2 kg collides elastically with a metallic plate of mass 3 kg. The plate was at rest befere collision. The initial velocity of the ball was 30 m/s. What are the velocities of the ball and the plate after collision ?]

সমাধান : বলটির প্রারম্ভিক গতিবেগ $u_1 = 30$ m/s

কাজেই, ইহার প্রারম্ভিক ভরবেগ $= m_1 u_1$

$= (0{\cdot}2 \text{ kg}) \times (30 \text{ m/s}) = 6 \text{ kg.m/s}$

সংঘাতের পূর্বে প্লেটটি স্থির ছিল। অর্থাৎ, প্লেটটির প্রারম্ভিক ভরবেগ,

$= m_2 u_2 = 0 \text{ kg.m/s}$

সুতরাং বল ও প্লেটের দ্বারা গঠিত সংস্থার প্রারম্ভিক ভরবেগ

$$= m_1 u_1 + m_2 u_2 = 6 \text{ kg.m/s} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

ধরি, বলটি অন্তিম (সংঘাতোত্তর) বেগ $= V_1$ m/s এবং প্লেটটির অন্তিম বেগ $= V_2$ m/s

∴ সংঘাতের পর আলোচ্য সংস্থার ভরবেগ

$$= m_1 V_1 + m_2 V_2 = 0{\cdot}2\, V_1 + 3V_2 \text{ kg.m/s} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র হইতে লেখা যায় যে,

$$= m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $6 = 0{\cdot}2V_1 + 3V_2 \quad \cdots \quad$ (iii)

সংঘাতের পূর্বে বলটির গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m_1 u_1{}^2$

$= \frac{1}{2} \times (0{\cdot}2 \text{ kg}) \times (30 \text{ m/s})^2 = 90 \text{ J}$

সংঘাতের পূর্বে প্লেটটির গতিশক্তি $= 0$ J

স্থিতিস্থাপক সংঘাতের যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা সূত্র প্রযোজ্য বলিয়া লেখা যায় যে,

সংস্থার সংঘাত-পূর্ব গতিশক্তি = সংস্থার সংঘাতোত্তর গতিশক্তি

বা, $90 = \frac{1}{2} \times (0{\cdot}2) \times V_1{}^2 + \frac{1}{2} \times 3 \times V_2{}^2$

বা, $90 = 0{\cdot}1\, V_1{}^2 + 1{\cdot}5\, V_2{}^2 \quad \cdots \quad$ (iv)

সমীকরণ (iii) হইতে পাই, $V_1 = (30 - 15V_2) \quad \cdots \quad$ (v)

(iv) এবং (v) নং সমীকরণ হইতে পাই,

$90 = 0{\cdot}1(30 - 15\, V_2)^2 + 1{\cdot}5\, V_2{}^2$

বা, $90 = 0{\cdot}1\, (900 - 900\, V_2 + 225\, V_2{}^2) + 1{\cdot}5V_2{}^2$

বা, $90 = 90 - 90\, V_2 + 22{\cdot}5\, V_2{}^2 + 1{\cdot}5\, V_2{}^2$

বা, $24\, V_2{}^2 = 90\, V_2$ বা, $V_2 = 0$ বা, $\frac{90}{24}$

কিন্তু V_2-এর মান শূন্য হইতে পারে না। সুতরাং $V_2 = \frac{90}{24} = 3{\cdot}75$ m/s

কাজেই, $V_1 = (30 - 15 \times V_2) = 30 - 15 \times 3{\cdot}75 = -26{\cdot}25$ m/s

এখানে, ঋণাত্মক চিহ্নটির তাৎপর্য এই যে, বলটির গতিবেগ ইহার প্রারম্ভিক গতিবেগের বিপরীতমুখী।

উদাহরণ 4.26 200 g এবং 300 g ভরবিশিষ্ট দুইটি ব্লক পরস্পরের দিকে ঘর্ষণহীন অনুভূমিক তল বরাবর 50 cm/s এবং 100 cm/s গতিবেগে চলিতেছে। (a) যদি ব্লক দুইটির সংঘাত ঘটে এবং উহারা একে অন্যের সহিত আটকাইয়া যায় তাহা হইলে উহাদের অন্তিম গতিবেগ নির্ণয় কর। (b) সংঘাতের সময় উহাদের গতিশক্তির হ্রাস কত হইবে নির্ণয় কর। (c) যদি উক্ত সংঘাত পূর্ণ স্থিতিস্থাপক হয় তাহা হইলে ব্লকদ্বয়ের অন্তিম গতিবেগ কত হইবে?

[Two blocks of mass 300g and 200 g are moving towards each other along a horizontal frictionless surface with velocities of 50 cm/s and 100 cm/s respectively. (a) If the blocks collide and stick together find their final velocity. (b) Find the loss of kinetic energy during collision. (c) Find the final velocity of each block if collision is completely elastic.]

সমাধান : (a) প্রথম ব্লকের ভর, $m_1 = 300$ g

এবং দ্বিতীয় ব্লকের ভর, $m_2 = 200$ g

যদি প্রথম বস্তুর গতিবেগ v_1-কে ধনাত্মক ধরা হয় তাহা হইলে দ্বিতীয় বস্তুর গতিবেগ v_2 ঋণাত্মক হইবে।

$$\therefore \quad u_1 = 50 \text{ cm/s এবং } u_2 = -100 \text{ cm/s}$$

কাজেই, ব্লকদ্বয়ের প্রাথমিক ভরবেগ $= m_1u_1 + m_2u_2$

$$= 300 \times 50 + 200 \times (-100) = -5000 \text{ g-cm/s} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

সংঘর্ষের ফলে ব্লক দুইটি মিলিত হইয়া যে-বস্তুর সৃষ্টি করে উহার ভর

$$M = (300 + 200) = 500 \text{ g}$$

এই একত্রিত ভরের গতিবেগকে V cm/s ধরিলে লেখা যায় যে.

অন্তিম ভরবেগ, $MV = 500 \times V$ g ··· (ii)

ভরবেগের নিত্যতা সূত্রানুসারে, $500\ V = -5000$ [(i) এবং (ii) হইতে]

$$\therefore \quad V = -10 \text{ cm/s}$$

ঋণাত্মক চিহ্ন হইতে বুঝা যাইতেছে যে, সংঘাতের পূর্বে দ্বিতীয় বস্তুটি যে-দিকে যাইতেছিল সংঘাতের পর একত্রিত ভরটি সেই দিকে যাইবে।

(b) প্রাথমিক গতিশক্তি, $= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$

$$= \tfrac{1}{2} \times 300 \times 50^2 + \tfrac{1}{2} \times 200 \times 100^2$$

$$= 375000 + 1000000 = 1375000 \text{ erg} \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

সংঘাতের ফলে উৎপন্ন যুগ্ম-ভরের গতিশক্তি

$$= \tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2} \times 500 \times 10^2 = 25000 \text{ erg} \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

$\therefore$ গতিশক্তির হ্রাস $= 1375000 - 25000 = 1350000$ erg $= 0{\cdot}135$ J

(c) যদি ব্লকদ্বয়ের সংঘাত স্থিতিস্থাপক হয় তাহা হইলে ধরা যায় যে, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় বস্তুর অন্তিম গতিবেগ যথাক্রমে v_1 এবং v_2।

কাজেই, ভরবেগের নিত্যতাসূত্র হইতে পাই,

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

বা, $300\ v_1 + 200\ v_2 = -5000$ [সমীকরণ (i) হইতে] ··· (v)

আবার গতিশক্তির নিত্যতা সূত্রানুসারে,

$$\tfrac{1}{2}mu_1^2 + \tfrac{1}{2}mu_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2$$

বা, $150v_1^2 + 100v_2^2 = 1375000$ [সমীকরণ (iii)] ··· (vi)

সমীকরণ (v) এবং (vi) হইতে পাই,

$$v_1 = -70 \text{ cm/s এবং } v_2 = 80 \text{ cm/s}$$

উদাহরণ 4.27 x-অক্ষাভিমুখে V গতিবেগে ধাবমান m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর সহিত y-অক্ষাভিমুখে v গতিবেগে ধাবমান M ভরবিশিষ্ট অপর একটি বস্তুর সংঘাত ঘটিল। এই সংঘাতের ফলে বস্তুদ্বয় পরস্পর যুক্ত হইয়া গেল।

(i) যুগ্মবস্তুটির ভরবেগের অভিমুখ ও মান এবং (ii) সংঘাতের সময় প্রাথমিক গতিশক্তির কত ভগ্নাংশ তাপে রূপান্তরিত হইল তাহা নির্ণয় কর।

[A body of mass m moving with velocity V in the x-direction collides with another body of mass M moving in the y-direction with a velocity v. They coalesce into one body during collision. Calculate (i) the direction and magnitude of the momentum of the final body, (ii) the fraction of initial kinetic energy transformed into heat during collision in terms of the two massages.]

(I. I. T. Adm. Test., 1977)

সমাধান : মনে করি, সংঘাতের ফলে বস্তুদ্বয় যুক্ত হইয়া যে-যুগ্মভর গঠন করে উহার গতিবেগ U, এই গতিবেগের অভিমুখ x-অক্ষের সহিত θ-কোণে আনত (চিত্র 4.8)। ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র হইতে নিম্নের সমীকরণ দুইটি পাওয়া যায়।

x-অক্ষাভিমুখী ভরবেগ বিবেচনা করিয়া লেখা যায়,

$m\text{V}=(\text{M}+m)\text{ U}\cos\theta$ (i)

এবং y-অক্ষাভিমুখী ভরবেগ বিবেচনা করিয়া লেখা যায়,

$\text{M}v=(\text{M}+m)\text{ U}\sin\theta$ ... (ii)

চিত্র 4.8

সমীকরণ (i) এবং (ii)-এর বর্গ ও যোগ করিয়া পাই,

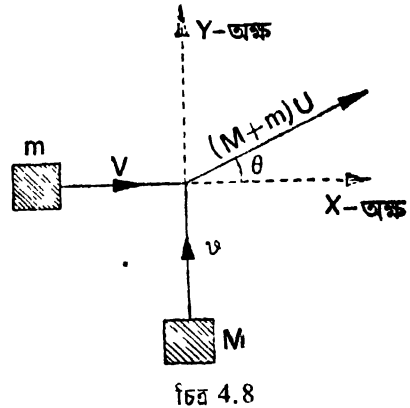
$$m^2\text{V}^2+\text{M}^2v^2=(\text{M}+m)^2\text{U}^2$$

সুতরাং, যুগ্মভরের গতিবেগ, $\text{U}=\dfrac{\sqrt{m^2\text{V}^2+\text{M}^2v^2}}{(\text{M}+m)}$ ... (iii)

(ii)-কে (i) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, $\tan\theta=\dfrac{\text{M}v}{m\text{V}}$

অর্থাৎ, যুগ্মভরের গতিবেগ (U) x-অক্ষের সহিত $\tan^{-1}(\text{M}v/m\text{V})$ কোণে আনত থাকে।

সংঘাতের পূর্বে বস্তুদ্বয়ের মোট গতিশক্তি, $\text{E}_1=\frac{1}{2}\text{M}v^2+\frac{1}{2}m\text{V}^2$

সংঘাতের ফলে গঠিত যুগ্মভরের গতিশক্তি, $\text{E}_2=\frac{1}{2}(\text{M}+m)\text{U}^2$

$$=\frac{1}{2}(M+m).\frac{m^2V^2+M^2v^2}{(M+m)^2}=\frac{1}{2}.\frac{m^2V^2+M^2v^2}{(M+m)}$$

কাজেই, প্রাথমিক গতিশক্তির f ভগ্নাংশ তাপে রূপান্তরিত হইলে লেখা যায়,

$$f=\frac{E_1-E_2}{E_1}=\frac{Mm}{M+m}\times\frac{(V^2+v^2)}{(Mv^2+mV^2)}$$

উদাহরণ 4.28 দুইটি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক চাক্তি A এবং B-এর একটির ভর অপরটির K গুণ। ইহাদের একটি মসৃণ অনুভূমিক তলের উপর বসান আছে। A চাক্তিটিকে U গতিবেগে B চাক্তির দিকে চালনা করা হইল এবং ইহারা মুখোমুখি সংঘাতে লিপ্ত হইল। এই সংঘাতের ফলে A চাক্তির গতিশক্তির কত ভগ্নাংশ B চাক্তিতে স্থানান্তরিত হইল তাহা নির্ণয় করিবার জন্য সংরক্ষণ সূত্রগুলি প্রয়োগ কর। ইহাও দেখাও যে, A চাক্তির ভর অপেক্ষা B চাক্তির ভর K গুণ হোক বা B চাক্তির ভর অপেক্ষা A চাক্তির ভর K গুণ হোক, উক্ত ভগ্নাংশের মান একই থাকিবে।

[Two perfectly elastic flat discs A and B. one K times as massive as the other rest on a smooth horizontal table. The disc A is made to move towards B with a velocity U and makes a head-on collision. Apply the conservation laws to find out an expression for the fraction of kinetic energy of A transformed to B. Also show that the fraction is the same whether B is K times as massive as A or vice versa.] (Jt. Entrance, 1978)

সমাধান : মনে করি, A চাক্তির ভর m_1 এবং B চাক্তির ভর m_2। প্রথমে ধরিয়া লই যে,

$$\frac{m_1}{m_2}=K,\quad \text{বা } m_1=Km_2 \quad \cdots \quad (i)$$

সংঘাতের পূর্বে A-এর গতিবেগ ছিল U এবং B-এর গতিবেগ ছিল শূন্য। কাজেই সংঘাতের পূর্বে চাক্তিদ্বয়ের মোট ভরবেগ

$$=m_1U+m_2.0=m_1U \quad \cdots \quad (ii)$$

মনে করি, সংঘাতের পর A এবং B-এর গতিবেগ যথাক্রমে v_1 এবং v_2 ; কাজেই, সংঘাতের পর চাক্তিদ্বয়ের মোট ভরবেগ$=m_1v_1+m_2v_2$

ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র হইতে লেখা যায়. $m_1U=m_1v_1+m_2v_2$

$$\text{বা, } Km_2U=Km_2v_1+m_2v_2 \quad \cdots \quad (iii)$$

সংঘাতের পূর্বে চাক্তিদ্বয়ের মোট গতিশক্তি$=\frac{1}{2}m_1U^2+0=\frac{1}{2}Km_2U^2$
এবং সংঘাতের পর চাক্তিদ্বয়ের মোট গতিশক্তি$=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$
যান্ত্রিক শক্তির সংরক্ষণ সূত্র হইতে লেখা যায়,

$$\frac{1}{2}m_1U^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2}Km_2U^2=\frac{1}{2}Km_2v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad \cdots \quad (iv)$$

সমীকরণ (iii) এবং (iv) হইতে পাই, $KU = Kv_1{}^2 + v_2$ ... (v)

$$KU^2 = Kv_1{}^2 + v_2{}^2 \quad \cdots \quad \text{(vi)}$$

সমীকরণ (vi) হইতে পাই, $v_2{}^2 = K^2(U - v_1)^2$ ... (vii)

এবং সমীকরণ (vi) হইতে পাই, $v_2{}^2 = K(U^2 - v_1{}^2)$ ... (viii)

(vii) এবং (viii) নং সমীকরণ হইতে পাই

$$1 = \frac{K(U - v_1)}{U + v_1} \text{ বা, } \quad v_1 = \left(\frac{K-1}{K+1}\right).U \quad \cdots \quad (ix)$$

∴ সংঘাতের পূর্বে A চাক্তির গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_1U^2 = \frac{1}{2}Km_2U^2$

A চাক্তির সংঘাতোত্তর গতিশক্তি

$$= \frac{1}{2}m_1v_1{}^2 = \frac{1}{2}Km_2v_1{}^2 = \frac{1}{2}Km_2\left(\frac{K-1}{K+1}\right)^2U^2$$

কাজেই, সংঘাতের ফলে A চাক্তির গতিশক্তির হ্রাস

$$= \frac{1}{2}Km_2U^2\left[1 - \left(\frac{K-1}{K+1}\right)^2\right] = \frac{1}{2}Km_2U^2.\frac{4K}{(K+1)^2} \quad \cdots \quad (x)$$

ইহাই A চাক্তি হইতে B চাক্তিতে স্থানান্তরিত গতিশক্তির পরিমাণ। কাজেই, সংঘাতের ফলে A চাক্তির গতিশক্তির যে-ভগ্নাংশ B চাক্তিতে স্থানান্তরিত হইল উহাকে f দ্বারা সূচিত করিলে লেখা যায়,

f = স্থানান্তরিত গতিশক্তি/প্রাথমিক গতিশক্তি

$$= \frac{1}{2}Km_2U^2.\frac{4K}{(K+1)^2}\Big/\frac{1}{2}Km_2U^2 = \frac{4K}{(K+1)^2} \quad \cdots \quad (xi)$$

এখন, $(m_1/m_2) = K$ না হইয়া $(m_2/m_1) = K$ হইলে f-এর মান কত হইবে তাহা নির্ণয় করিবার জন্য (xi) নং সমীকরণে K-এর পরিবর্তে $\frac{1}{K}$ বসাইতে হইবে। এক্ষেত্রে, A চাক্তির প্রাথমিক শক্তির f' ভগ্নাংশ B চাক্তিতে স্থানান্তরিত হইলে লেখা যায়,

$$f' = \frac{4 \times \left(\frac{1}{K}\right)}{\left(\frac{1}{K} + 1\right)^2} = \frac{4K}{(K+1)^2}$$

সুতরাং, $f = f'$

কাজেই, সিদ্ধান্তে আসা যায় যে, A চাক্তির ভর অপেক্ষা B চাক্তির ভরই K গুণ হোক বা B চাক্তির ভর অপেক্ষা A চাক্তির ভরই K গুণ হোক, সংঘাতের ফলে A চাক্তির প্রাথমিক গতিশক্তির একই ভগ্নাংশ A চাক্তি হইতে B চাক্তিতে স্থানান্তরিত হয়।

উদাহরণ 4.29 M ভরবিশিষ্ট কোন ট্রেন সমবেগে একটি সমতল লাইন বরাবর চলিতেছিল। ট্রেনের শেষের বগিটি হঠাৎ খুলিয়া গেল। যে-স্থানে বগিটি

ট্রেন হইতে খুলিয়া গেল সেই স্থান হইতে l দূরত্ব যাইবার পর চালক তাহা বুঝিতে পারিয়া ইঞ্জিনে বাষ্প সরবরাহ বন্ধ করিয়া দিল। যতক্ষণ ইঞ্জিনে বাষ্প সরবরাহ অব্যাহত থাকে ততক্ষণ ইঞ্জিন-কর্তৃক প্রযুক্ত টান (pull) স্থির থাকিলে এবং ট্রেনের গতির বিরুদ্ধে বাধাজনিত বল ভরের সমানুপাতিক হইলে দেখাও যে, যখন ট্রেন হইতে বিচ্যুত বগিটি এবং ট্রেনের অবশিষ্টাংশ উভয়েই স্থির অবস্থায় আসে তখন ইহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $Ml/(M-m)$, m হইল বগিটির ভর।

[A train of mass M is travelling with uniform velocity on a level line ; the last carriage, whose mass is m, becoming uncoupled, the driver discovers it after travelling on a distance l, and then shuts off steam. Show that when both part come to rest, the distance between them is $Ml/(M-m)$, if the resistance to motion be uniform and proportional to the weight and the pull of the engine be constant.] (Cambridge, 1891)

সমাধান : মনে করি, ট্রেনটির প্রাথমিক গতি $=u$

ট্রেনটি সমবেগে চলিতেছে বলিয়া লেখা যায়,

ইঞ্জিন-কর্তৃক প্রযুক্ত টান (pull) = ট্রেনের গতির বিরুদ্ধে বাধাজনিত বল

প্রশ্নের শর্তানুসারে, ট্রেনের গতির বিরুদ্ধে বাধাজনিত বল $\propto$ ভর, M

$\therefore$ ট্রেনের গতির বিরুদ্ধে বাধাজনিত বল $=$ KM, K একটি ধ্রুবক। ট্রেনটি সমবেগে চলিতেছে বলিয়া ইঞ্জিন-কর্তৃক প্রযুক্ত টানও KM হইবে। এখন বগিটি বিচ্যুত হইবার পর l দূরত্ব অতিক্রম করিবার পূর্ব পর্যন্ত ট্রেনের অবশিষ্টাংশের উপর প্রযুক্ত বল KM-ই থাকিবে, কেননা এই সময় বাষ্পের সরবরাহ অব্যাহত আছে। কিন্তু এই সময় ট্রেনটির ভর কমিয়া $(M-m)$ হওয়ায় ট্রেনের গতির বিরুদ্ধে বাধাজনিত বলও কমিয়া যাইবে। এই সময় বাধাজনিত বলের মান $=K(M-m)$

সুতরাং, বগিটি বিচ্যুত হইবার পর l দূরত্ব অতিক্রম করিবার পূর্ব পর্যন্ত সময়ে ট্রেনের অবশিষ্টাংশের উপর ক্রিয়াশীল অসম বল

$$= \text{ইঞ্জিন-কর্তৃক প্রযুক্ত টান} - \text{বাধাজনিত বল} = KM-K(M-m)=Km$$

সুতরাং, উক্ত সময়ের অবকাশে ট্রেনের অবশিষ্টাংশের ত্বরণ, $f=\dfrac{Km}{M-m}$

কাজেই, বগিটি বিচ্যুত হইবার পর l-দূরত্বে আসিতে ট্রেনের অবশিষ্টাংশের অন্তিম গতিবেগ V হইলে লেখা যায়,

$$v^2=u^2+2fl \quad \text{বা,} \quad v^2=u^2+2K.\frac{m}{M-m}.l \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

বিচ্ছিন্ন বগির উপর ক্রিয়াশীল বাধাজনিত বল $=Km$

বগিটির ভর m বলিয়া ইহার মন্দন, $f_2=\dfrac{Km}{m}=K$

ইহার প্রাথমিক বেগ u বলিয়া ট্রেন হইতে বিচ্যুত হইবার পর ইহা যে-দূরত্বে গিয়া স্থির হইবে তাহার মান s_1 হইলে লেখা যায়,

$$u^2=2f_2s_1=2Ks_1$$

বগিটি খসিয়া যাইবার পর l দূরত্ব গিয়া ট্রেনের চালক বাষ্প সরবরাহ বন্ধ করিয়া দিল। এই সময় ট্রেনের অবশিষ্টাংশের মন্দন f'

$$=\frac{\text{বাধাজনিত বল}}{\text{ট্রেনের অবশিষ্টাংশের ভর}}=\frac{K(M-m)}{(M-m)}=K$$

বাষ্প বন্ধ করিবার পর ট্রেনটি আরও s_2 দূরত্বে গিয়া স্থির হইলে লেখা যায়,

$$v^2=2f's_2=2Ks_2 \qquad \cdots \qquad (iii)$$

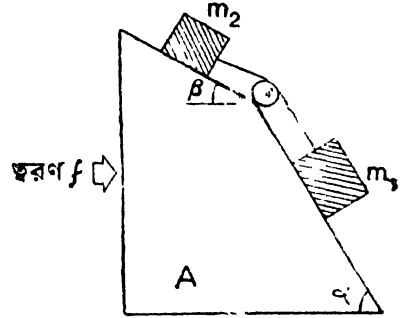
সমীকরণ, (i), (ii) এবং (iii) হইতে লেখা যায়,

$$2Ks_2=2Ks_1+2K\frac{m}{M-m}.l$$

বা. $s_2=s_1+\frac{m}{M-m}.l$ বা, $s_2-s=\frac{m}{M-m}.l$

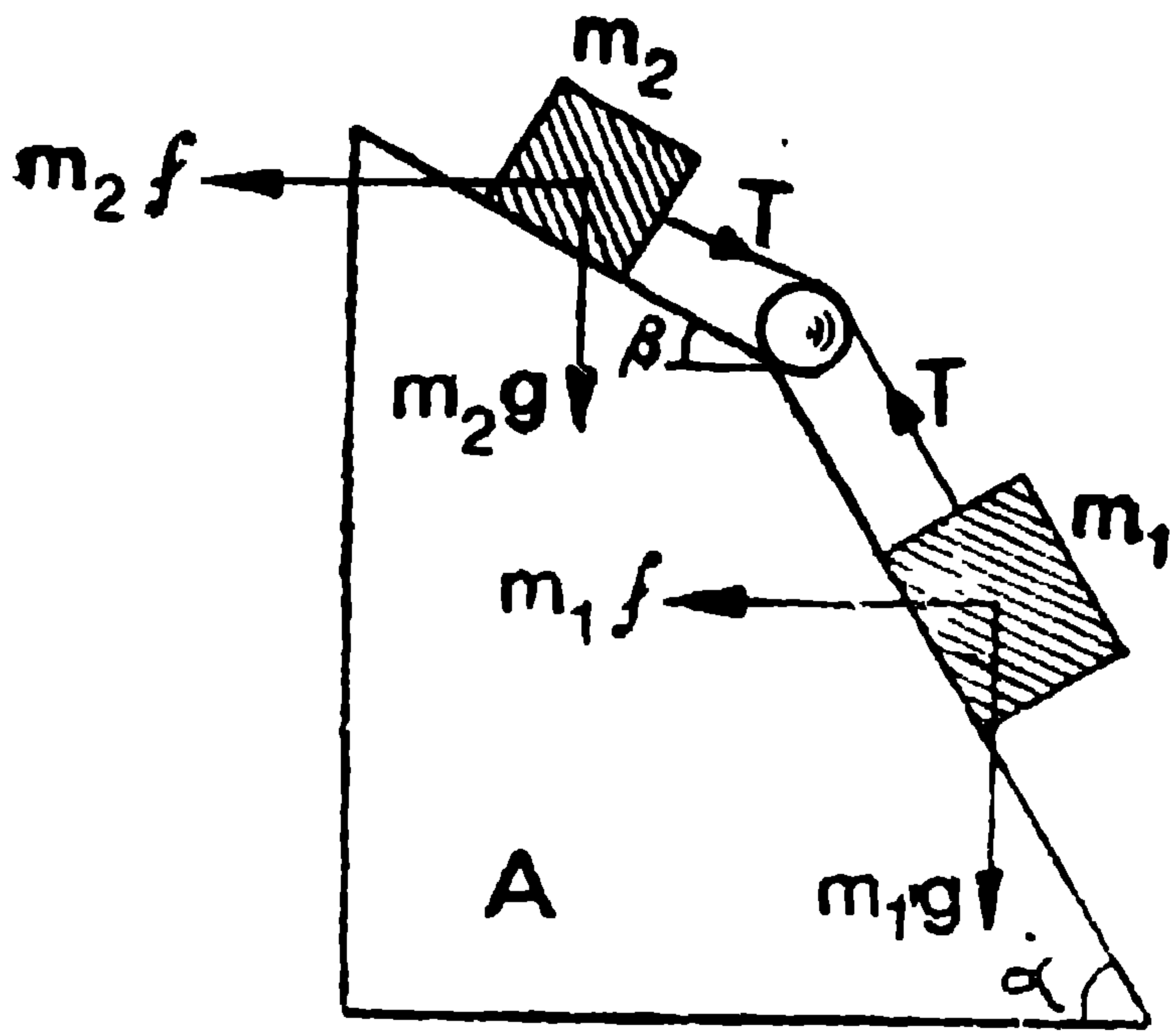
থামিবার পরে বগি এবং ট্রেনের অবশিষ্টাংশের দূরত্ব, s

$$=l+s_2-s_1=l+\frac{m}{M-m}.l=\frac{ml}{M-m}$$

উদাহরণ 4.30 অনুভূমিক টেবিলে বিদ্যমান A ব্লকের দুইটি ঘর্ষণহীন নততলে m_1 এবং m_2 ভরবিশিষ্ট দুইটি ঘনক রাখা হইয়াছে। ঘনকদ্বয় একটি সূতার সাহায্যে যুক্ত (চিত্র 4.9)। সমগ্র সংস্থাটি (অর্থাৎ ব্লক ও ঘনকদ্বয়) কোন্ অনুভূমিক ত্বরণ f লইয়া চলিলে ঘনকদ্বয় নততল বাহিয়া পিছলাইয়া নিচে পড়িবে না ? এই অবস্থায় সূতার টান কত হইবে ?

চিত্র 4.9

[Two cubes of masses m_1 and m_2 lie on two frictionless slopes of block B which rests on a horizontal table. The cubes are connected by a string which passes over a pulley as shown in the diagram. To what horizontal acceleration f should the whole system (*i.e.*, block and cubes) be subjected so that the cubes do not slide down the planes ? What is tension of the string in this situation ? (I. I. T. Adm. Test, 1978)

সমাধান : যখন A ব্লকটি f ত্বরণে ডান দিকে চলিতে থাকে তখন m_1 ভরবিশিষ্ট ঘনকের উপর m_1f মানের অলীক বল (pseudo-force) এবং m_2

ভরবিশিষ্ট ঘনকের উপর m_2f মানের অলীক বল ক্রিয়া করে। এই অলীক বলের ক্রিয়াভিমুখ A ব্লকের ত্বরণের অভিমুখের বিপরীত দিকে অর্থাৎ বাম দিকে। 4.10 নং চিত্রটি দেখ। m_2 ভরবিশিষ্ট ঘনকটির উপর তিনটি বল ক্রিয়া করিতেছে, যথা—(i) ঘনকটির ওজন m_2g, ইহা উল্লম্ব রেখা বরাবর নিম্নাভিমুখে ক্রিয়াশীল, (ii) সূতার টান T, ইহা নততলের সমান্তরালভাবে নিচের দিকে ক্রিয়াশীল, (iii) অলীক বল m_2f। ইহা অনুভূমিক অভিমুখে বাম দিকে ক্রিয়াশীল।

চিত্র 4.10

উপরের নততলে m_2 ভরবিশিষ্ট ঘনকটির সাম্য বিবেচনা করিয়া লেখা যায়,

$$m_2 f \cos\beta = T + m_2 g \sin\beta \qquad \text{(i)}$$

অনুরূপভাবে, নিচের নততলে m_1 ভরবিশিষ্ট ঘনকটির সাম্য বিবেচনা করিয়া লেখা যায় যে,

$$T + m_1 f \cos\alpha = m_1 g \sin\alpha \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) যোগ করিয়া পাই,

$$f(m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta) = g(m_1 \sin\alpha + m_2 \sin\beta)$$

$\therefore$ A ব্লকটির ত্বরণ, $f = g \times \dfrac{m_1 \sin\alpha + m_2 \sin\beta}{m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta}$

(i) নং সমীকরণে f-এর এই মান বসাইয়া পাই,

$$T = g \times \frac{m_1 m_2 \sin(\alpha - \beta)}{m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta}$$

উদাহরণ 4.31 5 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা প্রথমে একটি সরলরেখা বরাবর 10 cm/s গতিবেগে চলিতেছে। প্রাথমিক গতিমুখের সহিত 45° কোণ করিয়া বস্তুটির উপর $10\sqrt{2}$ dyn বল প্রয়োগ করা হইল। প্রথম সেকেণ্ডে বস্তুটির গতিশক্তির পরিবর্তনের মান নির্ণয় কর।

[A particle of mass 5 g is initially moving along a straight line with a velocity of 10 cm/s and then a force $10\sqrt{2}$ dyn is applied to it at an angle of 45° to the initial direction of motion. Calculate the change in its kinetic energy during the first second.]

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুকণাটি প্রথমে x-অক্ষাভিমুখে চলিতেছে। বস্তুকণার

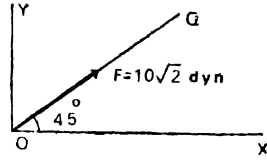
উপর x-অক্ষাভিমুখের সহিত 45° কোণ করিয়া $10\sqrt{2}$ dyn বল ক্রিয়া করিতেছে (চিত্র 4.11)।

চিত্র 4.11

x-অক্ষাভিমুখে এই বলের উপাংশ,

$F_x = F\cos 45 = 10\sqrt{2}\cos 45^\circ$
$= 10$ dyn

কাজেই, x-অক্ষাভিমুখে বস্তুকণার ত্বরণ,

$$f_x = \frac{F_x}{m} = \frac{10}{5} = 2 \text{ cm/s}^2$$

কাজেই, 1 s পরে x-অক্ষাভিমুখে বস্তুর গতিবেগ, v_x

$$= u + f_x \times 1 = 10 + 2\times 1 = 12 \text{ cm/s}^2 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল বলের y-উপাংশ F_y

$$F_y = F\sin 45^\circ = 10\sqrt{2}\sin 45^\circ = 10 \text{ dyn}$$

কাজেই, y-অক্ষাভিমুখে বস্তুকণার ত্বরণ, $f_y = \frac{F_y}{m} = \frac{10}{5} = 2$ m/s^2

1 s পরে y-অক্ষাভিমুখে বস্তুকণার গতিবেগ,

$$v_y = 0 + f_y \times 1 = 2 \text{ cm/s}^2 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

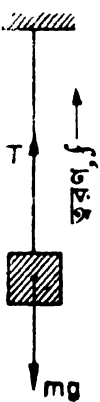
কাজেই, 1 s বস্তুকণার গতিবেগ, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$= \sqrt{12^2 + 2^2} = \sqrt{148}$$

বস্তুকণার প্রাথমিক গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}\times 5\times 10^2 = 250$ erg

বস্তুকণার অন্তিম গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 5\times 148 = 370$ erg

কাজেই, গতিশক্তির পরিবর্তন $= (370 - 250) = 120$ erg

উদাহরণ 4.32 উপেক্ষণীয় ভরবিশিষ্ট একটি দড়ি M lb পর্যন্ত ভরবিশিষ্ট বস্তুকে বিধৃত করিয়া রাখিতে পারে। এই দড়ির সাহায্যে সর্বোচ্চ কোন্ ভরবিশিষ্ট বস্তুকে এইরূপভাবে উপরে তোলা যায় যাহাতে t s সময় ধরিয়া সম-ত্বরণে চলিয়া বস্তুটি h ft উচ্চতায় উঠে?

চিত্র 4.12

[A rope of negligible mass can support a load whose mass must not exceed M lb. What is the mass of the greatest load which can be raised, so that after moving with uniform acceleration for t s from rest its height is h ft ?]

সমাধান : মনে করি, দড়ি হইতে m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে বাঁধিয়া উহাকে f সমত্বরণে উপরে তোলা হইতেছে (চিত্র 4.12)। এই সময় দড়ির টান T হইলে লেখা যায় যে,

$$T - mg = mf \text{ বা, } T = m(g+f) \quad \text{(i)}$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, T-র সর্বোচ্চ মান Mg, কেননা, ইহা অপেক্ষা বেশি টান পড়িলে দড়ি ছিঁড়িয়া যাইবে। কাজেই, m-এর সর্বোচ্চ মান

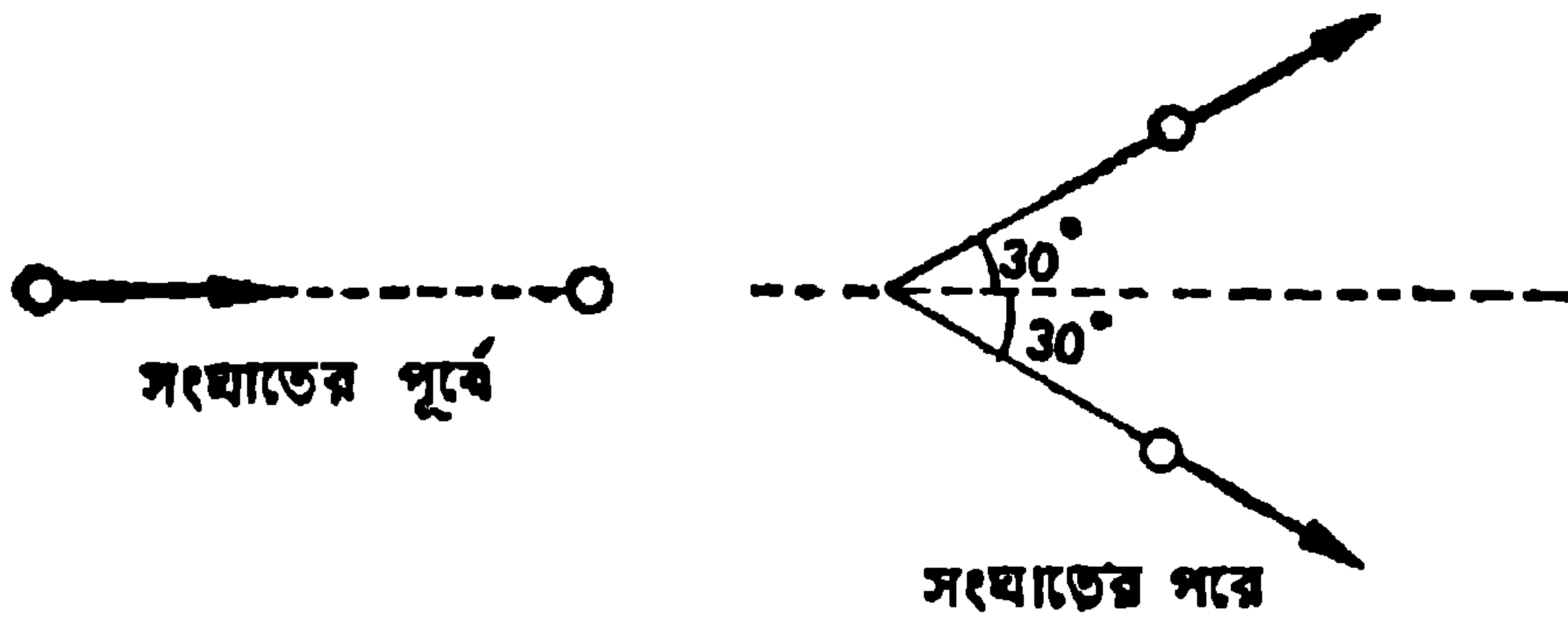
$$= Mg/(g+f) \text{ [সমীকরণ (i) হইতে] } \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

বস্তুটি t s সময়ে h ft উচ্চতায় উঠে বলিয়া লেখা যায়,

$$h = \frac{1}{2} ft^2 \quad \text{বা,} \quad f = \frac{2h}{t^2}$$

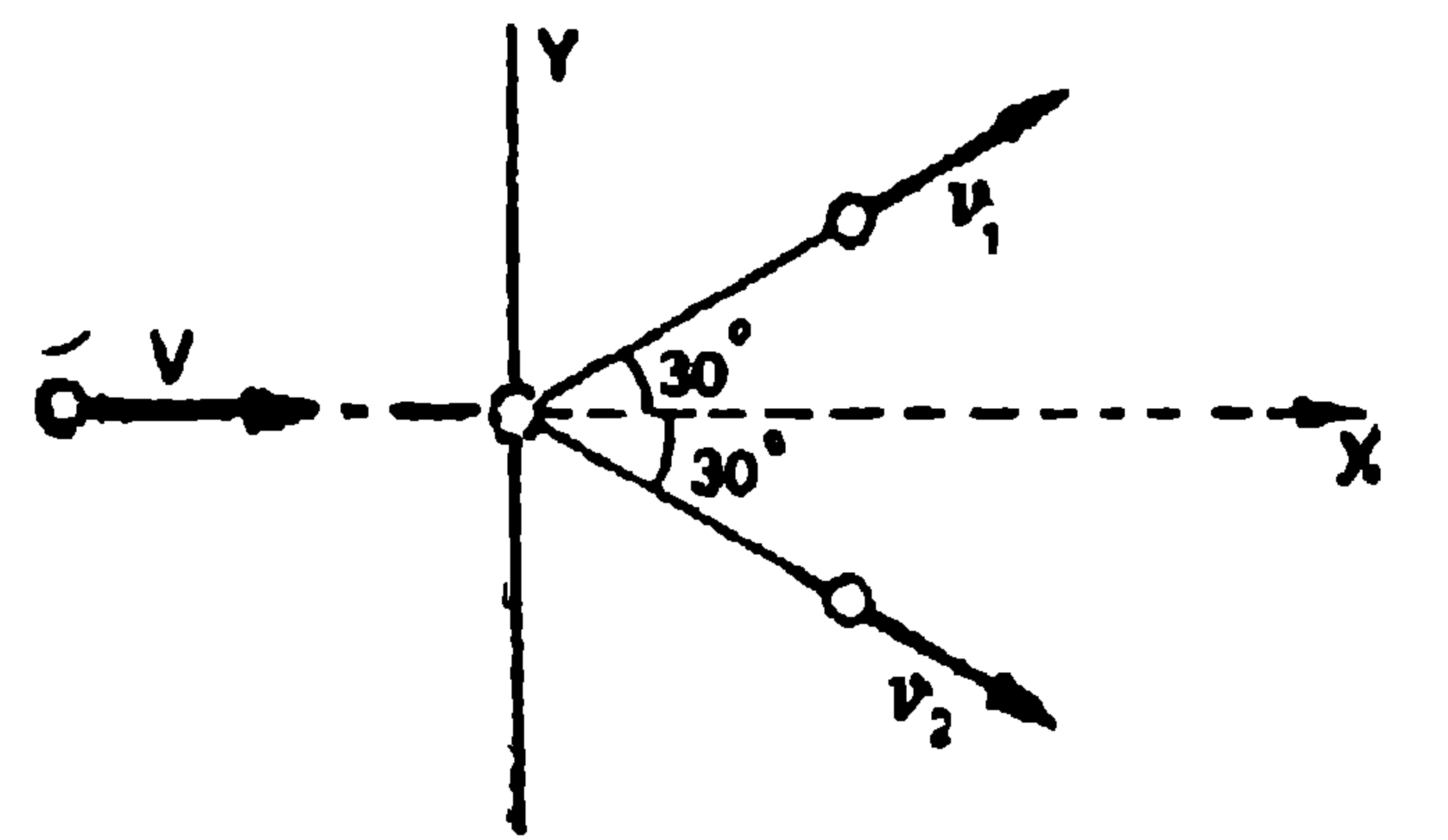
সমীকরণ (ii) এবং (iii) হইতে পাই,

$$m\text{-এর সর্বোচ্চ মান} = M \Big/ \left(1 + \frac{f}{g}\right) = M \Big/ \left(1 + \frac{2h}{gt^2}\right)$$

উদাহরণ 4.33 9 m/s দ্রুতিতে ধাবমান একটি বল অনুরূপ অপর একটি স্থির বলকে এমনভাবে ধাক্কা দিল যাহাতে সংঘাতের পর বল দুইটি প্রাথমিক গতিপথের সহিত 30° কোণে আনত থাকে (চিত্র 4.13)। উভয় বলের সংঘাতোত্তর গতিবেগ নির্ণয় কর। এই সংঘাত প্রক্রিয়ায় গতিশক্তি সংরক্ষিত হইবে কী ?

চিত্র 4.13

[A ball moving with a speed of 9 m/s strikes an identical ball at rest such that after collision the direction of each ball makes an angle 30° with the orginal line of motion.

Find the speeds of the two balls after collision. Is kinetic energy conserved in this collision process ?]

সমাধান : মনে করি, প্রথম (গতিশীল) বলটির প্রাথমিক বেগ V এবং সংঘাতের পর প্রথম ও দ্বিতীয় বলের গতিবেগ যথাক্রমে v_1 এবং v_2। ধরি, সংঘাতের পূর্বে প্রথম বস্তুটি x-অভিমুখে চলিতেছিল। কাজেই, v_1 এবং গতিবেগের অভিমুখ x-অক্ষের সহিত 30° কোণে আনত থাকিবে (চিত্র 4.14)।

চিত্র 4.14

x-অক্ষাভিমুখে এবং y-অক্ষাভিমুখে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র প্রয়োগ করিয়া পাই,

$$mV = mv_1 \cos 30^\circ + mv_2 \cos 30^\circ \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$\text{এবং } 0 = mv_2 \sin 30^\circ - mv_2 \sin 30^\circ \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

এখানে m হইল উভয় বলের ভর।

সমীকরণ (ii) হইতে পাই, $v_1 = v_2 = v$ (ধরি)

কাজেই, সমীকরণ (i) হইতে লেখা যায়,

$$V = v \cos 30^\circ + v \cos 30^\circ = 2v \cos 30^\circ$$

$$\text{বা,} \quad V=2v \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\, v$$

কিন্তু প্রশ্নের শর্তানুসারে, V=9 m/s

$$\therefore \quad \sqrt{3}\, v=9 \text{ m/s} \quad \text{বা,} \quad v=3\sqrt{3} \text{ m/s}$$

অর্থাৎ, সংঘাতের পর উভয় বলের গতিবেগ $3\sqrt{3}$ m/s হইবে।

সংঘাতের পূর্বে সংস্থার গতিশক্তি, E_1

$$=\tfrac{1}{2}mV^2=\tfrac{81}{2}.\, m \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

সংঘাতের পরে সংস্থার গতিশক্তি, E_2

$$=\tfrac{1}{2}mv_1{}^2+\tfrac{1}{2}mv_2{}^2=mv^2=m\times(3\sqrt{3})^2=27\, m \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

দেখা যাইতেছে যে, $E_1 > E_2$; অর্থাৎ, সংঘাতোত্তর গতিশক্তির মান সংঘাত-পূর্ব গতিশক্তি অপেক্ষা কম। কাজেই, আলোচ্য সংঘাতের ক্ষেত্রে গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় নাই।

উদাহরণ 4.34 ঘর্ষণহীন অনুভূমিক তল দিয়া ধাবমান একটি বল অপর একটি অনুরূপ স্থির বলকে 50 cm/s গতিবেগে আঘাত করিল। যদি সংঘাতটি স্থিতিস্থাপক হয় এবং যদি সংঘাতের পর প্রথম বলটির দ্রুতি 30 cm/s হয় তাহা হইলে উহা অপর বলটিতে কী গতিবেগ সঞ্চার করিবে ? দেখাও যে, সংঘাতের পর বল দুইটি পরস্পর সমকোণে চলিতে থাকিবে।

[A ball moving on a horizontal, frictionless plane hits an indentical ball at rest with a velocity of 50 cm/s. If the collision is elastic, calculate the speed imparted to the target ball if the speed of the projectile after the collision is 30 cm/s. Show that the two balls will move at right angles to each other after collision.]

সমাধান : মনে করি, সংঘাতের পূর্বে প্রথম বলটি x-অক্ষাভিমুখে V গতিবেগে চলিতেছিল এবং সংঘাতের পরে প্রথম বলটি x-অক্ষের সহিত θ_1 কোণ করিয়া v_1 গতিবেগে এবং দ্বিতীয় বলটি x-অক্ষের সহিত θ_2 কোণ করিয়া v_2 গতিবেগে চলিতে লাগিল (চিত্র 4.15)।

আলোচ্য সংঘাতটি স্থিতিস্থাপক বলিয়া এ ক্ষেত্রে রৈখিক ভরবেগ ও গতিশক্তি সংরক্ষিত হইবে।

চিত্র 4.15

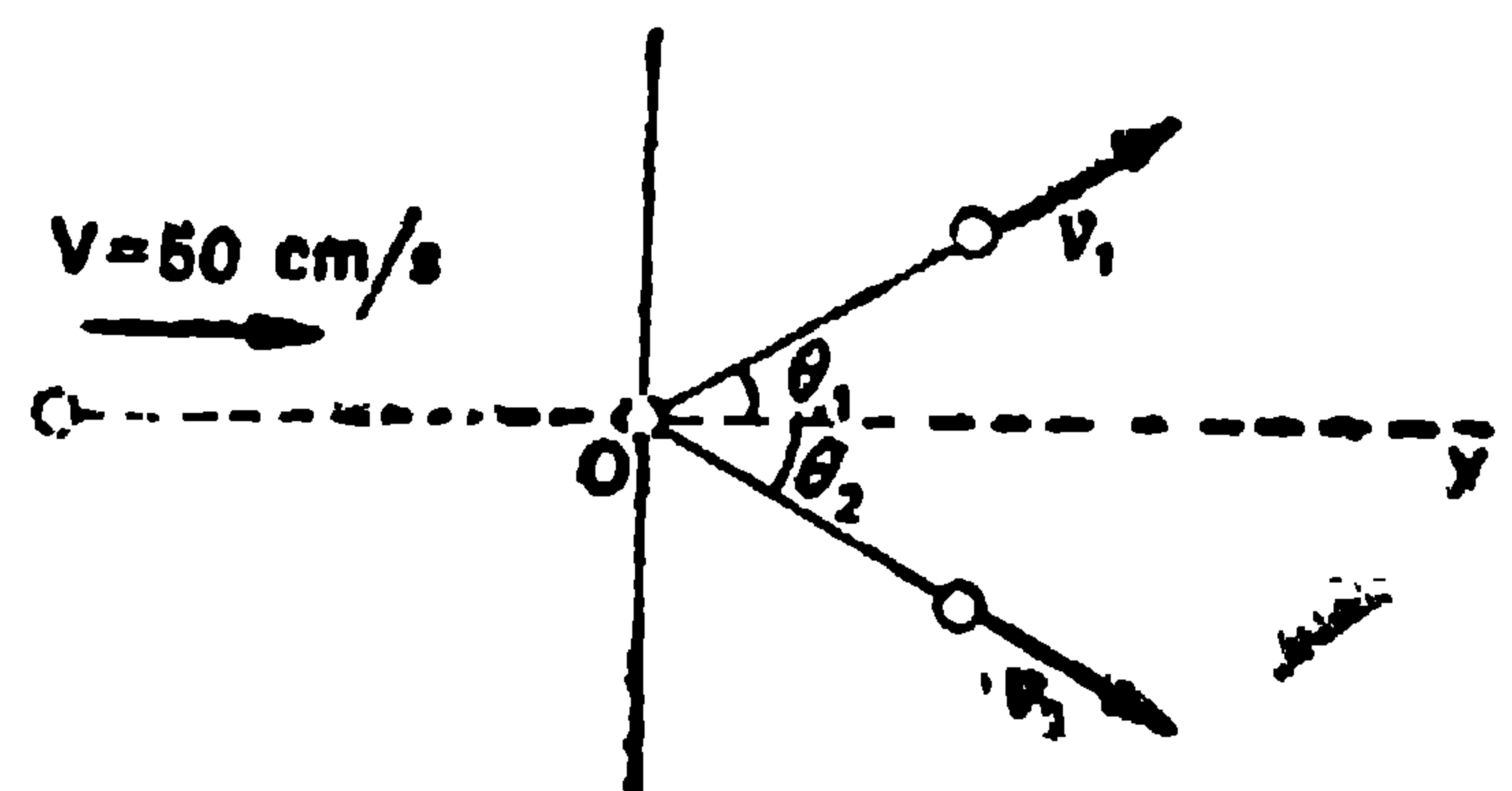
গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় বলিয়া লেখা যায়,

$$\tfrac{1}{2}mV^2=\tfrac{1}{2}mv_1{}^2+\tfrac{1}{2}mv_2{}^2$$

(m=উভয় বলের ভর)

$$\therefore \quad V^2=v_1{}^2+v_2{}^2$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, V=50 cm/s

এবং v_1=30 cm/s

কাজেই, $v_2{}^2 = V^2 - v_1{}^2 = 50^2 - 30^2 = 1600$

বা, $v_2 = 40$ cm/s

x- এবং y-অক্ষাভিমুখে রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র প্রয়োগ করিয়া পাই,

$$mV = mv_1 \cos\theta_1 + mv_2 \cos\theta_2 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

এবং $$0 = mv_1 \sin\theta_1 - mv_2 \sin\theta_2 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) হইতে লেখা যায়,

$$50 = 30 \cos\theta_1 + 40 \cos\theta_2 \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

আবার, সমীকরণ (ii) হইতে পাই, $0 = 30 \sin\theta_1 - 40 \sin\theta_2 \quad \cdots \quad \text{(iv)}$

(iii) এবং (iv) নং সমীকরণ বর্গ ও যোগ করিয়া পাই,

$$50^2 = 30^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) + 40^2(\cos\ \theta_2 + \sin^2\theta_2)$$
$$+ 2\times30\times40(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

বা, $50^2 = 30^2_2 + 40^2 + 2\times30\times40 \cos(\theta_1 + \theta_2)$

বা, $\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$

সুতরাং $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ (প্রমাণিত)

প্রশ্নমালা 4

1. এক মেগাডাইন পরিমাণ বল কোন বস্তুর উপর 10 সেকেণ্ড কাল ক্রিয়া করায় বস্তুটি 1 m/s গতিবেগ লাভ করিল। গ্রাম এককে বস্তুটির ভর নির্ণয় কর।

[A force of 1 megadyne acts upon a body for 10 seconds, and gives it a velocity of 1 m/s ; find the mass of the body in grammes.]

[10^6 g]

2. 120 lb ভরবিশিষ্ট কোন বস্তুর উপর একটি নির্দিষ্ট বল 3s ধরিয়া ক্রিয়া করে। ইহার পর বলের ক্রিয়া বন্ধ হইয়া যায়। পরবর্তী 3s সময়ে বস্তুটি 108 ft গেলে পাউণ্ড-ভার এককে বলটির পরিমাণ নির্ণয় কর।

[A certain force acts on a body of mass 120 lb for 3 s. The force then ceases to act. If the body covers a distance of 108 ft during the next 3 s, find the magnitude of the force in lb-wt.]

[45 lb-wt]

3. স্থির মানের একটি বল 30 গ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করায় বস্তুটি স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 3 সেকেণ্ড সময়ে 10 m দূরত্ব অতিক্রম করিল। বলটির মান কত ডাইন ?

[A constant force acting upon a mass of 30g causes it to move through a distance of 10 metres in 3 seconds, starting from rest. What is the value of the force in c. g. s. unit ? [6666·6 dyn]

4. 25 নিউটন মানের একটি বল 10 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করিলে বস্তুটির ত্বরণ কত হইবে ? স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া বস্তুটি 30 সেকেণ্ডে কতটা দূরত্ব অতিক্রম করিবে ?

[A force of 25 newtons acts upon a mass of 10 kg ; find the acceleration produced and the space described in 30 seconds from rest.] [2·5 m/s^2 ; 1125 m]

5. ইঞ্জিনের দরুণ একটি গাড়ির উপর 10^4N বল ক্রিয়া করে। গাড়ির গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল বায়ুজনিত এবং ভূমির ঘর্ষণজনিত রোধ 2000 N। যদি গাড়ির ত্বরণ 2 m/s² হয় তবে কিলোগ্রাম এককে গাড়ির ভর কত ?

[A force of 10^4N acts on car due of the engine. The wind and ground resistance acting aganist the motion of the car is 2000 N. If the acceleration of the car is 4 m/s², find the mass of the car in kilogrammes.] (2000 kg)

6. 5 গ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর উল্লম্বভাবে 980 ডাইন মানের একটি বল উর্ধ্বমুখে ক্রিয়া করিতেছে। স্থানীয় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 981 cm/s² হইলে বস্তুটির ত্বরণ কত হইবে ?

[A force of 980 dynes acts vertically upwards on a body of mass 5 g, at a place where the acceleration due to gravity is 981 cm/s². Find the acceleration of the body.] [785 cm/s²]

7. 6 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর 30 পাউণ্ডাল বল ক্রিয়া করিতেছে। 30 সেকেণ্ড পর ইহার গতিবেগ এবং ভরবেগ কত হইবে ?

[A body of mass 6 lb is acted upon by a constant force of 30 poundals; find its velocity and momentum at the end of 30 seconds.] [150 ft/s, 900 lb ft/s]

8. একটি বল 16 lb ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর 3 s ক্রিয়া করিল এবং ইহার পর ঐ বলের ক্রিয়া বন্ধ হইল। পরবর্তী 3 s সময়ে বস্তুটি 81 ft দূরত্ব অতিক্রম করিল। বস্তুটির উপর কত বল ক্রিয়া করিয়াছিল ?

[A force acts on a body of mass 16 lb for 3 s and then ceases to act. The mass travels 81 ft during next 3 s. What force acted on the body ?] [144 poundals]

9. 50 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর কোন্ বল ক্রিয়া করিয়া 1 মিনিট সময়ে বস্তুটিতে 45 cm/s গতিবেগ উৎপন্ন করিবে ?

[What force acting on a mass of 50 g for 1 minute will produce a velocity of 45 cm/s ?] [37·5 dyn]

10. 25 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর 10 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট বস্তুর ওজনের সমান বল ক্রিয়া করিলে বস্তুটির ত্বরণ কত হইবে ? ঐ বলের ক্রিয়ায় 5 মিনিট সময়ে বস্তুটিতে কী ভরবেগ সঞ্চারিত হইবে ?

[A force equal to the weight of 10 lb acts upon a mass of 25 lb. What is the acceleration produced and what momentum will be generated in 5 minutes ?] [12·8 ft/s², 96000 lb-ft/s]

11. সেকেণ্ডে 400 মিটার গতিবেগে ধাবমান 20 গ্রাম ভরবিশিষ্ট বুলেটের ভরবেগ কত ? যে স্থির বল বুলেটটিকে $\frac{1}{10}$ সেকেণ্ডে থামাইতে সক্ষম উহার মান নির্ণয় কর।

[What is the momentum of a bullet weighing 20 g moving with a velocity of 400 m/s. Find the uniform force which will stop it in $\frac{1}{10}$ second.] [800,000 gm-cm/s, 8 Mdyn]

12. স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 50 মিটার পথ অতিক্রম করিতে সম-ত্বরণে ধাবমান একটি বস্তুর গতিবেগ হইল 20 m/s ; সি. জি. এ. পদ্ধতিতে বস্তুটির ত্বরণের মান কত ?

[A body moving with uniform acceleration is found to have a velocity of 20 m/s after moving 50 metres from rest. Express the acceleration in c. g. s. units.] [4 cm/s²]

13. কোন স্থির বস্তুর উপর 20 lb-wt বল ক্রিয়া করায় বস্তুটি প্রথম সেকেণ্ডে 24 ft দূরত্ব অতিক্রম করিল। বস্তুটির ভর নির্ণয় কর।

[A uniform force equal to the weight of 20 lb acts upon a body which is initially at rest and causes it to move through 24 ft in the first second. Find the mass of the body.] [$13\frac{1}{8}$ lb]

14. 10 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর কী পরিমাণ ঊর্ধ্বমুখী বল প্রয়োগ করিলে বস্তুটি $7{\cdot}8\ m/s^2$ ত্বরণে নিচে পড়িবে? ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণের মান $9{\cdot}8\ m/s^2$।

[What shall be the upwards force of a body of mass 10 kg so that it causes the body to fall with an acceleration of $7{\cdot}8\ m/s^2$. Assume that the acceleration due to gravity is $9{\cdot}8\ m/s^2$.] [20 N]

15. 28 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু প্রতি মিনিটে 30 গজ গতিবেগে চলিতেছে। যে-বিরুদ্ধ বল বস্তুটির উপর ক্রিয়া করিয়া উহাকে 7 সেকেণ্ডে স্থির অবস্থায় আনে তাহার মান কত?

[A body of mass 28 lb is moving with a velocity of 30 yards per minute. What is the magnitude of the retarding force which will just bring it to rest in 7 seconds] [6 lb-wt]

16. একটি বলের প্রভাবে কোন বস্তুর গতিবেগ প্রতি মিনিটে ঘণ্টায় চার মাইল হারে বৃদ্ধি পায়। এই বলের মানের সহিত বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষ বলের তুলনা কর।

[The velocity of a body is observed to increase by four miles per hour in every minute of its motion ; compare the force acting on it with the force of gravity.] [1 : 327]

17. এক কিলোগ্রাম ভরবিশিষ্ট কোন বস্তুর উপর 60 dyn মানের একটি স্থির বল কতক্ষণ ধরিয়া ক্রিয়া করিলে বস্তুটি 3 m/s গতিবেগ সঞ্চারিত হইবে?

[During what time must a constant force of 60 dyn act upon a body of 1 kg in order to generate in it a velocity of 3 m/s ?]
[1 ঘণ্টা 23 মিনিট 20 সেকেণ্ড]

18. একটি স্থির মানের বল 150 g ভরের উপর 10 s ধরিয়া ক্রিয়া করিয়া উহাতে 50 cm/s গতিবেগ উৎপন্ন করিল। উক্ত বলের সহিত এক গ্রাম ভরবিশিষ্ট বস্তুর ওজনের তুলনা কর।

[A certain force of constant magnitude acts upon a mass of 150 g for 10 seconds, and produces in it a velocity of 50 cm/s. Compare the force with the weight of a gramme.]
[The force is to the weight of a gramme as 25,000 to 327]

19. কোন নির্দিষ্ট মানের বল 14 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর 10 s ক্রিয়া করিয়া উহাতে 128 ft/s গতিবেগ উৎপন্ন করে। এই বলের সহিত এক পাউণ্ড ভরের ওজনের তুলনা কর এবং এই বল এক টন ভরের উপর ক্রিয়া করিয়া যে-ত্বরণ সৃষ্টি করিবে তাহার মান নির্ণয় কর।

[A certain force acting on a mass of 14 lb for 10 seconds produces in it a velocity of 128 ft/s. Compare the force with the weight of one pound, and determine the acceleration which it would produce in a mass of one ton. [5·6 : 1, $0{\cdot}08\ ft/s^2$]

20. 5 kg ভরের একটি বন্দুকের নল হইতে 8 g ভরের একটি গুলি 400 m/s বেগে ছোঁড়া হইল। বন্দুকটির প্রতিক্ষেপ বেগ নির্ণয় কর।

[A 8 g bullet is shot from a 5 kg gun with a speed of 400 m/s. Find the velocity of recoil of the gun]

[64 cm/s]

21. 4 lb ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে 8 ft/s গতিবেগে ধাবমান দেখা গেল। এই মুহূর্তে বস্তুটির উপর উহার গতির অভিমুখে স্থির মানের একটি বল ক্রিয়া করিতে আরম্ভ করিল এবং 20 s সময়ে ইহার গতিবেগ বৃদ্ধি পাইয়া 24 ft/s হইল। বলটির মান কত ?

[A body of mass 4 lb is observed to be moving at a rate of 8 ft/s ; at this instant a constant force begins to act upon it in the direction of its motion, and after 20 seconds its velocity has increased to 24 ft/s. Determine the magnitude of the force.] [3·2 poundals]

22. $5\frac{1}{2}$ আউন্স ভরবিশিষ্ট একটি ক্রিকেট-বল সেকেণ্ডে 30 ft গতিবেগে চলিতেছিল। উহাকে $\frac{1}{8}$ সেকেণ্ড সময়ে স্থির অবস্থায় আনা হইল। উহার গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল বলের গড় মান নির্ণয় কর।

[A cricket-ball weighing $5\frac{1}{2}$ oz and moving with a speed of 30 ft/s is brought to rest in $\frac{1}{8}$ second. Calculate the average stopping force employed.] (H. S., 1963) [$51\frac{9}{16}$ poundals]

23. 1000 ft/s দ্রুতি-সম্পন্ন এবং 2 আউন্স ভরবিশিষ্ট একটি বুলেট কোন লক্ষ্যবস্তুতে 1 ইঞ্চি প্রবিষ্ট হয়। বুলেটের উপর ক্রিয়াশীল বিরুদ্ধ বলের মান নির্ণয় কর। লক্ষ্যবস্তুতে প্রবিষ্ট হইতে বুলেটটি কত সময় লইবে ?

[A bullet weighing 2 oz and moving with a speed of 1000 ft/s penetrates 1 inch into a target. Calculate the opposing force. How long does it require for the penetration ?]

[$7{\cdot}5 \times 10^5$ poundals, $10{\cdot}67 \times 10^{-3}$ s]

24. 25 g ভরবিশিষ্ট এবং 100 cm/s গতিবেগসম্পন্ন একটি বস্তুর গতির বিরুদ্ধে 200 dyn বল ক্রিয়া করিলে বস্তুটি থামিবার পূর্ব পর্যন্ত কতক্ষণ চলিবে এবং কতটা দূরত্ব অতিক্রম করিবে ?

[A body of mass 25 g moving with a velocity of 100 cm/s is opposed by a force of 200 dyn. How long and how much does the body travel before it comes to rest ?] [12·5 s, 625 cm]

25. 5 আউন্স ভরবিশিষ্ট একটি ক্রিকেট-বলকে 60 ft/s বেগে ছোঁড়া হইল। ব্যাটস্‌ম্যান বলটিকে আঘাত করায় উহা 40 ft/s গতিবেগে প্রতিক্ষিপ্ত হইয়া নিক্ষেপকারীর নিকট ফিরিয়া গেল। ব্যাট ও বলের সংস্পর্শ $\frac{1}{4}$ s স্থায়ী হইলে বলটির উপর প্রযুক্ত বলের মান কত ?

[A cricket-ball weighing 5 oz is bowled with a speed of 60 ft/s. The batsman hits it so that it returns with a speed of 40 ft/s to the bowler. If the duration of contact between the bat and the ball is $\frac{1}{4}$ s, calculate the force exerted on the ball.] [125 poundals]

26. একটি তাপ-ইঞ্জিন হইতে একটি জলের জেট বাহির হইয়া একটি দেওয়ালে 40 ft/s গতিবেগে লম্বভাবে আঘাত করিতেছে। জলের জেটটি দেওয়ালে কী পরিমাণ চাপ প্রয়োগ করিতেছে ? প্রতিক্ষেপের প্রভাব উপেক্ষা কর। (এক ঘনফুট জলের ভর = 62·4 lb)।

[A jet of water ejected from a heat-engine strikes the wall

normally at a velocity of 40 ft/s. What is the pressure exerted by the jet on the wall ? Neglect the effect of rebound.) (Mass of 1 cubic foot of water = 62·4 lb)] [3120 lb-wt/ft^2]

27. একটি অগ্নি-নির্বাপক যন্ত্র এমন হারে জল পাম্প করে যাহাতে নির্গম-মুখ হইতে 15 m/s^2 বেগে জল বাহির হয়। যদি জলধারা দেওয়ালের উপর লম্বভাবে গিয়া পড়ে এবং যদি জলের প্রতিক্ষেপ উপেক্ষা করা যায় তাহা হইলে দেওয়ালে প্রযুক্ত চাপ নির্ণয় কর। (1 m^3 জলের ভর 1000 kg)।

[A fire engine pumps water at such a rate that the velocity of the water leaving the nozzle is 15 m/s^2. If the jet be directed perpendicularly on to a wall and the rebound of the water be neglected, calculate the pressure on the wall. (1 m^3 water weighs 1000 kg)] [Oxford and Cambridge Schools Examination]

($22·5 \times 10^4$ N/m^2)

28. 50 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে 100 m/s প্রাথমিক বেগে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বমুখে ছোঁড়া হইল। 5 সেকেণ্ড পর বস্তুটির বিস্ফোরণ ঘটিল, ফলে উহা দুইটি খণ্ডে বিভক্ত হইয়া পড়িল। ইহাদের মধ্যে 20 kg ভরবিশিষ্ট খণ্ডটি 150 m/s বেগে ঊর্ধ্বমুখে উঠিতে থাকে। ঐ মুহূর্তে অপর খণ্ডটির গতিবেগ কত হইবে ? বিস্ফোরণের 3 সেকেণ্ড পর উৎপন্ন খণ্ড দুইটির ভরবেগের যোগফল নির্ণয় কর। বিস্ফোরণ না ঘটিলে বস্তুটির ভরবেগ কত হইত ?

[A body of mass 50 kg is shot vertically upwards with an initia velocity of 100 m/s. After 5 seconds, it explodes, into two fragments, one of which having mass 20 kg travels vertically upwards with a velocity of 150 m/s. What is the velocity of the other fragment at that instant ? Calculate the sum of the momenta of the two fragments 3 seconds after the explosion. What would be the momentum of the body if there were no explosion ?]

[·15 m/s নিচের দিকে , 1080 kg-m/s, 1080 kg-m/s]

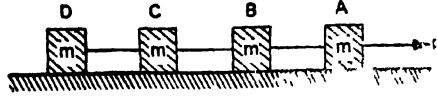
29. একটি ইঞ্জিন অনুভূমিক সমতল ভূমির উপর দিয়া 80 ft/s গতিবেগে ধাবিত হইতেছে। এই সময় ইঞ্জিনের বাষ্প সরবরাহ বন্ধ করিয়া দেওয়া হইল। ঘর্ষণজনিত বাধার মান টন প্রতি 14 lb-wt হইলে স্থির হইবার পূর্বে ইঞ্জিনটি কতদূর পর্যন্ত যাইবে এবং কতক্ষণ যাইবে ?

[An engine is running at a rate of 80 ft/s on level ground, when the steam is shut off. Assuming that the frictional resistances are equivalent to a weight of 14 lb per ton ; find how far the engine will run and for how long ? ($g = 32$ ft/s^2)] [16,000 ft ; 400 s]

30. একটি বাষ্পচালিত ইঞ্জিন 200 টন ওজনবিশিষ্ট একটি স্থির ট্রেনে 5 মিনিটে প্রতি ঘণ্টায় 45 মাইল গতিবেগ সঞ্চার করে। অপর একটি ইঞ্জিন একই সময়ে 300 টন ওজনবিশিষ্ট স্থির ট্রেনে ঘণ্টায় 30 মাইল গতিবেগ সঞ্চার করে। প্রথম ও দ্বিতীয় ইঞ্জিন-কর্তৃক প্রযুক্ত বলের অনুপাত নির্ণয় কর।

[A steam engine imparts a velocity of 45 mi/h to a train of mass 200 tons initially at rest in 5 minutes. Another engine imparts a velocity of 30 miles/hr to a train of mass 300 tons within the same time. What is the ratio of the forces applied by the two engines ?]

[1 : 1]

31. m ভরবিশিষ্ট একই প্রকার চারিটি ব্লককে সূতার সাহায্যে যুক্ত করিয়া একটি অনুভূমিক টেবিলে বসান হইল (চিত্র 4.16)। প্রথম ব্লকটিতে P বল প্রয়োগ করা হইল। P = 16 N হইলে প্রতিটি সূতার টান নির্ণয় কর। ব্লক ও টেবিলের স্পর্শতলের ঘর্ষণ-বল উপেক্ষা কর।

চিত্র 4.16

[Four similar blocks each of mass m are joined by strings and placed on a smooth table (Fig. 4.16). A force P is applied to the first block. If P = 16 N, find the tension in each of the strings. Neglect the frictional forces between the blocks and the table.]

[A ও B ব্লকের মধ্যবর্তী সূতার টান = 12 N, B ও C ব্লকের মধ্যবর্তী সূতার টান = 8 N, C ও D ব্লকের মধ্যবর্তী সূতার টান = 4 N]

32. 30 টন ভরবিশিষ্ট একটি রেল-ইঞ্জিন ঘণ্টায় 45 মাইল বেগে চলিতেছে। ইহাকে (i) 132 ft দূরত্বের মধ্যে থামাইতে এবং (ii) 20 সেকেণ্ড সময়ের মধ্যে থামাইতে কী বল প্রয়োজন হইবে ?

[A locomotive engine of mass 30 tons is travelling with a speed of 45 miles/hr. What force is necessary to bring it to rest (a) within a distance of 132 ft, (b) within 20 seconds.]

[$11{\cdot}08 \times 10^6$ poundals, $22{\cdot}17 \times 10^4$ poundals]

33. 0·5 আউন্স ভরবিশিষ্ট একটি বুলেটকে অনুভূমিকভাবে ছোঁড়া হইল। বুলেটটি 600 ft/s গতিবেগে একটি স্থির কাঠের তক্তার উপর আঘাত করিল এবং উহাকে ভেদ করিয়া 400 ft/s গতিবেগে বাহির হইয়া আসিল। কাঠ-কর্তৃক প্রযুক্ত বিরুদ্ধ বলের গড় মান কত ? কাঠের তক্তার বেধ অর্ধেক হইলে বুলেটটি উহা ভেদ করিয়া কী গতিবেগে বাহির হইয়া আসিত ?

[A bullet of mass 0·5 oz is fired horizontally. It strikes a fixed plank of wood 8 inches thick with a velocity of 600 ft/s and emerges with a velocity of 400 ft/s. What is the average resistance of the wood ? With what velocity would the bullet emerge if the plank were half as thick ?] [4687·5 poundals, 509·9 ft/s]

34. একটি জলের পাইপ 25 cm/s দ্রুতিতে 40 cm^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ছিদ্র হইতে জল উৎক্ষেপ করিতেছে। যদি এই জল একটি দৃঢ় দেওয়ালে লম্বভাবে আঘাত করে তাহা হইলে ডাইন এককে দেওয়ালে প্রযুক্ত বল নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, সংঘাতের পর দেওয়ালের অভিলম্বের দিকে জলের গতিবেগ শূন্য।

[A hose ejects water at a speed of 25 cm/s through a hole of area 40 cm^2. If the water strikes a rigid wall normally, calculate the force exerted on the wall in dyne. Assume that the velocity of the water normal to the wall is zero after collision.] [25000 dyn]

35. 20 g ভরবিশিষ্ট এবং 30 cm/s গতিবেগে ধাবমান একটি ক্রিকেট-বলকে ব্যাটের দ্বারা আঘাত করিবার ফলে উহার গতিমুখ বদলাইয়া বিপরীত দিকে 60 cm/s বেগে চলিতে লাগিল। ক্রিকেট বলটির উপর প্রযুক্ত বলের ঘাত (impulse) কত ? যদি ব্যাটে-বলে সংঘাত 0·01 s স্থায়ী হয় তাহা হইলে নিউটন এককে ব্যাট-কর্তৃক প্রযুক্ত বলের মান নির্ণয় কর।

[A cricket-ball of mass 20 g moving with a velocity of 30 cm/s is hit by a bat which causes it to move in reverse direction with a

velocity of 60 cm/s. What is the impulse of the force ? If the blow lasts for 0 01 s, find the average force in newton exerted by the bat.]
[1800 g.cm/s. 1·8 N]

36. 9×10^{-28} g ভরবিশিষ্ট একটি ইলেকট্রন একটি ডায়োড ভাল্‌ভের ক্যাথোড হইতে শূন্য প্রাথমিক বেগে নির্গত হইয়া আসিল এবং একটি সরলরেখা বরাবর 1 cm দূরে অবস্থিত অ্যানোডের দিকে চলিতে লাগিল। ইলেকট্রনটি 6×10^8 cm/s গতিবেগে অ্যানোডে পৌঁছিল। যদি ত্বরণ-সৃষ্টিকারী বলটি ধ্রুবক হয় তাহা হইলে (i) এই বল, (ii) ইলেকট্রনটির অ্যানোডে পৌঁছিবার জন্য প্রয়োজনীয় সময় এবং (iii) ইহার ত্বরণ নির্ণয় কর। ইলেকট্রনের উপর অভিকর্ষের প্রভাব উপেক্ষা কর।

[An electron of mass 9×10^{-28} g leaves the cathode of a diode valve with zero initial velocity and travels along a straight line towards its anode which is 1 cm away. The electron reaches the anode with a velocity of 6×10^8 cm/s. If the accelerating force is constant, (i) find the force, (ii) the time to reach the anode and (iii) the acceleration. Neglect the influence of gravity on electron.]
[$1{\cdot}62 \times 10^{-10}$ dyn, $3{\cdot}33 \times 10^{-9}$ s, $1{\cdot}8 \times 10^{17}$ cm/s^2]

37. অনুভূমিক অভিমুখে v m/s সমদ্রুতিতে চলমান একটি বাহক বেল্টের উপর M kg/s হারে বালি পড়িতেছে। (a) এই দ্রুতি বজায় রাখিবার জন্য কী পরিমাণ অতিরিক্ত বল প্রয়োগ করিতে হইবে ? (b) এই বল কী হারে কার্য করে এবং (c) প্রতি সেকেণ্ডে বেল্টের বালির গতিশক্তির পরিবর্তন কত তাহা নির্ণয় কর। (b) এবং (c) অংশের উত্তরের পার্থক্য ব্যাখ্যা কর।

[Sand falls at the rate of M kg/s on a conveyor belt moving horizontally at a constant speed of v m/s. Calculate (a) the extra force necessary to maintain the speed, (b) the rate at which work is done by the force, (c) the change in kinetic energy per second of the sand on the belt. Explain the difference in the results of (b) and (c).]
[(a) Mv N, (b) Mv^2 W (c) $\frac{1}{2} Mv^2$ W]

38. 0·4 kg ভরবিশিষ্ট একটি বলের সহিত 6 kg ভরবিশিষ্ট একটি ধাতব প্লেটের স্থিতিস্থাপক সংঘাত ঘটিল। সংঘাতের পূর্বে প্লেটটি স্থির ছিল। বলটির প্রাথমিক গতিবেগ ছিল 60 m/s। সংঘাতের পর বলটির এবং প্লেটটির গতিবেগ কত হইবে ?

[A ball of 0·4 kg collides elastically with a metallic plate of mass 6 kg. The plate was at rest before collision. The initial velocity of the ball was 60 m/s. What are the velocities of the ball and the plate after collision ?]

[−52·50 m/s (এই বেগ বলের প্রাথমিক গতিবেগের বিপরীতমুখী) 7·5 m/s]

39. 100 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 10 cm/s গতিবেগে চলিতেছে এবং 50 g ভরবিশিষ্ট অপর একটি বস্তু বিপরীত দিক হইতে 5 cm/s বেগে আসিতেছে। সংঘর্ষের পর বস্তু দুইটি একে অন্যের সহিত জুড়িয়া গেলে গঠিত যুগ্মভরের বেগ এবং অন্তিম ও প্রাথমিক গতিশক্তির অনুপাত নির্ণয় কর।

[A body of mass 100 g is moving with a velocity of 10 cm/s and another body of mass 50 g is approaching it from opposite direction with a velocity of 5 cm/s. If the two bodies coalesce after collision, calculate the velocity of the combined mass and the ratio of final and initial kinetic energies.]
[5 cm/s, 1 : 3]

40. মুখোমুখি সংঘাত ঘটিলে m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর সহিত km ভরবিশিষ্ট অপর একটি স্থির বস্তুর স্থিতিস্থাপক সংঘাতের ক্ষেত্রে প্রথম বস্তুটি যে-শক্তি হারায়, $k=1$ হইলে সেই শক্তির মান সর্বোচ্চ হইবে। শক্তির এবং ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র প্রয়োগ করিয়া ইহা প্রমাণ কর।

[For elastic collision of a body of mass m with another body of mass km at rest, the energy lost by the former in a head-on-collision is maximum when $k=1$. Prove this by applying the laws of conservation of energy and momentum.]

41. একটি লিফ্‌টে 60 kg ভরবিশিষ্ট এক ব্যক্তি দাঁড়াইয়া আছে। লিফ্‌টটি 80 cm/s² ত্বরণে নিচে নামিতে শুরু করিল। এই অবস্থায় ব্যক্তিটি লিফ্‌টের ভূমিতে কী বল প্রয়োগ করিবে? লিফ্‌টটি একই ত্বরণে উপরের দিকে উঠিতে থাকিলেই বা ব্যক্তিটি লিফ্‌টের ভূমিতে কী বল প্রয়োগ করিবে? নির্ণেয় বলগুলি নিউটন এককে প্রকাশ কর। অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 9·8 m/s²।

[A man of mass 60 kg is standing on a lift. The lift stands descending with an acceleration of 80 cm/s². What will be the force exerted by the man on the floor of the lift in this case. If the lift ascends with the same acceleration, what will be the force exerted by the man on the floor of the lift. Express the forces in newton. The acceleration due to gravity is 9·8 m/s².] [540 N, 636 N]

42. একটি লিফ্‌ট 4 ft/s² ত্বরণ লইয়া উপরের দিকে উঠিতেছে। (i) যখন লিফ্‌টটি চলিতে শুরু করিল এবং (ii) যখন লিফ্‌টটি 10 ft/s স্থির গতিবেগ লাভ করিল, তখন 100 lb ভরবিশিষ্ট এক ব্যক্তি লিফ্‌টের ভূমিতে কত বল প্রয়োগ করিবে? ($g=32$ ft/s²)

[A lift is moving upwards with an accleration of 4 ft/s². What force does a man of mass 100 lb exert on the floor of the lift, when (i) the lift just starts moving, (ii) lift attains a constant velocity of 10 ft/s? ($g=32$ ft/s²)] [112·5 lb-wt, 100 lb-wt]

43. অবরোহণরত একটি এলিভেটরে একটি দড়ি হইতে একটি বাতি ঝুলিতেছে। এলিভেটরটি 8 ft/s² মন্দন লইয়া নামিয়া স্থির অবস্থায় আসে। (i) যদি দড়ির টান 20 lbf হয় তবে বাতির ভর কত? (ii) যখন এলিভেটরটি 8 ft/s² ত্বরণে উপরের দিকে উঠিতে থাকে তখন দড়ির টান কত হইবে? ($g=32$ ft/s²)

[A lamp hangs vertically from a cord in a descending elevator. The elevator has a retardation of 8 ft/s² before coming to a stop. (i) If the tension in the cord is 20 lbf, what is the mass of the lamp? (ii) What is the tension in the cord when the elevator ascends with an acceleration of 8 ft/s². ($g=32$ ft/s²)] (16 lb, 20 lbf)

44. একটি অপ্রসার্য সূতা একটি কপিকলের উপর দিয়া গিয়াছে এবং উহা হইতে 1 lb ভর ঝুলান আছে। সূতাটি মসৃণ টেবিলের উপর রক্ষিত একটি 15 lb ভরকে টানিতেছে। সূতার টান এবং আলোচ্য সংস্থার ত্বরণ নির্ণয় কর। ($g=32$ ft/s²)

[A mass of 15 lb is pulled along a smooth table by a light inextensible string passing over a smooth pulley and carrying a mass of 1 lb. Find the tension on the string and the acceleration of the system. ($g=32$ ft/s²)] (সংসদের নমুনা প্রশ্ন)

[30 poundals, 2 ft/s²]

45. 1 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে একটি স্প্রিং-তুলার হুকের সহিত যুক্ত করা হইল।

স্প্রিং-তুলাটি একটি লিফ্টের ছাদ হইতে ঝুলান রহিয়াছে। যখন (i) লিফ্টটি 1 m/s^2 ত্বরণ লইয়া উপরে উঠিতেছে, (ii) 0·5 m/s^2 ত্বরণ লইয়া নিচে নামিতেছে, (iii) 0·1 m/s^2 সমবেগে উপরে উঠিতেছে তখন স্প্রিং-তুলার পাঠ কী হইবে? $(g = 9 \cdot 8 \ m/s^2)$

[An object of mass 1 kg is attached to the hook of a spring-balance and the latter is suspended vertically from the roof of a lift. What is the reading on the spring-balance when the lift is (i) ascending with an acceleration of 1 m/s^2, (ii) descending with an acceleration of 0·5 m/s^2, (iii) ascending with a uniform velocity of 0·1 m/s. $(g = 9 \cdot 8 \ m/s^2)$] [10·8 N, 9·3 N, 9·8 N]

46. একটি ইঞ্জিন এমন হারে জল পাম্প করে যাহাতে ছিদ্রমুখ হইতে নিঃসৃত জলের গতিবেগ 15 m/s। এই জেটটি একটি দেওয়ালের উপর লম্বভাবে পড়ে। দেওয়াল হইতে জলের প্রতিক্ষেপ উপেক্ষণীয় হইলে দেওয়ালে ক্রিয়াশীল চাপ নির্ণয় কর। (1 m^3 জলের ভর 1000 kg)

[An engine pumps water at such a rate that the velocity of the water leaving the nozzle is 15 m/s. If the jet is directed perpendicularly on to a wall, calculate the pressure on the wall neglecting the rebound of the water. (The mass of 1 m^3 of water is 1000 kg)]
[$22 \cdot 5 \times 10^4 \ N/m^2$]

47. একটি হোস্ 100 cm^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ছিদ্র দিয়া 20 cm/s দ্রুততে জল উৎক্ষেপ করিতেছে। যদি এই জল কোন দেওয়ালের উপর লম্বভাবে আঘাত করে তাহা হইলে দেওয়ালে প্রযুক্ত বল নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, সংঘাতের পর দেওয়ালের লম্বাভিমুখে জলের গতিবেগ শূন্য।

[A hose ejects water at a speed of 20 cm/s through an area of 100 cm^2. If the water strikes a wall normally, find the force exerted by water on the wall, assuming that the velocity of the water normal to the wall is zero after collision.] [0·4 N]

48 4·0 kg ভরবিশিষ্ট একটি বন্দুক হইতে 60 m/s দ্রুতিতে 10 g ভরবিশিষ্ট একটি বুলেট ছোঁড়া হইল। বন্দুকটির প্রাথমিক প্রতিক্ষেপ বেগ কত?

[A gun of mass 4·0 kg fires a bullet of mass 10 g at a speed of 60 m/s. What is the initial speed of recoil of the gun ?] [0·15 m/s]

49. 8000 kg ভরবিশিষ্ট একটি রেলওয়ে ট্রাক 18 m/s গতিবেগে অনুভূমিক লাইন ধরিয়া চলমান অনুরূপ দুইটি নিশ্চল ট্রাকের সহিত ধাক্কা খাইয়া উহাদের সহিত আট্কাইয়া গেল। সংঘাতের অব্যবহিতকাল পরে ট্রাক তিনটির দ্রুত কত হইবে? এই সংঘাতের সময় কী পরিমাণ শক্তি বিনষ্ট হইল?

[A railway truck of mass 8000 kg is travelling at 18 m/s along a horizontal truck when it bumps into and joins on two similar trucks which were at rest. What is the speed of the three trucks just after the collision ? How much energy is lost on impact ?] [6 m/s, 860 kJ]

50. একটি মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া গিয়াছে এইরূপ একটি হাল্কা দড়ির একপ্রান্ত হইতে 2·0 kg ভর এবং অপর প্রান্ত হইতে 3·0 kg ভর ঝুলান রহিয়াছে। সংস্থাটিকে ছাড়িয়া দিলে উহার ত্বরণ কী হইবে?

[A mass of 2·0 kg and a mass of 3·0 kg are hanging freely from either end of a light cord which passes over a frictionless pulley. Calculate the acceleration of the system when released.] [1·96 m/s^2]

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

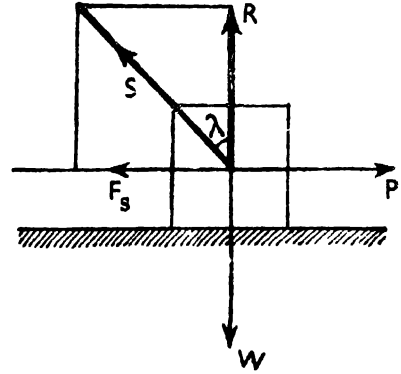
ঘর্ষণ

5.1 স্থির ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক (Coefficient of static friction) ঃ দুইটি বস্তুর স্পর্শতলের উপর ক্রিয়াশীল স্থিত ঘর্ষণের সীমান্থ মান (F_s) স্পর্শতলের লম্ব প্রতিক্রিয়ার সমানুপাতিক। লম্ব-প্রতিক্রিয়াকে R দ্বারা সূচিত করিলে লেখা যায়,

$$F_s \propto R \qquad \text{বা,} \quad F_s = \mu_s R \qquad \cdots \qquad (5.1)$$

এখানে, μ_s একটি ধ্রুবক। আলোচ্য বস্তুদ্বয়ের উপাদান ও উহাদের স্পর্শতলের মসৃণতার উপর ইহার মান নির্ভর করে। ইহাকে স্থিত ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক বলা হয়। সমীকরণ (5.1) হইতে পাই,

$$\mu_s = \frac{F_s}{R} = \frac{\text{ঘর্ষণের সীমান্থ মান}}{\text{লম্ব-প্রতিক্রিয়া}} \qquad \cdots \qquad (5.2)$$

5.2 ঘর্ষণ-কোণ (Angle of friction) ঃ সীমান্থ ঘর্ষণ-বল (F_s) এবং লম্ব-প্রতিক্রিয়া বল (R)--এই দুইটি বল যথাক্রমে বস্তুদ্বয়ের স্পর্শতল বরাবর এবং স্পর্শতলের উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে। এই বল দুইটিকে যোগ করা হইলে যে-লব্ধি বল পাওয়া যায়, তাহাকে লব্ধি প্রতিক্রিয়া বল (resultant reaction) বলা হয়। 5.1 নং চিত্রে S চিহ্নের দ্বারা এই লব্ধি-প্রতিক্রিয়া বলটি সূচিত হইয়াছে। লব্ধি-প্রতিক্রিয়া S এবং লম্ব-প্রতিক্রিয়া R পরস্পরের সহিত যে-কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে ঘর্ষণ-কোণ বলে। 5.1 নং চিত্রে λ-অক্ষরের সাহায্যে এই কোণটিকে চিহ্নিত করা হইয়াছে। ইহাকে সীমান্থ ঘর্ষণ কোণও বলা হয়।

চিত্র 5.1

এখন, $F_s = S \sin \lambda$ এবং $R = S \cos \lambda$

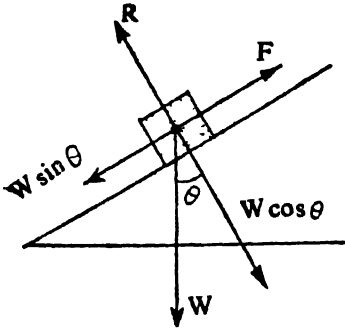
$$\text{বা,} \quad \mu_s = \frac{F_s}{R} = \frac{S \sin \lambda}{S \cos \lambda}$$

$$\text{বা,} \quad \mu_s = \tan \lambda \qquad \cdots \qquad (5.4)$$

অর্থাৎ, ঘর্ষণ-কোণের ট্যানজেন্ট ঘর্ষণ-গুণাঙ্কের সমান।

5.3 স্থিতি-কোণ (Angle of repose) ঃ একটি নততলের উপর একটি ব্লক স্থাপন করা হইল। ধরি, অনুভূমিক তলের সহিত এই তলের নতি (inclination)

ইচ্ছামত বদলান যায়। ব্লকটির ওজন (W) নিম্নাভিমুখী। ওজনের একটি উপাংশ ($W \cos \theta$) নততলের সহিত লম্বভাবে ক্রিয়া করে। ইহার অপর উপাংশ ($W \sin \theta$) ব্লকটিকে নিচের দিকে নামাইতে চাহিতেছে (চিত্র 5.2)।

চিত্র 5.2

ব্লকটির সাম্য বিবেচনা করিয়া দেখা যায় যে,

$R = W \cos \theta$ এবং $F = W \sin \theta$ ··· (5.5)

এখানে R হইল ব্লকটির উপরে নততলের লম্ব-প্রতিক্রিয়া এবং F হইল স্থিত ঘর্ষণের মান।

অনুভূমিক তলের সহিত নততলের নতির মান ধীরে ধীরে বৃদ্ধি করিতে থাকিলে $W \sin \theta$-উপাংশের মান বাড়িতে থাকিবে, সেই সঙ্গে F-এর মানও বাড়িবে। F-এর যে-মানের জন্য ব্লকটি নততল বরাবর নিচের দিকে গতিশীল হইবার উপক্রম করিবে তাহাই স্থিত ঘর্ষণের সীমাস্থ মান F_s। এই অবস্থায় নতিকোণ ϕ হইলে,

$$F_s = W \sin \phi \text{ এবং } R = W \cos \phi$$

$$\text{অতএব, } \mu_s = \frac{F_s}{R} = \tan \phi \quad \text{বা, } \phi = \tan^{-1} \mu_s \quad \cdots \quad (5.6)$$

নততলের নতির এই মানকে স্থিতি-কোণ বলা হয়। সমীকরণ (5.6) হইতে দেখা যাইতেছে যে, স্থিতি-কোণের ট্যানজেন্ট ঘর্ষণ-গুণাঙ্কের সমান। আবার আমরা দেখিয়াছি যে, ঘর্ষণ-কোণের ট্যানজেন্টও ঘর্ষণ-গুণাঙ্কের সমান।

$$\therefore \quad \mu_s = \tan^{-1} \phi = \tan^{-1} \lambda \quad \text{বা, } \phi = \lambda \quad \cdots \quad (5.7)$$

কাজেই সিদ্ধান্তে আসা যায় যে, ঘর্ষণ-কোণ ও স্থিতি-কোণ পরস্পর সমান।

5.4 চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক (Coefficient of kinetic friction) ঃ স্থিত ঘর্ষণের ন্যায় গতীয় ঘর্ষণের মানও বস্তুদ্বয়ের স্পর্শতলের লম্ব প্রতিক্রিয়ার সমানুপাতিক।

$$\text{গতীয় ঘর্ষণ, } F_k \propto R \quad \text{বা, } F_k = \mu_k R \quad \cdots \quad (5.8)$$

এখানে μ_k হইল চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক। স্থিত ঘর্ষণের তুলনায় চল ঘর্ষণের মান কম বলিয়া দেখা যায়, $\mu_k < \mu_s$

5.5 নততলের উপর দিয়া অভিকর্ষের প্রভাবে গতিশীল বস্তুর ত্বরণ ঃ মনে করি, m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু অনুভূমিক তলের সহিত θ কোণে আনত নততলের উপর দিয়া অভিকর্ষের টানে নিচে পড়িতেছে (চিত্র 5.3)। এক্ষেত্রে ধরা হইয়াছে যে, θ কোণটি স্থিতি-কোণ অপেক্ষা বেশি। বস্তুটি নিচের দিকে নামিয়া আসিতেছে বলিয়া এক্ষেত্রে ধরিতে হইবে যে, গতির বিপরীত দিকে চল ঘর্ষণ ক্রিয়া করিতেছে। ইহার মান,

$$F_k = \mu_k R \; (\mu_k = \text{চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক})$$

আবার, লম্ব-প্রতিক্রিয়া, $R = mg \cos\theta$

$\therefore \quad F_k = \mu_k \, mg \cos\theta$

এই বল নততল বরাবর উপরের দিকে ক্রিয়া করিতেছে। নততল বরাবর বস্তুটির ওজনের উপাংশ $= mg \sin\theta$

চিত্র 5.3

সুতরাং, নততল বরাবর বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল নিম্নাভিমুখী অসম বল

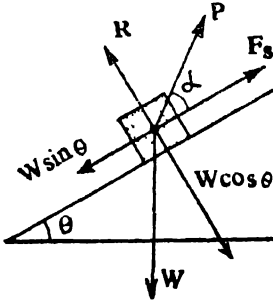
$$= mg(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$$

অতএব, বস্তুটির নিম্নাভিমুখী ত্বরণ,

$$f = \frac{mg(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)}{m}$$

বা, $f = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$ ... (5.10)

5.6 নততলের উপর রক্ষিত বস্তুর সাম্য ঃ অনুভূমিক তলের সহিত θ কোণে আনত একটি বস্তুর উপর W ওজনের একটি বস্তু আছে। আমরা জানি যে, যদি অভিকর্ষ বল ও ঘর্ষণ বল ভিন্ন অন্য কোন বল ক্রিয়া না করে তবে θ-এর মান $\tan^{-1}\mu$ হইলে বস্তুটি অভিকর্ষের টানে নততল বরাবর নিচের দিকে গতিশীল হইবার উপক্রম করিবে। θ-এর এই মানকে স্থিতি-কোণ বলে। নততল যদি অনুভূমিক তলের সহিত স্থিতি-কোণ অপেক্ষা বড় কোণে আনত থাকে সেক্ষেত্রে বস্তুকে সাম্যে রাখিবার জন্য একটি বল প্রয়োগ করিতে হয়। ধরা যাক্, বস্তুটির উপর P বল ক্রিয়া করিতেছে এবং ইহা নততলের সহিত α কোণে ক্রিয়াশীল। এক্ষেত্রে দুইটি সীমাস্থ অবস্থার (limiting conditions) উদ্ভব হইতে পারে, যথা—

(a) বস্তুটি নততল বরাবর নিচের দিকে গতিশীল হইবার উপক্রম করিতে পারে, এবং (b) P-বলের প্রভাবে বস্তুটি নততল বরাবর উপরের দিকে গতিশীল হইবার উপক্রম করিতে পারে।

চিত্র 5.4

(1) প্রথম ক্ষেত্রে বস্তুটি নিচের দিকে গতিশীল হইতে চাহিতেছে বলিয়া ঘর্ষণ-বল, $F = \mu_s R$-এর অভিমুখ নততল বরাবর উপরের দিকে (চিত্র 5.4)। এই অবস্থায় বস্তুটি সাম্যে আছে বলিয়া নততল ও ইহার অভিলম্বের দিকে বলগুলির বিভাজন করিয়া লেখা যায়,

$P\cos\alpha + \mu_s R = W\sin\theta$ ... (i)

$P\sin\alpha + R = W\cos\theta$ ... (ii)

সমীকরণ (ii)-কে μ_s দ্বারা গুণ করিয়া সমীকরণ (i) হইতে বাদ দিলে পাই,

$P(\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha) = W(\sin\theta - \mu_s \cos\theta)$ ... (iii)

ঘর্ষণ-কোণ λ হইলে আমরা জানি যে, $\mu_s = \tan\lambda$

(iii) নং সমীকরণে μ_s-এর মান বসাইয়া পাই,

$$P(\cos \alpha - \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda}\sin \alpha) = W(\sin \theta - \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda}\cos \theta)$$

বা, $P(\cos \alpha \cos \lambda - \sin \alpha \sin \lambda) = W(\sin \theta \cos \lambda - \sin \lambda \cos \theta)$

বা, $P \cos(\alpha + \lambda) = W \sin(\theta - \lambda)$

বা, $$P = W.\frac{\sin(\theta - \lambda)}{\cos(\alpha + \lambda)} \quad \cdots \quad (5.11)$$

(2) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বস্তুটি নততল বরাবর উপরের দিকে গতিশীল হইবার উপক্রম করে। সুতরাং, এক্ষেত্রে ঘর্ষণ-বল $F_s(=\mu_s R)$ নততল বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়া করে (চিত্র 5.5)। বস্তুটির সাম্যাবস্থায় নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি লেখা যায়,

চিত্র 5.5

$$P \cos \alpha - \mu_s R = W \sin \theta \quad \cdots \quad (iv)$$

$$P \sin \alpha + R = W \cos \theta \quad \cdots \quad (v)$$

(v) নং সমীকরণকে μ_s দ্বারা গুণ করিয়া (iv) নং সমীকরণের সহিত যোগ করিয়া পাই,

$$P(\cos \alpha + \mu_s \sin \alpha) = W(\sin \theta + \mu_s \cos \theta)$$

$\mu_s = \tan \lambda$ বলিয়া লেখা যায়,

$$P(\cos \alpha + \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda}\sin \alpha) = W(\sin \theta + \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda}\cos \theta)$$

বা, $P \cos(\alpha - \lambda) = W \sin(\theta + \lambda)$

বা, $$P = W.\frac{\sin(\theta + \lambda)}{\cos(\alpha - \lambda)} \quad \cdots \quad (5.12)$$

দুইটি নির্দিষ্ট বস্তুর ক্ষেত্রে ঘর্ষণ-কোণ λ-এর মান নির্দিষ্ট। সমীকরণ (5.12) হইতে দেখা যাইতেছে যে, θ-এর নির্দিষ্ট মানের জন্য $\cos(\alpha - \lambda) = 1$ হইলে বা, $\alpha = \lambda$ হইলে P-এর মান ন্যূনতম হইবে।

অর্থাৎ, নততলের সহিত ঘর্ষণ-কোণের সমান কোণে বলপ্রয়োগ করিলে ন্যূনতম বলের সাহায্যে বস্তুটিকে নততল বরাবর ঊর্ধ্বমুখী গতিশীল করা যাইবে।

নততল অভিমুখে বলপ্রয়োগ করিলে $\alpha = 0$ হইবে। সেক্ষেত্রে, বস্তুটিকে নিচে নামিয়া আসিতে বা" দিবার জন্য প্রয়োজনীয় বলের মান পাইতে হইলে 5.11 নং সমীকরণে $\alpha = 0$ বসাইতে হইবে, অর্থাৎ এক্ষেত্রে

$$P = \frac{W}{\cos \lambda}\sin(\theta - \lambda)$$

নততল বরাবর বলপ্রয়োগ করিয়া কোন বস্তুকে ঐ তল বরাবর উপরের দিকে গতিশীল করিবার উপক্রম করিতে হইলে কত বল প্রয়োজন হইবে তাহা নির্ণয়

করিতে (5.12) নং সমীকরণে $\alpha = 0$ বসাইতে হইবে। অর্থাৎ, এক্ষেত্রে

$$P = \frac{W}{\cos \lambda} . \sin (\theta + \lambda)$$

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 5.1 একটি বস্তুকে নততলের উপর রাখা হইল। নততলটিকে অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে আনত করিলে বস্তুটি নততল বাহিয়া নিচে পড়িতে থাকে। নততলটি যখন অনুভূমিক তলের সহিত 60° কোণে আনত তখন বস্তুটির ত্বরণ কত হইবে ?

[A body is placed on an inclined plane. The body just starts sliding downwards when the inclined plane makes an angle of 30°. What will be the acceleration of the body when the plane is inclined at an angle of 60° with the horizontal plane ?]

সমাধান : প্রশ্নের শর্তানুসারে, স্থিতি-কোণের মান = 30°

সুতরাং, স্থিত ঘর্ষণ গুণাঙ্ক, $\mu_s = \tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ যখন নততলের সহিত অনুভূমিক তলটি 60° কোণ করিয়া থাকে তখন বস্তুর ত্বরণ,

$f = g(\sin 60° - \mu_k \cos 60°)$ [সমীকরণ (5.10) হইতে]

স্থিত ঘর্ষণ-গুণাঙ্কের সহিত চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্কের পার্থক্য উপেক্ষা করিয়া লেখা যায়,

$$\mu_s = \mu_k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

কাজেই, $f = g\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{g}{\sqrt{3}}$

$g = 980$ cm/s² ধরিয়া পাই, $f = \frac{980}{\sqrt{3}} = 566$ cm/s² (প্রায়)

উদাহরণ 5.2 50 কিলোগ্রাম ওজনের একটি বাক্সকে মেঝের উপর দিয়া টানিতে হইবে। মেঝে এবং বাক্সের মধ্যে স্থিত ও গতীয় ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক যথাক্রমে 0·42 এবং 0·40 হইলে (i) বাক্সটি সচল করিতে এবং (ii) উহাকে সচল রাখিতে কত বল প্রয়োগ করিতে হইবে ?

[It is required to pull a box of weight 50 kg along a floor. If the coefficient of static and kinetic frictions are 0·42 and 0·40 respectively, what will be the forces necessary to (i) make the box move and (ii) keep it moving ?]

সমাধান : (i) বাক্স ও মেঝের মধ্যে স্থিত ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক μ_s হইলে ঘর্ষণ-বলের সর্বোচ্চ মান, $F_s = \mu_s \times$ বাক্সের ওজন

বাক্সটিকে মেঝের উপর দিয়া সচল করিতে হইলে উহার উপর যে-ন্যূনতম বল প্রয়োগ করিতে হইবে তাহার মান F_s-এর সমান। অর্থাৎ, বাক্সটিকে নাড়াইতে প্রয়োজনীয় বল, $F_s = 0{\cdot}42 \times 50$ kg-wt $= 21$ kg-wt

(ii) বাক্সটি যখন চলিতে আরম্ভ করে তখন মেঝে ও বাক্সের মধ্যে চল ঘর্ষণ ক্রিয়া করে। ইহা স্থিত ঘর্ষণের সীমাস্থ মান অপেক্ষা কম বলিয়া বাক্সটিকে নাড়াইতে যে-বল প্রয়োগ করিতে হইবে উহাকে মেঝের উপর দিয়া সচল রাখিতে তদপেক্ষা কম বল প্রয়োগ করিতে হইবে। বাক্সের গতিবেগ বজায় রাখিবার জন্য প্রয়োজনীয় বল,

$$F_k = \mu_k \times \text{বাক্সের ওজন},$$

এখানে μ_k হইল বাক্স ও মেঝের মধ্যে চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক।

বা, $F_k = 0{\cdot}40 \times 50$ kg-wt $= 20$ kg-wt

উদাহরণ 5.3 10 kg ভরবিশিষ্ট একটি লোহার ব্লক অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে আনত একটি নততলের উপর স্থির অবস্থায় আছে। দেখা গেল যে, নততলের সমান্তরালভাবে যে-ন্যূনতম বলের প্রয়োগে ব্লকটি নততল বাহিয়া উপরে উঠিতে থাকিবে উহার মান 98 N। কাঠ এবং লোহার মধ্যে চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। $(g = 9{\cdot}8 \text{ m/s}^2)$

[An iron block of mass 10 kg rests on a wooden plane inclined at 30° to the horizontal. It is seen that the least force parallel to the plane which causes the block to slide up the plane is 98 N. Calculate the coefficient of sliding friction between wood and iron. $(g = 9{\cdot}8 \text{ m/s}^2)$]

সমাধান ঃ ব্লকটির উপর নততল-কর্তৃক প্রযুক্ত লম্ব-প্রতিক্রিয়া,

$$R = W \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}W}{2} \qquad \cdots \qquad (i)$$

এখানে W = ব্লকটির ওজন $= 10$ kg-wt $= 10 \times 9{\cdot}8$ N

ব্লকের উপর নততল বরাবর উপরের দিকে বল প্রয়োগ করিলে ঘর্ষণ-বল (F) নিম্নাভিমুখী হইবে (চিত্র 5.6)। কাজেই, ন্যূনতম যে-বলের জন্য ব্লকটি নততল বাহিয়া উপরে উঠিতে থাকিবে উহার মান P হইলে লেখা যায়,

চিত্র 5.6

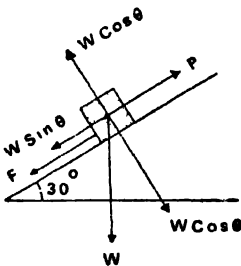
$$P = W \sin 30^\circ + \mu \times R$$

এখানে, μ = ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক।

$$\therefore \quad P = W \times \frac{1}{2} + \mu \times \frac{W\sqrt{3}}{2}$$

এখন, $W = 98$ নিউটন

প্রশ্নের শর্তানুসারে $P = 98$ নিউটন বলিয়া লেখা যায়,

$$98 = 98 \times \frac{1}{2} + \mu \times \frac{98\sqrt{3}}{2} \qquad \text{বা,} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

উদাহরণ 5.4 300 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু একটি অনুভূমিক মেঝের উপর স্থির অবস্থায় আছে। ইহাকে সচল করিতে ন্যূনতম 60 g-wt অনুভূমিক বল প্রয়োজন। দেখা যায় যে, 50 g-wt মানের একটি অনুভূমিক বল ব্লকটিকে সমবেগে গতিশীল রাখে। (i) মেঝে ও ব্লকের মধ্যে স্থিত ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক ও চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। (ii) যদি ব্লকটির উপর 20 g-wt মানের একটি অনুভূমিক বল ক্রিয়া করে তাহা হইলে উহার উপর ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ-বলের মান কত হইবে ?

[A block of mass 300 g rests on a horizontal floor. A minimum force of 60 g-wt is required to start it moving. It is then found that a horizontal force of 50 g-wt keeps the block moving with uniform velocity. (i) Determine the coefficient of static and the coefficient of kinetic friction. (ii) What is the force of friction when a force of 20 g-wt acts on the block ?]

সমাধান : (i) ব্লকটি অনুভূমিক তলে অবস্থিত বলিয়া ইহার উপর ক্রিয়াশীল লম্ব প্রতিক্রিয়া,

$$R = \text{ব্লকটির ওজন} = 300 \text{ g-wt}$$

এখন, স্থিত ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক μ_s হইলে স্থিত ঘর্ষণ বল,

$$F_s = \mu_s R \qquad \cdots \qquad (i)$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $F_s = 60$ g-wt বলিয়া সমীকরণ (i) হইতে পাই,

$$60 = \mu_s \times 300 \quad \text{বা,} \quad \mu_s = 0.2$$

আবার, চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক μ_k হইলে চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক,

$$F_k = \mu_k R \qquad \cdots \qquad (ii)$$

শর্তানুসারে, $F_k = 50$ g-wt বলিয়া সমীকরণ (ii) হইতে লেখা যায়,

$$50 = \mu_k \times 300 \quad \text{বা,} \quad \mu_k = 0.167 \text{ (প্রায়)}$$

(ii) আমরা জানি যে, প্রযুক্ত বল যদি স্থিত ঘর্ষণ-বলের সীমাস্থ মানের কম হয় তাহা হইলে ঘর্ষণ-বলের মান প্রযুক্ত বলের সমান হয়। এক্ষেত্রে প্রযুক্ত বল (20 g-wt) স্থিত ঘর্ষণ-বলের সর্বোচ্চ মান (60 g-wt) অপেক্ষা কম বলিয়া এক্ষেত্রে ঘর্ষণ-বল প্রযুক্ত বলের সমান হইবে। অর্থাৎ, এক্ষেত্রে ঘর্ষণ-বল = 20 g-wt

উদাহরণ 5.5 একটি অমসৃণ অনুভূমিক তলে স্থিরভাবে অবস্থিত 100 g ভরবিশিষ্ট একটি ব্লকের উপর 5 s ধরিয়া 40 g-wt মানের একটি অনুভূমিক বল ক্রিয়া করিল। বলটির ক্রিয়া যে-মুহূর্তে বন্ধ হইল সেই মুহূর্তে ব্লকটির গতিবেগ নির্ণয় কর। ব্লক ও মেঝের মধ্যবর্তী চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক = 0·2 এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ $= 980 \text{ cm/s}^2$।

[A horizontal force of 40 g-wt acts for 5 s on a block of mass 100 g resting on a rough horizontal floor. Find the velocity of the block at the instant when the force ceases to act. The coefficient of kinetic friction between the block and the floor = 0·2 and the acceleration due to gravity $= 980 \text{ cm/s}^2$.]

সমাধান : ব্লকটির উপর ক্রিয়াশীল লম্ব-প্রতিক্রিয়া, R

= ব্লকটির ওজন = 100 g-wt

বা' $R = 100 \times 980$ dyn

কাজেই, চলমান অবস্থায় ইহার গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ-বল,

$$F_k = \mu_k R = 0{\cdot}2 \times 100 \times 980 = 20 \times 980 \text{ dyn}$$

ব্লকের উপর প্রযুক্ত অনুভূমিক বল, $F = 40$ g-wt $= 40 \times 980$ dyn

এখন, ব্লকটির উপর ক্রিয়াশীল অসম বল, P

= প্রযুক্ত বল (F) − ঘর্ষণ-বল (F_k)

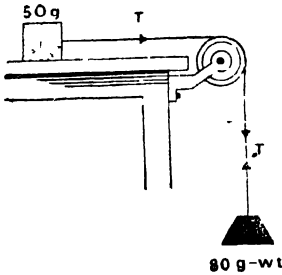
$= 40 \times 980 - 20 \times 980 = 20 \times 980$ dyn

ব্লকটির ত্বরণ f হইলে লেখা যায় যে, $P = mf$

বা, $20 \times 980 = 100 \times f$

বা, $f = 196$ cm/s²

ব্লকটি স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়াছে বলিয়া 5 s পর ইহার গতিবেগ হইবে, $v = u + ft = 0 + 196 \times 5$ বা, $v = 980$ cm/s

উদাহরণ 5.6 80 g ভরবিশিষ্ট একটি ব্লক একটি অনুভূমিক টেবিলের ধার হইতে ঝুলিতেছে (চিত্র 5.7)। বস্তুটি একটি হাল্কা সুতার সাহায্যে টেবিলের উপর বিদ্যমান 50 g ভরবিশিষ্ট অপর একটি বস্তুর সহিত যুক্ত; সুতাটি টেবিলের ধারে রক্ষিত একটি মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া গিয়াছে। টেবিলে রক্ষিত বস্তুটি স্থির অবস্থা হইতে 0·25 s সময়ে 15 cm দূরত্ব অতিক্রম করিল। টেবিল ও বস্তুটির মধ্যে চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

চিত্র 5.7

[A body of mass 80 g is hanging over the edge of a horizontal table. It is connected to another body of mass 50 g resting on the table by means of a light string passing over a smooth pulley at the edge of the table. The body resting on the table covers a distance of 15 cm in 0·25 s. Find the coefficient of kinetic friction between the body and the table.]

সমাধান : টেবিলে রক্ষিত বস্তুটির গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ-বল F dyn এবং সুতার টান T dyn হইলে বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল অসম বলের মান

$$P = (T - F) \text{ dyn}$$

বস্তুটির ত্বরণ f cm/s² হইলে লেখা যায়

$$P = 50 \times f \quad \text{বা,} \quad f = \frac{T - F}{50} \text{ cm/s}^2 \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া t s সময়ে বস্তুটি s দূরত্ব অতিক্রম করিলে লেখা যায়, $s=\frac{1}{2}ft^2$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $15=\frac{1}{2}f\times(0{\cdot}25)^2$ বা, $f=480\ \text{cm/s}^2$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\text{T}-\text{F}=50\times480=24{,}000\ \text{dyn} \qquad \text{... (iii)}$$

সুতার অপর প্রান্ত হইতে ঝুলন্ত 80 g ভরবিশিষ্ট বস্তুটির ত্বরিত গতি বিবেচনা করিয়া লেখা যায়, $mg-\text{T}=mf$

এখানে, $g=$ অভিকর্ষজ ত্বরণ $=980\ \text{cm/s}^2$ এবং $m=80$ g

সুতরাং, $80\times980-\text{T}=80\times480$

$$\text{বা,}\quad \text{T}=80\times(980-480)=40{,}000\ \text{dyn} \qquad \text{... (iv)}$$

সমীকরণ (iii) এবং (iv) হইতে পাই,

$$\text{F}=40{,}000-24{,}000=16{,}000\ \text{dyn} \qquad \text{... (v)}$$

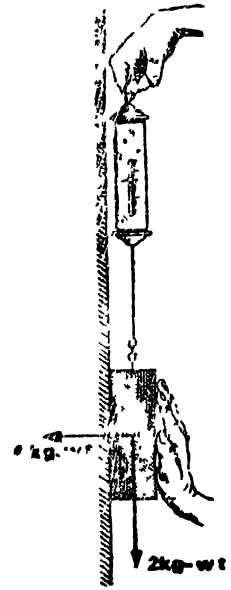
চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক μ_k হইলে $\text{F}=\mu_k\text{R}=\mu_k\times50$ g-wt

$$=\mu_k\times50\times980\ \text{dyn} \qquad \text{... (vi)}$$

$\therefore$ (v) এবং (vi) হইতে, $\mu_k\times50\times980=16{,}000$

$\therefore$ $\mu_k=\frac{16000}{50\times980}=0{\cdot}326$

উদাহরণ 5.7 একটি বালক একটি স্প্রিং স্কেলের সাহায্যে 2 kg-wt ওজনবিশিষ্ট একটি ব্লককে উপরে তুলিতেছে এবং অপর একটি বালক উহাকে 1 kg-wt বলে দেওয়ালের উপর চাপিয়া রাখিয়াছে (চিত্র 5.8)। (i) ব্লকটিকে সমদ্রুতিতে উপরের দিকে তুলিতে কী পরিমাণ ঊর্ধ্বমুখী বল প্রয়োগ করিতে হইবে? (ii) ব্লকটিকে সমদ্রুতিতে নিচে নামাইতে হইলেই বা কী পরিমাণ ঊর্ধ্বমুখী বল প্রয়োগ করিতে হইবে? (ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক $=0{\cdot}2$)

[A boy lifts a block weighing 2 kg-wt by means of a spring scale while another boy pushes the block against the wall with a force of 1 kg-wt (Fig. 5.8). (i) What upward pull is required to raise the block at constant speed? (ii) What upward force must be applied to lower it at constant speed? (Coefficient of friction $=0{\cdot}2$)]

চিত্র 5.8

সমাধান : (i) ব্লকটিকে উপরে তুলিতে চাহিলে ঘর্ষণ-জনিত বাধা নিচের দিকে ক্রিয়া করিবে। কাজেই, বস্তুটিকে সমবেগে উপরে তুলিতে হইলে উপরের দিকে

যে-বল প্রয়োগ করিতে হইবে তাহার মান ব্লকটির ওজন এবং ঘর্ষণ-বলের যোগফলের সমান হইবে।

এক্ষেত্রে ঘর্ষণ-বল, $F=\mu\times R$, μ=ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক এবং R = দেওয়ালের লম্ব-প্রতিক্রিয়া=1 kg-wt

$\therefore \quad F=\mu R=0\cdot2\times1$ kg-wt $=0\cdot2$ kg-wt

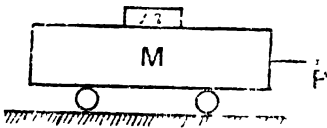
কাজেই, ব্লকটিকে সমবেগে উপরে তুলিতে হইলে ব্লকটির উপর যে-উর্ধ্বাভিমুখী বল প্রয়োগ করিতে হইবে তাহার মান,

P_1 = ব্লকের ওজন+ঘর্ষণ-বল $=2+0\cdot2=2\cdot2$ kg-wt

ii) ব্লকটি যখন নিচের দিকে নামিতে থাকে তখন ঘর্ষণ-বল উর্ধ্বাভিমুখে ক্রিয়া করে। ব্লকের ওজন নিম্নাভিমুখে ক্রিয়াশীল। কাজেই, ব্লকের উপর ক্রিয়াশীল নিম্নাভিমুখী লব্ধি বল ব্লকের ওজন ও ঘর্ষণ-বলের অন্তরফলের সমান।

সুতরাং, যে-উর্ধ্বমুখী বল প্রয়োগ করিলে ব্লকটি নিম্নাভিমুখে সমবেগে নামিতে থাকিবে তাহার মান

P_2 = ব্লকের ওজন−ঘর্ষণ-বল $=2-0\cdot2=1\cdot8$ kg-wt

উদাহরণ 5.8 m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে M ভরবিশিষ্ট অপর একটি বস্তুর উপর স্থাপন করা হইল (চিত্র 5.9)। দ্বিতীয় বস্তুটি ভূমির উপর স্থির রহিয়াছে। বস্তু দুইটির মধ্যে স্থিত ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক μ। দ্বিতীয় বস্তু এবং ভূমির মধ্যে কোন ঘর্ষণ নাই। দ্বিতীয় বস্তুটির উপর ন্যূনতম কী বল (P) প্রয়োগ করিলে প্রথম বস্তুটি ইহার উপর দিয়া পিছ্‌লাইয়া যাইতে আরম্ভ করিবে?

চিত্র 5.9

[A body of mass m is placed on another body of mass M (Fig 5.9). The second body lies on the ground. The coefficient of static friction between the bodies is μ. There is no friction between the second body and the ground. Find the minimum force P applied to the second body at which the load will slide along it.]

সমাধান: মনে করি, দ্বিতীয় বস্তুটির উপর একটি অতি ক্ষুদ্র বল P ক্রিয়া করিতেছে যাহাতে প্রথম বস্তুটি দ্বিতীয় বস্তুটির উপর দিয়া পিছ্‌লাইয়া না যায়। তাহা হইলে ভূমির উপর দিয়া বস্তুদ্বয় যে-ত্বরণ লইয়া চলিতে থাকে তাহার মান

$$a=\frac{P}{M+m} \qquad \cdots \qquad (i)$$

এই সময় m ভরবিশিষ্ট বস্তুটির উপর (প্রথম বস্তুটির উপর) ক্রিয়াশীল বল

$$=ma=\frac{mP}{m+M} \quad [\text{(i) হইতে}]$$

প্রথম ও দ্বিতীয় বস্তুর স্পর্শতলের ঘর্ষণই এই বল যোগাইতেছে। প্রথম বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ-বলের মান F হইলে লেখা যায়,

$$F = ma = \frac{mP}{M+m} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

এখন, P-এর মান ধীরে ধীরে বাড়াইতে থাকিলে a-এর মান বাড়িবে, সেই সঙ্গে প্রথম বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ-বলও বাড়িবে। কিন্তু ঘর্ষণ-বল অনির্দিষ্ট মান পর্যন্ত বাড়িতে পারে না। প্রথম ও দ্বিতীয় বস্তুর স্পর্শতল ঘর্ষণ-গুণাঙ্কের মান μ বলিয়া F-এর সর্বোচ্চ মান,

$$F_{max} = \mu R = \mu mg \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

এখানে, R হইল প্রথম বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল লম্ব-প্রতিক্রিয়া এবং g হইল অভিকর্ষজ ত্বরণ।

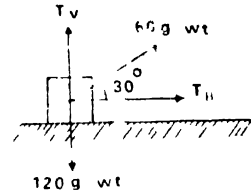
কাজেই, P-এর যে-সর্বোচ্চ মান পর্যন্ত বস্তুদ্বয় একটি যুগ্ম-বস্তুর ন্যায় একত্রে চলিবে তাহা নিম্নের সমীকরণ হইতে পাওয়া যাইবে,

$$\mu m \mu = \frac{Pm}{M+m} \quad [\text{(ii) হইতে}]$$

উপরি-উক্ত সমীকরণ হইতে পাই,

$$F = \mu(M+m)g \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

দ্বিতীয় বস্তুর উপর বল P-এর মান ইহা অপেক্ষা বেশি হইলে প্রথম বস্তুটি দ্বিতীয় বস্তুটির উপর দিয়া পিছ্‌লাইয়া যাইবে। সুতরাং, P-এর যে-ন্যূনতম মানের জন্য প্রথম বস্তুটি পিছ্‌লাইয়া যাইতে আরম্ভ করিবে, P-এর সেই মানও সমীকরণ (iv) হইতে পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 5.9 120 g ভরবিশিষ্ট একটি ব্লককে অনুভূমিক রেখার সহিত 30° কোণে আনত একটি দড়ির সাহায্যে অনুভূমিক তল বরাবর টানা হইতেছে (চিত্র 5.10)। ইহাতে ব্লকটি স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 10 s সময়ে 9·8 m/s গতিবেগ লাভ করিল। যদি দড়ির টান 60 g-wt হয় তাহা হইলে চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক কত? ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 980$ cm/s^2।

চিত্র 5.10

[A block of mass 120 g is pulled along a horizontal surface with the help of a rope making an angle of 30° with horizontal (Fig 5.10), so that the block, starting from rest, gains a speed of 9·8 m/s in 10 s. If the tension of the rope is 60 g-wt, what is the coefficient of kinetic friction ? Take the acceleration due to gravity, $g = 9{\cdot}8$ m/s^2.]

সমাধান : স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 10 s সময়ে ব্লকটি 980 cm/s গতিবেগ লাভ করে বলিয়া লেখা যায় যে,

$$\text{ব্লকটির ত্বরণ, } f = \frac{v-u}{t} = \frac{980-0}{10} = 98 \text{ cm/s}$$

দড়ির টানের অনুভূমিক উপাংশ, $T_H = T \cos 30°$

$= 60 \cos 30° = 60 \times 0.866 = 51.96$ g-wt $= 51.96 \times 980$ dyn

এই বলের এক অংশ ঘর্ষণ-বল অতিক্রমে ব্যয়িত হয় এবং অপর অংশ ব্লকের ত্বরণ সৃষ্টি করে।

দড়ির টানের উল্লম্ব উপাংশ, $T_v = T \sin 30°$

$= 60 \times 0.5 = 30$ g-wt $= 30 \times 980$ dyn

ব্লকের ওজন নিম্নাভিমুখী ক্রিয়া করে বলিয়া ব্লকের উপর ক্রিয়াশীল মোট ঊর্ধ্বাভিমুখী বল বা লম্ব-প্রতিক্রিয়া,

$R = 120 \times 980 - 30 \times 980 = 90 \times 980$ dyn

সুতরাং, ব্লকের গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ-বল,

$F_k = \mu_k \times R = \mu_k \times 90 \times 980$ dyn

ব্লকের ভর m এবং ত্বরণ f হইলে লেখা যায়,

$$T_H - F_k = mf$$

বা, $51.91 \times 980 - \mu_k \times 90 \times 980 = 120 \times 98$

বা, $51.96 - \mu_k \times 90 = 12$

বা, $\mu_k = \dfrac{51.96 - 12}{90} = 0.444$

উদাহরণ 5.10 একটি বস্তু ভূমির উপর দিয়া ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে চলিতেছে। যদি ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক 0·2 হয় তাহা হইলে স্থির হইবার পূর্বে বস্তুটি কতটা দূরত্ব অতিক্রম করিবে? ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ $= 32$ ft/s^2

[A body moves on the ground with a velocity of 30 mile/h. What is the distance travelled by the body before coming to rest if the coefficient of friction is 0·2 ? Assume that the acceleration due to gravity is 32 ft/s^2]

সমাধান ঃ বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল লম্ব-প্রতিক্রিয়া, R

$=$ বস্তুটির ওজন $= mg$

এখানে, $m =$ বস্তুটির ভর এবং $g =$ অভিকর্ষজ ত্বরণ

সুতরাং, ঘর্ষণ-বল, $F = \mu R = \mu mg$ ... (i)

ঘর্ষণের ফলে বস্তুটির মন্দন f হইলে লেখা যায়,

$$F = mf \quad \text{... (ii)}$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $\mu mg = mf$

বা, $f = \mu g = 0.2 \times 32 = 6.4$ ft/s^2

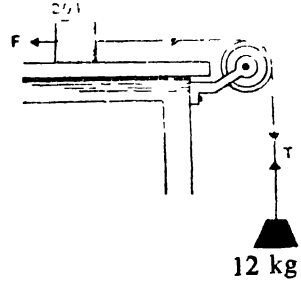
স্থির অবস্থায় আসিবার পূর্বে বস্তুটি যদি s দূরত্ব অতিক্রম করে তাহা হইলে লেখা যায়,

$v^2 = u^2 - 2fs$ বা, $0 = u^2 - 2fs$ বা, $u^2 = 2fs$ ... (iii)

এখন, $u = 30$ mi/h $= \frac{30 \times 1760 \times 3}{60 \times 60} = 44$ ft/s

সমীকরণ (iii) হইতে পাই, $44^2 = 2 \times 6.4 \times 8$

$$\text{বা,}\quad s = \frac{44 \times 44}{2 \times 6.4} = 151.25 \text{ ft}$$

উদাহরণ 5.11 20 kg ভরবিশিষ্ট একটি ব্লককে একটি সূতার সাহায্যে বাঁধিয়া অনুভূমিক তল বরাবর টানা হইতেছে। সূতাটি টেবিলের প্রান্তে আটকান একটি মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া এমনভাবে গিয়াছে যে, টেবিলের উপরের সূতার অংশটি অনুভূমিক হয়। সূতাটির অন্য প্রান্ত হইতে 12 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু ঝুলিতেছে। স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া যদি ব্লকটি প্রথম সেকেণ্ডে 20 cm দূরত্ব অতিক্রম করে তাহা হইলে ব্লক ও টেবিলের মধ্যে চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

চিত্র 5.11

[A block of mass 20 kg is being pulled along a horizontal table by a thread tied to it. The thread passes over a smooth pulley attached to the edge of the table such that the portion of thread over the table remains horizontal. A body of mass 12 kg hangs from the other end of the thread. If the block, starting from rest, covers 20 cm in the first second, calculate the coefficient of sliding friction between the block and the table.]

সমাধান : মনে করি, সূতার টান $= T$ নিউটন (চিত্র 5.11)। ব্লকটি প্রথম সেকেণ্ডে 20 cm বা, 0.2 m দূরত্ব অতিক্রম করে। ব্লকটির ত্বরণ f হইলে লেখা যায়, $\frac{1}{2} \times f \times 1^2 = 0.2$ $\quad [\because \quad s = \frac{1}{2} f t^2]$

$$\text{বা,}\quad f = 0.4 \text{ m/s}^2$$

টেবিলের উপরের ব্লকটির গতি বিবেচনা করিয়া লেখা যায়,

$$T - F = 20 \times f = 20 \times 0.4 \text{ N} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

এখানে, $F =$ ঘর্ষণ-বল $= \mu \times R = \mu \times 20$ kg-wt

$$\text{বা,}\quad F = \mu \times 20 \times 9.8 \text{ N} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সূতার অপর প্রান্ত হইতে ঝুলন্ত বস্তুটির গতি বিবেচনা করিয়া লেখা যায়,

$$12 \times 9.8 - T = 12 \times f$$

$$\text{বা,}\quad 12 \times 9.8 - T = 12 \times 0.4$$

$$\text{বা,}\quad T = 112.8 \text{ N}$$

(i) নং সমীকরণে T-এর মান বসাইয়া পাই,

$$F = 112.8 - 8 = 104.8$$

(ii) এবং (iii) হইতে পাই, $\mu = \dfrac{104.8}{20 \times 9.8} = 0.53$ (প্রায়)

উদাহরণ 5.12 200 lb ভরবিশিষ্ট ব্লককে একটি অনুভূমিক অমসৃণ তলের উপর দিয়া 90 lb-wt বলের দ্বারা টানা হইতেছে। 400 ft দূরত্ব অতিক্রম করিতে ব্লকটির কত সময় লাগিবে? ধরিয়া লও যে, চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক=0·4 এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ=32 ft/s^2।

[A block of mass 200 lb is being dragged along a rough horizontal surface by a force of 90 lb-wt. How long will the block take to move through a distance of 400 ft? Assume that the coefficient of kinetic friction=0·4 and the acceleration due to gravity=32 ft/s^2.]

সমাধান : আমরা জানি যে, চলমান অবস্থায় ব্লকটির উপর ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ-বল, $F=\mu_k R$

এখানে, μ_k = চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক = 0·4

R = লম্ব প্রতিক্রিয়া = ব্লকের ওজন = 200 lb-wt

কাজেই, ঘর্ষণ-বল, F=0·4 × 200=80 lb-wt

ব্লকটির উপর ক্রিয়াশীল অসম বল, P=প্রযুক্ত বল − ঘর্ষণ-বল

=(90−80)=10 lb-wt=10 × 32 poundal

সুতরাং, ব্লকটির ত্বরণ $f=\frac{P}{m}=\frac{10\times 32}{200}$ ft/s^2

400 ft দূরত্ব অতিক্রম করিতে ব্লকটি যদি t s সময় লয় তাহা হইলে লেখা যায়

$$400=\frac{1}{2}ft^2 \quad \text{বা} \quad t^2=\frac{2\times 400}{f}$$

বা, $t^2=\frac{2\times 400\times 200}{10\times 32}=500$ বা, $t=10\sqrt{5}=21·36$ s

উদাহরণ 5.13 অনুভূমিক রেখা বরাবর 300 m/s গতিবেগে ধাবমান 10 g ভরবিশিষ্ট একটি বুলেট অমসৃণ অনুভূমিক তলে অবস্থিত 290 g ভরবিশিষ্ট একটি কাঠের ব্লকের উপর আঘাত করিল। সংঘাতের পর বুলেট এবং ব্লক একই সঙ্গে চলিতে লাগিল এবং উহারা 15 m দূরত্ব গিয়া স্থির হইল। ব্লক এবং ভূমির মধ্যে চল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। অভিকর্ষজ ত্বরণ, g=9·8 m/s^2।

[A bullet of mass 10 g moving with a velocity of 300 m/s strikes a block of wood of mass 290 g which rests on a rough horizontal floor. After impact, the block and bullet move together and come to rest when they have travelled a distance of 15 m Calculate the coefficient of sliding friction between the block and the floor. The acceleration due to gravity = 9·8 m/s^2.]

সমাধান : সংঘাতের পূর্বে বুলেটের ভরবেগ = বুলেটের ভর × বুলেটের গতিবেগ
= (0·01 kg) × 300 m/s = 3 kg m/s

সংঘাতের পূর্বে ব্লকটির ভরবেগ ছিল শূন্য। কাজেই, সংঘাতের পূর্বে বুলেট ও ব্লকের মোট ভরবেগ=3 kg m/s

ধরি, সংঘাতের পর ব্লক ও বুলেটের গতিবেগ=V m/s

কাজেই, সংঘাতের পর ব্লক ও বুলেটের ভরবেগ $=(0.290+0.01)$ kg$\times$V m/s
$=0.3$ V kg m/s

ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র হইতে পাই,

সংঘাতের পূর্বে ব্লক ও বুলেটের ভরবেগ = সংঘাতের পর ব্লক ও বুলেটের ভরবেগ

$\therefore \quad 3=0.3$ V বা, $V=10$ m/s

কাজেই, সংঘাতের অব্যবহিতকাল পরে বুলেটসহ ব্লকটির গতিশক্তি

$=\frac{1}{2}\times0.3\times10^2=15$ J ... (i)

ব্লক ও বুলেটের যুগ্মভরটি 15 m দূরত্ব গিয়া স্থির অবস্থায় আসে। কাজেই, ইহার গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ-বলের মান F N হইলে ঘর্ষণ-বলের বিরুদ্ধে ব্লক ও বুলেট-কর্তৃক কৃত কার্য $=F\times15$ J ... (ii)

এই কার্য ব্লক ও বুলেটের সংঘর্ষোত্তর গতিবেগের সমান বলিয়া (i) এবং (ii) হইতে পাই, $F\times15=15$ বা, $F=1$ N

ব্লক ও ভূমির মধ্যে চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক μ হইলে লেখা যায়,

$F=\mu\times$[ব্লক ও বুলেটের ওজন]

বা, $1=\mu\times(0.3)\times9.8$

বা, $\mu=\dfrac{1}{0.3\times9.8}=0.34$ (প্রায়)

উদাহরণ 5.14 5 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে 30° কোণে অনুভূমিক তলের সহিত আনত নততলের উপর বসান হইল। যদি নততল এবং বস্তুটির মধ্যে ঘর্ষণ-গুণাঙ্কের মান 0·3 হয় তাহা হইলে বস্তুটিকে 10 m/s^2 ত্বরণে উপরের দিকে তুলিতে বস্তুটির উপর কী পরিমাণ বল প্রয়োগ করিতে হইবে ?

[A body of mass 5 kg is placed on an inclined plane of angle 30° to the horizontal. If the coefficient of friction be 0·3, find the force necessary to give the body an upward acceleration of 10 m/s^2.

সমাধান : নততল বরাবর বস্তুটির ওজনের উপাংশ $=W\sin30^\circ$

$=(5\text{ kg-wt})\times\frac{1}{2}=2.5\text{ kg-wt}=2.5\times9.8=24.5$ N

নততলের লম্ব-প্রতিক্রিয়া, $R=W\cos30^\circ=9.8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=42.44$ N

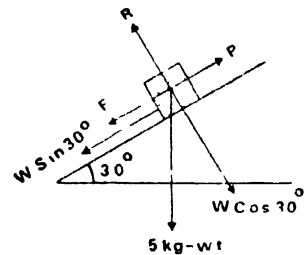
কাজেই, বস্তুটির ঊর্ধ্বাভিমুখী গতির বিরুদ্ধে গতিশীল ঘর্ষণ-বল, F

$=\mu R=0.3\times42.44=12.73$ N

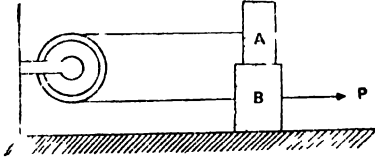
চিত্র 5.12

মনে করি, বস্তুটিকে নততল বরাবর 10 ft/s^2 ত্বরণে উপরের দিকে তুলিতে উহার উপর নততল বরাবর P নিউটন বল প্রয়োগ করিতে হয়। কাজেই, বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল ঊর্ধ্বমুখী অসম বল,

$P_0=P-F-W\sin30^\circ$

$=P-12.73-42.44$

কিন্তু $P_o = mf = (5 \text{ kg}) \times (10 \text{m/s}^2)$ বা, $P_o = 50$ N

$\therefore$ $P - 12{\cdot}73 - 42{\cdot}44 = 50$ বা, $P = 105{\cdot}17$ N

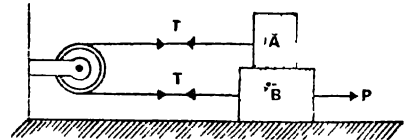
উদাহরণ 5.15 একটি ব্লক A টেবিলের উপর রক্ষিত অপর একটি ব্লক B-এর উপর স্থির অবস্থায় আছে। ইহারা একটি মসৃণ, ঘর্ষণহীন এবং স্থির কপিকলের উপর জড়ান তারের সাহায্যে পরস্পরের সহিত যুক্ত (চিত্র 5.13)। B ব্লকের ভর 0·8 kg এবং A ব্লকের ভর 0·2 kg। ব্লক B এবং টেবিলের মধ্যবর্তী চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক 0·2 এবং ব্লক A ও B-এর মধ্যে চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক 0·5। A ব্লকটির সমবেগ বজায় রাখিবার জন্য উহার উপর প্রযুক্ত অনুভূমিক বল P-এর মান কী হইবে ?

চিত্র 5.13

[A block A rests on the top of another block B placed on a table and is connected to it by means of a string passing round a smooth frictionless fixed pulley. The mass of A is 0·2 kg and that of B is 0·8 kg. The coefficient of kinetic friction between the block B and the table is 0·2 and that between A and B is 0·5. What horizontal force P applied on B will maintain the motion of the block B with uniform speed ?]

সমাধান : মনে করি, P বলের প্রভাবে B ব্লকটি যখন সমবেগে চলিতেছে তখন কপিকলের সহিত জড়ান তারটির টান T (চিত্র 5.14)। B ব্লকটি সমবেগে চলিলে ইহার সহিত যুক্ত A ব্লকটিও সমবেগে চলিবে। এই সময় A ব্লকের উপর ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ-বল সূতার টান T-এর সমান, কেননা ইহার উপর কোন অসম বল ক্রিয়া করিতেছে না (ত্বরণ শূন্য বলিয়া)। কাজেই লেখা যায়,

$T = \mu \times R = 0{\cdot}5 \times$ ব্লক A-এর ওজন $= 0{\cdot}5 \times (0{\cdot}2 \text{ kg}) \times (9{\cdot}8 \text{ m/s}^2)$
$= 0{\cdot}98$ N

চিত্র 5.14

এখন, B ব্লকটির সমবেগ বিবেচনা করিয়া লেখা যায়,

$P - T$ = B ব্লকের উপর ক্রিয়াশীল মোট ঘর্ষণ-বল
= টেবিল-কর্তৃক প্রযুক্ত ঘর্ষণ + A ব্লক-কর্তৃক প্রযুক্ত ঘর্ষণ
$= [0{\cdot}2 \times (0{\cdot}2 \text{ kg} + 0{\cdot}8 \text{ kg}) + 0{\cdot}5 \times (0{\cdot}2 \text{ kg})] \times (9{\cdot}8 \text{ m/s}^2)$
$= (0{\cdot}2 \times 1 + 0{\cdot}5 \times 0{\cdot}2) \times 9{\cdot}8 \text{ N} = 0{\cdot}3 \times 9{\cdot}8 \text{ N} = 2{\cdot}94$ N

অর্থাৎ, $P = (T + 2{\cdot}94) \text{ N} = (0{\cdot}98 + 2{\cdot}94) \text{ N} = 3{\cdot}92$ N

প্রশ্নমালা 5

1. 100 kg ভরবিশিষ্ট একটি ব্লক অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে আনত একটি অমসৃণ নততলের উপর স্থির অবস্থায় আছে। ব্লকটিকে ঐ নততল বরাবর সমবেগে উপরের দিকে সচল রাখিতে হইলে নততলের সমান্তরাল যে-বল প্রয়োগ করিতে হইবে তাহার মান নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক = 0·25

[A block of mass 100 kg rests on a rough plane inclined at an angle of 30° with the horizontal. Calculate the force parallel to the plane required to keep the block moving up the inclined plane at a constant velocity. Assume that the coefficient of friction is 0·25.] [71·65 kg-wt]

2. ঘর্ষণ-গুণাঙ্কের মান 0·2 হইলে, অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে আনত কোন নততল বাহিয়া নিম্নাভিমুখী চলমান ব্লকের ত্বরণ কত হইবে? ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ = 980 cm/s²]

[If the coefficient of fricition is 0·2, what will be the acceleration of a block sliding down a plane inclined at angle of 30° with the horizontal? Assume that the acceleration due to gravity is 980 cm/s².] [320 cm/s² (প্রায়)]

3. 3 m উচ্চতাবিশিষ্ট এবং 4 m দৈর্ঘ্যের ভূমিবিশিষ্ট একটি নততলের সমান্তরালভাবে কত বল প্রয়োগ করিয়া 1 kg ভরের একটি ব্লককে ঐ নততলের উপর স্থির অবস্থায় রাখা যায়? ধরিয়া লও যে নততলের ভূমিটি অনুভূমিক তলে রহিয়াছে।

[What force parallel to an inclined plane of height 3 m and base 4 m can just support a block of mass 1 kg placed on the plane? Assume that the base of the inclined plane is horizontal.] [400 g-wt]

4. অনুভূমিক তলের সহিত একটি নততলের আনতি কোণের পরিবর্তন করা যায়। ঐ নততলের আনতি 35° হইলে উহাতে অবস্থিত একটি ব্লক নততল বাহিয়া নিচে নামিতে শুরু করে। দেখা গেল যে, যদি আনতি কোণ কমাইয়া 30° করা যায় তাহা হইলে ব্লকটি ত্বরণহীনভাবে নিচের দিকে নামিতে থাকে। স্থিত ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক এবং চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

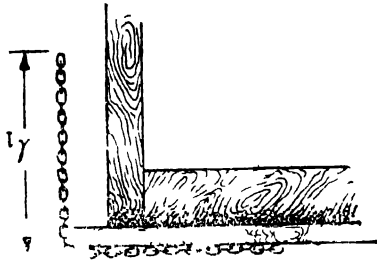
[The angle of inclination of a plane with the horizontal can be varied. A block, resting on the inclined plane, just begins to slide downwards when the angle of inclination is 35°, it is seen that it keeps moving downwards without acceleration if the angle of inclination is lowered to 30°. Find the coefficient of static friction and the coefficient of kinetic friction. [0·700, 0·577]

5. একটি অনুভূমিক টেবিলের উপর 40 N ওজনের একটি ব্লক রাখা হইল। একটি হাল্কা সূতা একটি ঘর্ষণহীন কপিকলের উপর দিয়া গিয়া ব্লকটিকে 30 N ওজনবিশিষ্ট অবাধে ঝুলানো একটি বস্তুর সহিত যুক্ত করিয়াছে। (i) যদি টেবিলটি ঘর্ষণহীন হয়, (ii) যদি ব্লক এবং টেবিলের মধ্যবর্তী ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক 0·10 হয় তাহা হইলে সংস্থাটির প্রাথমিক ত্বরণ কী হইবে?

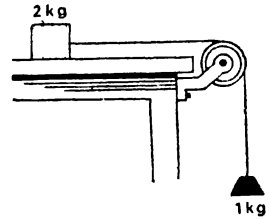
($g = 9·8$ m/s²)

[A block of weight 40 N is placed on a horizontal table. A light thread, passing over a frictionless pulley connects the block to a body of weight 30 N hanging freely. What will be the initial

acceleration of the system (i) if the table is frictionless, (ii) if the coefficient of friction between the block and the table is 0·10 ? ($g=9{\cdot}8$ m/s²)]

6. l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট এবং m ভরবিশিষ্ট একটি সুষম শৃঙ্খল আংশিকভাবে একটি টেবিল হইতে ঝুলিতেছে এবং ঘর্ষণ-বলের সাহায্যে সাম্যে আছে (চিত্র 5.15)। শৃঙ্খলটির যে-সর্বোচ্চ দৈর্ঘ্য টেবিল হইতে ঝুলিয়া থাকিলে সমগ্র শৃঙ্খলটি টেবিলের উপর দিয়া পিছলাইয়া পড়িবে না উহার মান l_1 হইলে স্থিত ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

চিত্র 5.15

[A homogeneous chain of length l and mass m hangs partly from a table and is held in equilibrium by the force of friction (Fig 5.15). Find the coefficient of static friction if the greatest length of the chain that can be hanging from the table without the whole chain slipping is l_1. $l_1/(l-l_1)$.

7. 2 kg এবং 1 kg ভরবিশিষ্ট দুইটি বস্তুকে একটি তারের সাহায্যে যুক্ত করা হইয়াছে (চিত্র 5.16)। যদি 2 kg ভরবিশিষ্ট বস্তুটির সহিত টেবিলের তলের ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক 0·25 হয় তাহা হইলে উহার ত্বরণ কত? দুইটি বস্তুর সংযোজী সূতার টান কত? কপিকল ও সূতার ওজন উপেক্ষণীয়। টেবিলের তলটি অনুভূমিক। ($g=981$ cm/s²)

চিত্র 5.16

[Two bodies of mass 2 kg and 1 kg are joined by a string as shown in Fig 5.16. What will be the acceleration of the body of mass 2 kg, if the coefficient of friction between the body and the surface of the table is 0·25 ? What will be the tension on the string joining the bodies ? The mass of the pulley and the weight of the string may be neglected. The plane of the table is horizontal. ($g=981$ cm/s²)] [163·5 cm/s², 0·833 kg-wt]

8. 100 lb ভরবিশিষ্ট একটি ব্লককে একটি অনুভূমিক অমসৃণ তলের উপর দিয়া 45 lb-wt বলের দ্বারা টানিয়া সরান হইতেছে। 200 ft দূরত্ব অতিক্রম করিতে ব্লকটির কত সময় লাগিবে? ধরিয়া লও যে, চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক = 0·4 এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ = 32 ft/s²।

[A block of mass 100 lb is being dragged along a rough horizontal surface by a force of 45 lb-wt. How long will the block take to move through a distance of 200 ft. Assume that the

coefficient of kinetic friction = 0·4 and the acceleration due to gravity = 32 ft/s².] [15·81 s]

9. 8 lb ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু একটি অমসৃণ অনুভূমিক টেবিলের ধার হইতে ঝুলিতেছে। বস্তুটি একটি হাল্কা সূতার সাহায্যে টেবিলের উপর বিদ্যমান 5 lb ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর সহিত যুক্ত; সূতাটি টেবিলের ধারে রক্ষিত একটি মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া গিয়াছে। টেবিলে রক্ষিত বস্তুটি স্থির অবস্থা হইতে 0·25 s সময়ে 0·5 ft দূরত্ব অতিক্রম করিল। টেবিল ও বস্তুটির মধ্যে চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A body of mass 8 lb is hanging over the edge of a rough horizontal table. It is connected to a body of mass 5 lb resting on the table by means of a light string passing over a smooth pulley at the edge of the table. The body on the table is pulled 0·5 ft along the table in 0·25 s from rest. Calculate the coefficient of kinetic friction between the body and the table.] [0·3]

10. 50 lb ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে আনত নততলের উপর বসান হইল। যদি নততল এবং বস্তুটির মধ্যে ঘর্ষণ-গুণাঙ্কের মান 0·3 হয় তাহা হইলে বস্তুটিকে 10 ft/s² ত্বরণে উপরের দিকে তুলিতে বস্তুটির উপর কী পরিমাণ বল প্রয়োগ করিতে হইবে?

[A body of mass 50 lb is placed on an inclined plane inclined at 30° to the horizontal. If the coefficient of friction 0·3, find the force necessary to give the body an upward acceleration of 10 ft/s².] [53·62 lb-wt]

11. W ওজনবিশিষ্ট একটি বস্তু একটি নততলের উপর রাখা আছে। নততলের সহিত α কোণ করিয়া একটি বল P বস্তুটিকে নততল বাহিয়া পড়িতে বাধা দিতেছে। অনুভূমিক তলের সহিত নততলটি θ কোণে আনত থাকিলে দেখাও যে,

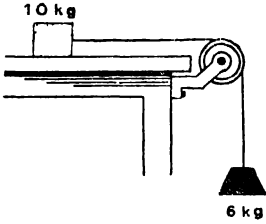
$$P = W.\ \frac{\sin(\theta - \lambda)}{\sin(\alpha + \lambda)} \quad (\lambda = \text{ঘর্ষণ-কোণ})।$$

প্রমাণ কর যে, বস্তুটি যখন নততল বরাবর উপরের দিকে উঠিবার উপক্রম করিবে তখন নততলের সহিত P বলের নতি ঘর্ষণ-কোণের সমান করিলে P বল ন্যূনতম হইবে।

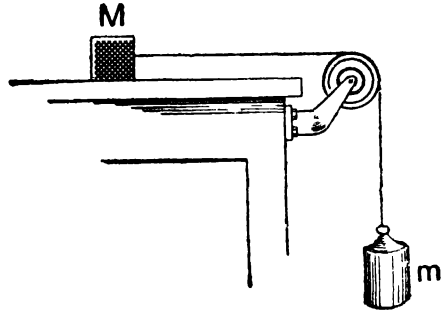
[A body of weight W rests on an inclined plane and a force P acting at an angle α with the inclined plane just prevents the body from sliding down. If the inclined plane makes an angle θ with the horizontal, show that

$$P = W.\ \frac{\sin(\theta - \lambda)}{\sin(\alpha + \lambda)} \quad (\lambda = \text{angle of friction})$$

When the body just begins to move upward under the influence of a force P, prove that the force will attain minimum value when the angle of inclination of the force with the inclined plane is equal to the angle of friction.]

12. 10 kg ভরবিশিষ্ট একটি ব্লককে একটি সূতার সাহায্যে বাঁধিয়া অনুভূমিক তল বরাবর টানা হইতেছে। সূতাটি টেবিলের প্রান্তে আটকান একটি মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া এমনভাবে গিয়াছে যে, টেবিলের উপরের সূতার অংশটি অনুভূমিক হয়। সূতাটির অন্য প্রান্ত হইতে 6 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু ঝুলিতেছে (চিত্র 5.17)। স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া যদি ব্লকটি প্রথম সেকেণ্ডে 20 cm দূরত্ব অতিক্রম করে তাহা হইলে চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

চিত্র 5.17

[A block of mass 10 kg is being pulled along a horizontal table by a thread tied to it. The thread passes over a smooth pulley attached to the edge of the table such that the portion of the table remain horizontal. A body of mass 6 kg hangs from the other end of the thread (Fig. 5.17). If the block, starting from rest, travels 20 cm in the first second, calculate the coefficient of sliding friction between the block and the table.] [0·53]

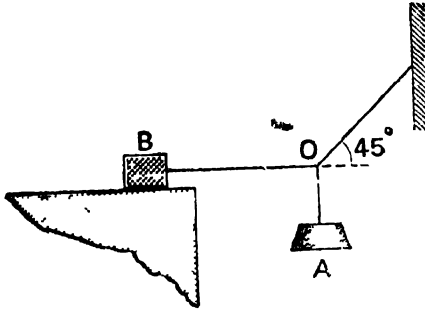
13. M এবং m ভরবিশিষ্ট দুইটি বস্তুকে একটি তারের সাহায্যে যুক্ত করা হইয়াছে (চিত্র 5.18)। যদি M ভরবিশিষ্ট বস্তুটির সহিত টেবিলের তলের ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক μ হয় তাহা হইলে বস্তুটির ত্বরণ কত? দুইটি বস্তুর সংযোজী সূতার টান কত? কপিকল এবং সূতার ওজন উপেক্ষণীয়। ধরিয়া লও যে, টেবিলের তলটি অনুভূমিক।

চিত্র 5.18

[Two bodies of mass M and m are ioined by a string as shown in Fig. 5.18. What will be the acceleration of the body M if the coefficient of friction between the body and the surface of the table is μ ? What will be the tension on the string joining the bodies ? The mass of the pulley and the weight of the string may be neglected. The plane of the table is horizontal.]

$$\left[\frac{mg-\mu\,\mathrm{M}g}{\mathrm{M}+m},\ \frac{\mathrm{M}mg}{(\mathrm{M}+m)}(1+\mu)\right]$$

14. মসৃণ টেবিলের উপর রক্ষিত 15 lb ভরের একটি বস্তুকে এক টুকরা হাল্কা অপ্রসার্য সূতা দ্বারা টানা হইতেছে। সূতাটি একটি মসৃণ কপিকলের উপর দিয়া গিয়াছে এবং উহার অপর প্রান্তে 1 lb ভরের একটি বস্তু ঝুলান আছে। সূতার টান এবং বস্তু-সংহতির ত্বরণ নির্ণয় কর।

[A mass of 15 lb is pulled along a smooth table by a light inextensible string passing over a smooth pulley and carrying a mass of 1 lb. Find the tension on the string and the acceleration of the system.] (সংসদের নমুনা প্রশ্ন, 1979) [30 poundals, 2 ft/s^2]

15. 5.19 নং চিত্রের B ব্লকটির ওজন 10 kg-wt, টেবিল এবং ব্লকের মধ্যে স্থিত ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক 0·25। A ব্লকটির ভর সর্বোচ্চ কত হইলে সংস্থাটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে নির্ণয় কর।

চিত্র 5 19

[Block B in Fig 5.19 weighs 10 kg-wt; the coefficient of static friction between the block and the table is 0·25. Find the maximum weight of the block A for which the system will be in equilibrium.] [2·5 kg-wt]

16. জনৈক ছাত্র একটি বাক্স এবং একটি তক্তার মধ্যবর্তী স্থিত ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক ও চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক নির্ণয় করিতে ইচ্ছুক। সে বাক্সটিকে ঐ তক্তার উপর স্থাপন করিয়া তক্তাটিকে ধীরে ধীরে তুলিতে লাগিল। যখন অনুভূমিক তলের সহিত তক্তাটির আনতি 30°, তখন বাক্সটি পিছলাইয়া পড়িতে লাগিল এবং 4 s সময়ে তক্তার উপর দিয়া 4 m দূরত্ব নামিয়া আসিল। ছাত্রটি এই পর্যবেক্ষণ হইতে দুইটি ঘর্ষণ গুণাঙ্কের কী মান পাইবে?

(অভিকর্ষজ ত্বরণ $=9\cdot8$ m/s^2)

[A student wants to determine the coefficients of static friction and kinetic friction between a box and a plank. He places the box on the plank and gradually raises the plank. When the angle of inclination with the horizontal is 30°, the box starts to slip and slides 4 m down the plank in 4 s. What values of these coefficients does the student get from the above observations? (The acceleration due to gravity $=9\cdot8$ m/s^2)]

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \ \frac{44}{49\sqrt{3}}\right]$$

17. অনুভূমিক রেখা বরাবর 400 m/s গতিবেগে ধাবমান 10 g ভরের একটি বুলেট অমসৃণ অনুভূমিক তলে অবস্থিত 390 g ভরের একটি কাঠের ব্লকের উপর আঘাত করিল। সংঘাতের পর বুলেট এবং ব্লক একই সঙ্গে চলিতে লাগিল এবং উহারা 20 m দূরত্ব গিয়া স্থির হইল। ব্লক ও ভূমির চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। (অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g=9\cdot8$ m/s^2)

[A bullet of mass 10 g moving with a velocity of 400 m/s strikes a block of wood of mass 390 g which rests on a rough horizontal floor. After impact, the block and bullet move

together and come to rest when they have travelled a distance of 20 m. Calculate the coefficient of sliding friction between the block and the floor. The acceleration due to gravity$=9{\cdot}8$ m/s^2.]

[0·26 (প্রায়)]

18. অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে আনত একটি নততল বরাবর একটি বস্তুকে উৎক্ষেপ করা হইল। যখন বস্তুটি পুনর্বার উহার যাত্রাস্থলে ফিরিয়া আসে তখন বস্তুটির দ্রুতি উহার প্রাথমিক দ্রুতির অর্ধেক হয়। বস্তুটি এবং নততলটির মধ্যে চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A body is projected directly up a plane which is inclined at 30° to the horizontal. When it returns to its starting point its speed is half its initial speed. Calculate the coefficient of dynamic friction between the body and the plane] [0·346]

ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ

বৃত্তীয় গতি

6.1 কৌণিক বেগ ও রৈখিক বেগের সম্পর্ক : কোন বস্তুকণা যদি r ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে ঘুরিতে থাকে তাহা হইলে উহার কৌণিক বেগ ω এবং রৈখিক বেগ v-এর সম্পর্ক এইরূপ : $v=\omega\times r$ ··· (6.1)

6.2 অভিকেন্দ্র ও অপকেন্দ্র বল : m ভরবিশিষ্ট কোন বস্তু v রৈখিক বেগ লইয়া r ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে চলিতে থাকিলে উহার উপর ক্রিয়াশীল অভিকেন্দ্র বল-এর মান, $F=\dfrac{mv^2}{r}$ ··· (6.2)

সমীকরণ (6.1) অনুসারে, $v=\omega r$ বলিয়া,

$$F=\frac{m}{r}(\omega r)^2=m\omega^2 r \qquad \cdots \qquad (6.3)$$

অপকেন্দ্র বল এবং অভিকেন্দ্র বল পরস্পর সমান বলিয়া সমীকরণ (6.2) এবং (6.3) হইতে অপকেন্দ্র বলের মানও পাওয়া যাইবে।

$$\text{এখন, অভিকেন্দ্র ত্বরণ}=\frac{\text{অভিকেন্দ্র বল}}{\text{বস্তুর ভর}}=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r \qquad \cdots \qquad (6.4)$$

6.3 কৌণিক ভরবেগ : কোন বস্তুর কৌণিক বেগ, ω এবং জাড্য ভ্রামক, I হইলে ইহার কৌণিক ভরবেগ, $L=I.\omega$ ··· (6.5)

6.4 রেললাইন বা রাস্তার ব্যাঙ্কিং কোণ : রেলগাড়ি ও মোটরগাড়ি যখন বাঁক লয় তখন উহাদের অভিকেন্দ্র বল যোগাইতে হয়। অনুভূমিক রাস্তার ক্ষেত্রে ঘর্ষণ-বল এই অভিকেন্দ্র বল সরবরাহ করে। অভিকেন্দ্র বলের ঊর্ধ্বসীমা বাড়াইবার জন্য অনেক সময় বাঁকের নিকট রাস্তা বা রেললাইনের এক পাশ একটু নিচু

অন্য পাশ একটু উঁচু করিয়া নির্মাণ করা হয়। বাঁকের কেন্দ্র যে-পাশে রাস্তার সেই পাশ নিচু রাখা হয়। রাস্তা বা রেললাইন অনুভূমিক তলের সহিত যে-কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে ব্যাঙ্কিং কোণ (angle of banking) বলা হয়।

রাস্তার ব্যাসার্ধ r এবং গাড়ির গতিবেগ v হইলে সঠিক ব্যাঙ্কিং কোণ θ-এর মান কত হইবে তাহা নিম্নের সমীকরণ হইতে পাওয়া যাইবে—

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \qquad \cdots \qquad (6.6)$$

এখানে g=অভিকর্ষজ ত্বরণ

6.5 সাইকেল-আরোহীর বাঁক লওয়া : সাইকেল-আরোহী কোন বাঁকের পাশে আসিয়া মোড় ঘুরিবার সময় বৃত্তপথের কেন্দ্রের দিকে ঝুঁকিয়া পড়ে। v গতিবেগে r ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে বাঁক লইবার সময় সাইকেল-আরোহী উল্লম্ব রেখার সহিত θ কোণে আনত হইলে লেখা যায়,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v^2}{rg} \qquad \cdots \qquad (6.7)$$

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 6.1 যে-উড়োজাহাজ 1000 m ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে 64 m/s^2 অভিকেন্দ্র ত্বরণে ঘুরিতেছে উহার দ্রুতি কত ?

[What is the speed of the aeroplane that turns round a circular path of radius 1000 m with a centripetal acceleration of 64 m/s^2 ?]

সমাধান : অভিকেন্দ্র ত্বরণ, $f = \frac{v^2}{r}$

এখানে v=বিমানের দ্রুতি এবং r=বৃত্তপথের ব্যাসার্ধ = 1000 m

শর্তানুসারে, f = 64 m/s^2 বলিয়া,

$$\therefore \quad 64 = \frac{v^2}{1000}$$

$$v = \sqrt{64 \times 1000} = 252{\cdot}98 \text{ m/s}$$

উদাহরণ 6.2 একটি তার 157·91 Mdyn অপেক্ষা বেশি বল সহ্য করিতে পারে না। 100 g ভরবিশিষ্ট একটি ঢিল ইহাতে বাঁধিয়া ঢিলটিকে 64 cm ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে ঘুরান হইতেছে। ঢিলটি সেকেণ্ডে সর্বোচ্চ কতবার আবর্তন করিলে তারটি ছিঁড়িবে না ?

[A string cannot support a load more than 157·91 Mdyn. A stone of mass 100 g is tied with it and the stone is being rotated in a horizontal circle of radius 64 cm. What is the maximum number of revolution that the stone can make per second without breaking the string ?]

সমাধান : মনে করি, পাথরটির সর্বোচ্চ কৌণিক বেগ $=\omega$ rad/s
পাথরটির উপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বলের সর্বোচ্চ মান

$$m\omega^2 r = 157{\cdot}91 \times 10^6 \text{ dyn}$$

এখানে, $m=100$ g, $r=64$ cm

$$\therefore \quad \omega^2 = \frac{157{\cdot}91 \times 10^6}{100 \times 64} = 24673{\cdot}44 \text{ (rad/s)}^2$$

$$\therefore \quad \omega = 157{\cdot}1 \text{ rad/s}$$

পাথরটি সেকেণ্ডে n বার ঘুরিলে লেখা যায়, $\omega = 2\pi n$

$$\text{বা,} \quad n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{157{\cdot}1}{2 \times \pi} = 25$$

উদাহরণ 6.3 জনৈক সাইকেল-আরোহী ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে যাইতেছিল। একটি মোড়ে আসিয়া বাঁক লইবার সময় অনুভূমিক তলের সহিত 60° কোণে হেলিয়া পড়িল। বাঁকের বক্রতা-ব্যাসার্ধ কত ?

[A cyclist moves at a speed of 15 miles/hour. While rounding a curve at a bend, he leans at 60° with the horizontal plane. What is the radius of curvature of the turn ?]

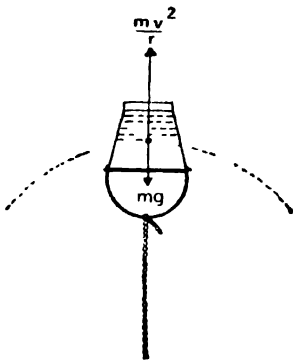
সমাধান : আমরা জানি যে, উল্লম্ব রেখার সহিত আরোহীর গতি θ হইলে

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

এখানে, $\theta = (90° - 60°) = 30°$, $v = 15$ মাইল/ঘণ্টা $= 22$ ft/s

এবং $g = 32$ ft/s²

$$\text{সুতরাং,} \quad r = \frac{v^2}{g \tan\theta} = \frac{22^2}{32 \times \tan 30°} = 26{\cdot}20 \text{ ft}$$

উদাহরণ 6.4 জলভরা একটি বালতি উল্লম্বতলে 80 cm ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে ঘুরান হইতেছে। বালতিটিকে ন্যূনতম কী গতিবেগে ঘুরাইলে উপুড় হওয়া সত্ত্বেও বালতি হইতে জল পড়িবে না ? ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ $=980$ cm/s²।

চিত্র 6.1

[A bucket full of water is being rotated in a circle of radius 80 cm in the vertical plane. What should be the minimum speed of rotation so that the water is not poured out even when the bucket gets inverted ? Assume that the acceleration due to gravity is equal to 980 cm/s².]

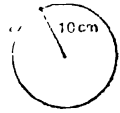
সমাধান : বালতির জলের উপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বলের মান ন্যূনতম জলের ওজনের সমান হইলে তবেই উপুড় অবস্থায়ও বালতির জল পড়িবে না (চিত্র 6.1)। সুতরাং, বালতির ন্যূনতম গতিবেগ v হইলে লেখা যায়,

$$\frac{mv^2}{r} = mg \text{ (এখানে } m = \text{জলের ভর) বা, } v = \sqrt{rg}$$

প্রশ্নানুসারে, r=80 cm এবং g=980 cm/s

সুতরাং, বালতির ন্যূনতম বেগ, $v = \sqrt{80 \times 980} = 280$ cm/s

উদাহরণ 6.5 একটি ইলেকট্রন 6×10^8 r. p. m. কৌণিক বেগে 10 cm ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে ঘুরিতেছে। ইলেকট্রনটির কৌণিক ভরবেগ কত ? ইলেকট্রনের ভর=$9{\cdot}11 \times 10^{-28}$ g।

[An electron is revolving in a circular path of radius 10 cm with a speed of 6×10^8 r. p. m. What is its angular momentum ? The mass of an electron $= 9{\cdot}11 \times 10^{-28}$g.]

10cm

চিত্র 6.2

সমাধান : ইলেকট্রনটির কৌণিক ভরবেগ, $L = I\omega$,

এখানে, I=জাড্য-ভ্রামক $= mr^2$

$\therefore \quad L = mr^2\omega$

এখানে, $\omega = 6 \times 10^8$ r. p. m.

$$= \frac{6 \times 10^8 \times 2\pi}{60} = 2\pi \times 10^7 \text{ rad/s}$$

$$m = 9{\cdot}11 \times 10^{-28} \text{ g}, \quad r = 10 \text{ cm}$$

$\therefore \quad L = 9{\cdot}11 \times 10^{-28} \times (10)^2 \times 2\pi \times 10^7 = 57{\cdot}24 \times 10^{-}$[illegible] g.cm²/s

উদাহরণ 6.6 একটি মোটর-সাইকেল 50 ft ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বক্রপথে বাঁক লইবার সময় 60 ft/s গতিবেগে চলিলে উহা হড়কাইয়া যায়। 150 ft ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বক্রপথে মোটর-সাইকেলটি সর্বোচ্চ কত গতিবেগে বাঁক লইতে পারিবে ?

[A motor cycle begins to skid when it makes a turn of 50 ft radius at a velocity of 60 ft/s. What is the highest velocity at which it can make a turn of 150 ft radius ?]

সমাধান : মোটর-সাইকেলটি বৃত্তপথে ঘুরিবার সময় ইহার উপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বল যদি রাস্তা ও চাকার মধ্যে ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ-বল অপেক্ষা বেশি হয় তাহা হইলে উহা হড়্কাইয়া যায়।

প্রশ্নের শর্তানুসারে, ঘর্ষণ-বলের সর্বোচ্চ মান

$$F = \frac{mv^2}{r} = m \times \frac{(60)^2}{50} \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

মনে করি, 150 ft ব্যাসার্ধের বক্রপথে বাঁক লইবার সময় উহা সর্বোচ্চ গতিবেগে চলিতে পারে। সুতরাং, এক্ষেত্রে

$$F = m \times \frac{v^2}{150} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$m \times \frac{v^2}{150} = m \times \frac{(60)^2}{50}$$

বা, $v = 60\sqrt{3} = 103.92$ ft/s

উদাহরণ 6.7 যদি রাস্তা এবং চাকার ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক 0·30 হয় তাহা হইলে অনুভূমিক রাস্তায় একটি গাড়ি 80 ft ব্যাসার্ধের বক্রপথে সর্বোচ্চ কত গতিবেগে বাঁক লইতে পারিবে ?

[What is the maximum speed at which a car can round a curve of radius 80 ft on a level road if the coefficient of friction between the road and the tyres is 0·30 ?]

সমাধান : গাড়িটিকে বৃত্তপথে ঘুরাইবার জন্য যে-অপকেন্দ্র বল প্রয়োজন হয় এক্ষেত্রে (অনুভূমিক রাস্তায়) কেবলমাত্র ঘর্ষণ-বলই তাহা সরবরাহ করে। কাজেই, অভিকেন্দ্র বলের সর্বোচ্চ মান ঘর্ষণ-বলের সীমান্থ মানের সমান হইবে।

গাড়ির ভর m হইলে এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ g হইলে ঘর্ষণ-বলের সীমান্থ (সর্বোচ্চ) মান, $F = \mu \times mg$, μ=ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক

গাড়িটির সর্বোচ্চ দ্রুতি v হইলে অভিকেন্দ্র বলের সর্বোচ্চ মান

$$F_c = \frac{mv^2}{r}, \quad r=\text{বক্রপথের ব্যাসার্ধ}$$

অভিকেন্দ্র বলের সর্বোচ্চ মান ঘর্ষণ-বলের সর্বোচ্চ মানের সমান বলিয়া লেখা যায়,

$$\frac{mv^2}{r} = \mu mg$$

বা, $v = \sqrt{\mu r g}$

এখানে, $\mu = 0.30$, $r = 80$ ft/s, $g = 32$ ft/s^2

$$\therefore \; v = \sqrt{0.30 \times 80 \times 32} = 27.71 \text{ ft/s}$$

উদাহরণ 6.8 জনৈক মোটর-সাইকেল-আরোহী ঘণ্টায় 120 মাইল বেগে একটি বৃত্তাকার রেস-কোর্স ধরিয়া চলিতেছে। যদি পথটির দৈর্ঘ্য 1 মাইল হয় তাহা হইলে মোটর-সাইকেল-আরোহী নিজেকে সাম্যে রাখিবার জন্য উল্লম্ব-রেখার সহিত কতটা হেলিয়া থাকিবে ?

[A motor-cyclist goes round a circular race course at 120 miles per hour. How far from the vertical must he lean inwards to keep his balance, if the track is 1 mile long.]

সমাধান : মোটর-সাইকেল-আরোহীর গতিবেগ

$$= 120 \text{ mi/h}$$
$$= \frac{120 \times 1760 \times 3}{60 \times 60} \text{ ft/s} = 176 \text{ ft/s}$$

বৃত্তাকার পথের দৈর্ঘ্য=1 mile=1760×3 ft = 5280 ft

কাজেই, এই পথের ব্যাসার্ধ $r=\frac{5280}{2\pi}$ ft=840 ft (প্রায়)

মনে করি, উল্লম্বরেখার সহিত আরোহীর নতি=θ

আমরা জানি, $\tan\theta=\frac{v^2}{rg}$

বা, $\tan\theta=\frac{(176)^2}{840\times32}=\frac{121}{105}$

$\therefore \quad \theta=49^\circ$ (প্রায়)

উদাহরণ 6.9 300 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে 2 m লম্বা একটি তারের সহিত বাঁধিয়া সমবেগে প্রতি মিনিটে 90 বার করিয়া অনুভূমিক বৃত্তপথে ঘুরান হইতেছে। তারের টান কত হইবে ?

[A body weighing 300 g is tied to the end of a string 2 metres long and revolves with uniform speed in a horizontal circle at 90 revolutions per minute. Find the tension in the string.]

সমাধান : কৌণিক বেগ, $\omega=2\pi\times90$ rad/min

$$=\frac{2\pi\times90}{60}\text{ rad/s}=3\pi\text{ rad/s}$$

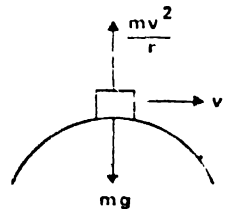
তারের উপর ক্রিয়াশীল টান=বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বল

$$=m\omega^2r=300\times(3\pi)^2\times2\times10^2\text{ dyn}$$

$$=5{\cdot}33\times10^6\text{ dyn (প্রায়)}$$

উদাহরণ 6.10 কোন খালের উপর একটি সেতু আকারে 50 ft ব্যাসার্ধের বৃত্তের জ্যা-এর ন্যায়। একটি গাড়ি সর্বোচ্চ কত দ্রুতিতে চলিলে সেতুর উচ্চতম বিন্দুতে গাড়িটি ভূমি ত্যাগ না করিয়া সেতু পার হইতে পারিবে ?

[The road-way bridge over a canal is in the form of an arc of radius 50 ft. What is the maximum speed with which a car can cross the bridge without leaving the ground at the highest point ?]

সমাধান : সেতুর সর্বোচ্চ বিন্দুতে অপকেন্দ্র বল উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বাভিমুখে ক্রিয়াশীল। গাড়ির দ্রুতি v হইলে উহার উপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বল$=\frac{mv^2}{r}$

চিত্র 6.3

অপকেন্দ্র বলের মান গাড়ির ওজন অপেক্ষা বেশি হইলে সর্বোচ্চ বিন্দুতে গাড়িটি ভূমি ত্যাগ করিবে। কাজেই ভূমি ত্যাগ না করিয়া সর্বোচ্চ যে-দ্রুতি লইয়া গাড়িটি সেতু পার হইতে পারিবে উহাকে v_{max} ধরিলে লেখা যায়,

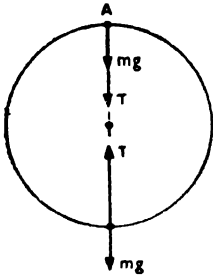
$$\frac{mv_{max}^2}{r}=mg \quad (g=\text{অভিকর্ষজ ত্বরণ})$$

$$\therefore \quad v_{max}=\sqrt{gr}$$

এখানে, $r=50$ ft এবং $g=32$ ft/s^2

$$\therefore \quad v_{max}=\sqrt{50\times 32}=40 \text{ ft/s}$$

উদাহরণ 6.11 2 কিলোগ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি পাথরকে একটি সূতার সাহায্যে বাঁধিয়া পাথরটিকে উল্লম্বতলে 1 m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তপথে 5 m/s বেগে ঘুরান হইতেছে। (i) পাথরটি যখন উহার সর্বোচ্চ অবস্থানে, (ii) সর্বনিম্ন অবস্থানে আছে, তখন সূতাটির টান কত ?

[A stone of mass 2 kg attached to a string is whirled in a vertical circle of radius 1 m with a speed of 5 m/s. What is the tension of the string when (i) the stone is at the topmost position. (ii) at the bottom of the circle ?]

চিত্র 6.4

সমাধান : পাথরটি 5 m/s বেগে 1 m ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে গতিশীল রাখিবার জন্য প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল,

$$F_c=\frac{mv^2}{r}=\frac{2\times 5^2}{1}=50 \text{ N}$$

পাথরের ওজন $=mg=2\times 9{\cdot}8=19{\cdot}6$ N

সর্বোচ্চ অবস্থানে, অভিকেন্দ্র বল = সূতার টান + পাথরের ওজন (চিত্র 6.4)।

সূতার টান = অভিকেন্দ্র বল − পাথরের ওজন

$$=\frac{mv^2}{r}-mg=(50-19{\cdot}6)=30{\cdot}4 \text{ N}$$

সর্বনিম্ন অবস্থানে, অভিকেন্দ্র বল = সূতার টান − পাথরের ওজন (চিত্র 6.4)।

∴ সূতার টান = অভিকেন্দ্র বল + পাথরের ওজন

$$=\frac{mv^2}{r}+mg=50+19{\cdot}6=69{\cdot}6 \text{ N}$$

উদাহরণ 6.12 একটি গ্রামোফোনের ঘূর্ণমান চাকতির ঘূর্ণাক্ষ হইতে 7 cm দূরে একটি ক্ষুদ্র মুদ্রা রাখা হইল। শূন্য হইতে ঘূর্ণনের হার ধীরে ধীরে বৃদ্ধি করিতে থাকিলে, যখন ঘূর্ণনের হার প্রতি মিনিটে 60 হয় তখন মুদ্রাটি বাহিরের দিকে চলিতে শুরু করে। (i) যদি মুদ্রাটি অক্ষ হইতে 12 cm দূরে রাখা হয় এবং (ii) যদি পূর্ববর্তী অবস্থানে রক্ষিত মুদ্রাটির উপর অপর একটি অনুরূপ মুদ্রা আটকানো হয় তবে ঘূর্ণনের হার কত হইলে মুদ্রার চলন শুরু হইবে ?

[A small coin is placed on a gramophone turntable at a distance

of 7 cm from the axis of rotation. When the rate of rotation is gradually increased from zero the coin begins to slide outwards when the rate reaches 60 revolutions per minute. Calculate the rate of rotation for which sliding would commence, if (i) the coin were placed 12 cm from the axis, (ii) the coin were placed in the original position with another similar coin stuck on top of it.]

(London University School Examination, 1940)

সমাধান ঃ মুদ্রাটি যখন ঘূর্ণমান চাক্তির ঘূর্ণাক্ষ হইতে r দূরত্বে অবস্থিত তখন উহার উপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বল$=m\omega^2 r$

এখানে, $m=$মুদ্রাটির ভর

$\omega=$ঘূর্ণমান চাক্তির কৌণিক বেগ

যদি চাক্তিটি প্রতি সেকেণ্ডে n বার ঘুরে তাহা হইলে লেখা যায় যে,

$$\omega=2\pi n$$

কাজেই, অপকেন্দ্র বল $m\omega^2 r=m\times(2\pi n)^2\ r=4\pi^2 n^2 mr$

যখন মুদ্রাটির সচল হইবার উপক্রম হয় তখন স্থিত ঘর্ষণের সীমাস্থ মান মুদ্রার উপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বলের সমান হয়।

অর্থাৎ, ঘর্ষণ বলের সর্বোচ্চ মান, $F_s=4\pi^2 n^2 mr$

এখানে, $n=\frac{60}{60}=1/\text{s}$, $r=7$ cm

$$\therefore \quad F_s=4\pi^2\times 1^2\times m\times 7=28\pi^2 m \qquad \cdots \qquad (i)$$

(i) মনে করি, যখন ঘূর্ণাক্ষ হইতে মুদ্রার দূরত্ব 12 cm তখন চাক্তির কৌণিক বেগ ω_1 হইলে মুদ্রাটির সচল হইবার উপক্রম হয়। এক্ষেত্রেও, অপকেন্দ্র বল ও ঘর্ষণবল সমান বলিয়া লিখিতে পারি,

$$F_s=m\omega_1{}^2 r=\omega_1{}^2\times 12 \qquad \cdots \qquad (ii)$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $m\omega_1{}^2\times 12=28\pi^2 m$

বা, $\omega_1{}^2=\frac{28}{12}\pi^2$ বা, $\omega_1=\sqrt{\frac{7}{3}}\ \pi$

এই সময় চাক্তির ঘূর্ণনের হার মিনিটে N হইলে লেখা যায়,

$$2\pi\left(\frac{N}{60}\right)=\sqrt{\frac{7}{3}}\pi$$

বা, $N=30\sqrt{\frac{7}{3}}=45{\cdot}83$ (প্রায়)

(ii) প্রথম মুদ্রাটিকে প্রথম অবস্থানে রাখিয়া উহার উপর অপর একটি অনুরূপ মুদ্রা স্থাপন করিলে ঐ মুদ্রাদ্বয়ের উপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বলের মান হইবে

$$(2m)\omega^2\times 7$$

দুইটি মুদ্রার ওজন একটি মুদ্রার ওজনের দ্বিগুণ বলিয়া এক্ষেত্রে লম্ব-প্রতিক্রিয়ার মান দ্বিগুণ হইবে, ফলে ঘর্ষণ-বলের সীমাস্থ মানও দ্বিগুণ হইবে। অর্থাৎ, এক্ষেত্রে ঘর্ষণ-বলের সীমাস্থ মান$=2\ F_s$

এক্ষেত্রে ধরা যাক যে, যখন ঘূর্ণমান গ্রামোফোন চাক্তির কৌণিক বেগ ω_2 তখন মুদ্রাদ্বয়ের সচল হইবার উপক্রম হয়। সুতরাং, লেখা যায়,

$$2\, m\omega_2{}^2 \times 7 = 2\, F_s$$

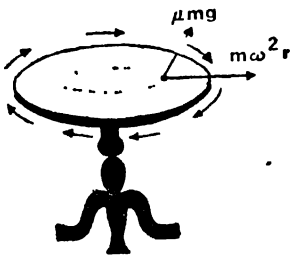
কিন্তু, $F_s = 28\pi^2 m$ [সমীকরণ (i) হইতে]

$\therefore \quad 2\, m\omega_2{}^2 \times 7 = 2 \times 28\, \pi^2 m$ বা, $\omega_2{}^2 = 4\pi^2$ বা, $\omega_2 = 2\,\pi$

এক্ষেত্রে চাক্তিটির ঘূর্ণনের হার মিনিটে N' হইলে লেখা যায়,

$$\omega^2 = 2\pi\left(\frac{N'}{60}\right) = 2\,\pi \quad \text{বা,} \quad N' = 60$$

উদাহরণ 6.13 একটি অনুভূমিক বৃত্তাকার ঘূর্ণমান টেবিল উহার কেন্দ্রের সাপেক্ষে প্রতি মিনিটে 120 বার ঘুরে। একটি ক্ষুদ্র বস্তু টেবিলের কেন্দ্র হইতে সর্বোচ্চ কত দূরে থাকিলে উহা ঘূর্ণমান টেবিলটির সাপেক্ষে স্থির অবস্থায় থাকিবে? ধরিয়া লও যে, স্থিত ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক 0·80 এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ 980 cm/s² ।

[A horizontal circular turntable rotates about its centre at the rate of 120 revolutions per minute. Calculate the greatest distance from the centre at which a small body will remain stationary relative to the turntable. Assume that the coefficient of static friction is 0·80 and acceleration due to gravity is 980 cm/s².]

চিত্র 6.5

সমাধান : মনে করি, বস্তুটি ঘূর্ণমান টেবিলের কেন্দ্র হইতে সর্বোচ্চ r দূরত্বে থাকিলে বস্তুটি স্থির অবস্থায় থাকিতে পারে। এই অবস্থায় বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বল, $m\omega^2 r$-এর সমান (চিত্র 6.5), এখানে ω হইল বস্তুটির (অর্থাৎ, ঘূর্ণমান টেবিলটির) কৌণিক বেগ।

প্রশ্নের শর্তানুসারে, এই বলের মান বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ-বলের সীমাস্থ মানের সমান হইবে।

এখন, বস্তুটির ভর m হইলে ইহার উপর ক্রিয়াশীল স্থিত ঘর্ষণ-বলের সীমাস্থ মান, $F_s = \mu mg$, এখানে g হইল অভিকর্ষজ ত্বরণ। সুতরাং লেখা যায়,

$$F_s = F_c$$

বা, $\mu mg = m\omega^2 r$ বা, $r = \dfrac{\mu g}{\omega^2} = \dfrac{\mu g}{(2\,\pi n)^2}$

এখানে n হইল প্রতি সেকেণ্ডে ঘূর্ণমান টেবিলের ঘূর্ণন-সংখ্যা।

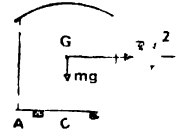
কাজেই, $r = \dfrac{\mu g}{4\,\pi^2 n^2}$

এখানে, $\mu = 0{\cdot}80$, $n = \frac{120}{60} = 2/\text{s}$ এবং $g = 980$ cm/s²

$$\therefore \quad r = \frac{0{\cdot}80 \times 980}{4\pi^2 \times 2^2} = \frac{49}{\pi^2} = 4{\cdot}96 \text{ cm (প্রায়)}$$

উদাহরণ 6.14 একটি রেলওয়ে ট্রাকের ভারকেন্দ্র রেললাইনের লেভেল হইতে 0·80 m উপরে রহিয়াছে। রেললাইন দুইটির দূরত্ব 1·2 m। ট্রাকটি 50 m ব্যাসার্ধের ব্যাঙ্কিংহীন বক্রপথে সর্বোচ্চ কত দ্রুতিতে নিরাপদে বাঁক লইতে পারিবে ?

[A railway truck has its centre of gravity 0·80 m above the rails, which are 1·2 m apart. At what maximum speed could the truck travel safely round an unbanked curve of radius 50 m ? The acceleration due to gravity=9·8 m/s²]

সমাধান : মনে করি, ট্রাকটির ভারকেন্দ্র G বিন্দুতে অবস্থিত। A এবং B হইল দুইটি রেললাইনের অবস্থান। C ইহার মধ্যবিন্দু (চিত্র 6 6)। ধরি, G হইতে অঙ্কিত উল্লম্ব রেখা C-এর মধ্য দিয়া যায়।

চিত্র 6.6

ট্রাকটি বক্রপথে v দ্রুতিতে চলিলে ইহার উপর mv^2/r মানের অপকেন্দ্র বল ক্রিয়া করে (এখানে r হইল বক্রপথের ব্যাসার্ধ)। এই বল অনুভূমিক।

B বিন্দুর সাপেক্ষে অপকেন্দ্র বল mv^2/r-এর ভ্রামক ঐ বিন্দুর সাপেক্ষে ওজন mg-এর ভ্রামক অপেক্ষা বেশি হইলে ট্রাকটি উল্টাইয়া পড়িবে। সুতরাং, যে-দ্রুতির জন্য B বিন্দুর সাপেক্ষে অপকেন্দ্র বলের ভ্রামক ঐ বিন্দুর সাপেক্ষে ট্রাকের ওজনের ভ্রামকের সমান তাহাই ট্রাকের দ্রুতির সর্বোচ্চ নিরাপদ মান।

$$\therefore \quad \frac{mv^2}{r} \times GC = mg \times BC \quad \cdots \quad (1)$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $r=50$ m, GC=0·8 m

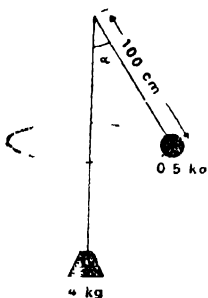
এবং $BC=\frac{1}{2}.AB=\frac{1}{2}\times 1{\cdot}2=0{\cdot}6$ m

সমীকরণ (1) হইতে লেখা যায়, $\frac{v^2}{50}\times 0{\cdot}8=g\times 0{\cdot}6$

বা $v^2=\frac{g\times 0{\cdot}6\times 50}{0{\cdot}8}=\frac{9{\cdot}8\times 0{\cdot}6\times 50}{0{\cdot}8}=367{\cdot}5\ (m/s)^2$

$\therefore \quad v=19{\cdot}17$ m/s

উদাহরণ 6.15 4 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু এবং 0·5 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু একটি তারের দুই প্রান্তে যুক্ত। তারটি একটি মসৃণ উল্লম্ব নলের মধ্য দিয়া গিয়াছে। 0·5 kg ভরবিশিষ্ট বস্তুটি একটি অনুভূমিক বৃত্তপথে ঘুরে (চিত্র 6.7)। 0·5 kg ভর হইতে নলের উপর পর্যন্ত তারের দৈর্ঘ্য 1 m এবং এই তারের দৈর্ঘ্য উল্লম্ব রেখার সহিত α কোণ করিয়া আছে। 0·5 kg ভরবিশিষ্ট বস্তুটির ঘূর্ণনের কম্পাঙ্ক কত হইলে 4 kg ভরবিশিষ্ট বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকে ?

[A body of mass 4 kg and body of 0·5 kg hang at the two ends of a string that passes through a smooth vertical tube (Fig. 6.7). The mass 0·5 kg moves around a circular path which lies in a horizontal plane. The length of the string from the mass 0·5 kg to the top of the tube is 1 m and α is the angle this length makes with the vertical. What should be the frequency of rotation of mass 0·5 kg so that the mass 4 kg remains stationary ?]

চিত্র 6.7

সমাধান : 0 5 kg ভরবিশিষ্ট বস্তুটি অনুভূমিক তলে ঘুরিতেছে। তারের টান T-এর অনুভূমিক উপাংশ এই ঘূর্ণনের জন্য প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল যোগাইতেছে।

কাজেই, বস্তুটির কৌণিক বেগ ω হইলে লেখা যায়,

$$T \sin \alpha = m\omega^2 r, \quad \cdots \quad (i)$$

m=বস্তুটির ভর=0·5 kg এবং r=বৃত্তপথের ব্যাসার্ধ

$=1. \sin \alpha$ মিটার

বস্তুটির ঘূর্ণনের কম্পাঙ্ক n হইলে আমরা জানি যে,

$$\omega = 2\pi n$$

সমীকরণ (i) হইতে পাই,

$$T \sin \alpha = 0{\cdot}5 \times (2\pi n)^2 \times \sin \alpha$$

বা, $T = 0{\cdot}5 \times 4\pi^2 n^2$ N $\quad \cdots \quad$ (ii)

সূতার টান-এর ক্রিয়ায় 4 kg ভরবিশিষ্ট বস্তুটি সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া লেখা যায়, T = 4 kg-wt

$= 4 \times 9{\cdot}8$ N $\quad \cdots \quad$ (iii)

চিত্র 6.8

(ii) এবং (iii) হইতে লেখা যায়, $0{\cdot}5 \times 4\pi^2 n^2 = 4 \times 9{\cdot}8$

বা, $n^2 = \dfrac{4 \times 9{\cdot}8}{0{\cdot}5 \times 4\pi^2}$

বা, $n = \dfrac{\sqrt{9{\cdot}8}}{\pi}$ Hz = 1 Hz (প্রায়)

প্রশ্নমালা 6

1. যদি রাস্তা ও চাকার ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক 0 25 হয় তাহা হইলে অনুভূমিক রাস্তায় একটি গাড়ি 60 ft ব্যাসার্ধের বক্রপথে সর্বোচ্চ কত গতিবেগে বাঁক লইতে পারিবে ? ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ = 32 ft/s² ।

[What is the maximum speed at which a car can round a curve of radius 60 ft on a level road if the coefficient of friction between the road and the tyres is 0·25 ? Assume that the acceleration due to gravity is equal to 32 ft/s^2.] [21·91 ft/s]

2. একটি মোটর-সাইকেল 60 ft ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বক্রপথে বাঁক লইবার সময় 80 ft/s গতিবেগে চলিলে উহা হড়কাইয়া যাইতে শুরু করে। 100 ft ব্যাসার্ধের বক্রপথে উহা সর্বোচ্চ কত গতিবেগে বাঁক লইতে পারিবে ?

A motor cycle begins to skid when it takes a turn of 60 ft radius at a velocity of 80 ft/s. What is the highest velocity at which it can take a turn of 100 ft radius ?] [103·28 ft/s]

3. জনৈক সাইকেল-আরোহী 100 m ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে 20 m/s বেগে বাঁক লইবার সময় উল্লম্ব তলের সহিত কত কোণে আনত হইবে ?

[A cyclist takes a turn at a circular path of radius 100 m with a velocity of 20 m/s. At what angle must he lean with the vertical plane ?] [22 ·20]

4. একটি জলভরা বালতিকে উল্লম্ব তলে 70 cm ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে ঘুরানো হইতেছে। উহাকে ন্যূনতম কত গতিবেগে ঘুরাইলে উপুড় অবস্থাতেও উহা হইতে জল পড়িবে না ? ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 980 cm/s^2 ।

[A bucket full of water is being rotated in a circle of radius 70 cm in the vertical plane. What should be the minimum speed of rotation so that the water is not poured out even when the bucket gets inverted ? Assume that the acceleration due to gravity is equal to 980 cm/s^2.] [261·92 cm/s]

5. 200 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে 1 m লম্বা একটি তারের সহিত বাঁধিয়া সমবেগে মিনিটে 75 বার করিয়া অনুভূমিক বৃত্তপথে ঘুরান হইতেছে। তারের টান কত ?

[A body of mass 200 g is tied to the end of a string 1 m long and revolves with uniform speed in a horizontal circle at 75 revolutions per minute. Find the tension of the string] [$6·17 \times 10^5$ dyn]

6. একটি তার 16 $\pi^2 \times 10^4$ dyn অপেক্ষা বেশি বল সহ্য করিতে পারে না। 50 g ভরবিশিষ্ট একটি পাথর উহাতে বাঁধিয়া পাথরটিকে 50 cm ব্যাসার্ধের অনুভূমিক বৃত্তপথে ঘুরান হইতেছে। পাথরটি সেকেণ্ডে সর্বোচ্চ কতবার আবর্তন করিলে তারটি ছিঁড়িবে না ?

[A string cannot withstand a force more than $16\pi^2 \times 10^4$ dyn. A stone of mass 50 g is tied with it and the stone is being rotated in a horizontal circle of radius 50 cm. What is the maximum number of revolutions per second that the stone can make without breaking the string ?] [4]

7. 1000 lb ভরবিশিষ্ট একটি গাড়ির চাকায় রাস্তা সর্বোচ্চ 400 lb-wt ঘর্ষণ-জনিত বল প্রয়োগ করিতে পারে। সর্বোচ্চ কত গতিবেগে গাড়িটি ঐ রাস্তার 320 ft ব্যাসার্ধের বক্রপথে বাঁক লইতে পারে ?

[The maximum frictional force that the road can exert on

the wheels of a car of mass 1000 lb is 400 lb-wt. At what maximum speed can the car travel round a curve of radius 320 ft in the road ?] [64 ft/s]

8. একটি বস্তুকণা 50 cm ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে 0·5 rad/s কৌণিক বেগে ঘুরিতেছে। বস্তুকণাটির রৈখিক দ্রুতি এবং বৃত্তটির উপর দিয়া একবার সম্পূর্ণভাবে ঘুরিয়া আসিতে কত সময় লাগিবে তাহা নির্ণয় কর।

[A particle is revolving along a circular path of radius 50 cm with an angular velocity of 0·5 rad/s. Calculate the linear speed of the particle and the time taken by it for a complete revolution.] [25 cm/s, 12·57 s]

9. 1000 kg ভরবিশিষ্ট একটি গাড়ি 30 m ব্যাসার্ধের বক্রপথে 9 m/s গতিবেগে বাঁক নেয়। ইহাতে কি পরিমাণ অভিকেন্দ্র বল প্রয়োজন ?

[A car of mass 1000 kg rounds a turn of radius 30 m at a velocity of 9 m/s. How much centripetal force is required ?] [2700 N]

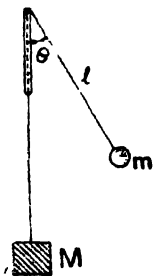
10. অজানা ভরের একটি বলকে একটি উল্লম্ব বৃত্তপথে ঘুরাইবার জন্য 1 m লম্বা একটি তার ব্যবহৃত হইল। বলটির গতিবেগ ন্যূনতম কত হইলে এই বৃত্তের সর্বোচ্চ বিন্দুতে তারটি কোনক্রমে টান-টান অবস্থায় থাকিবে ?

[A string of length 1 m is used to whirl a ball of unknown mass in a vertical circle. What is the minimum velocity of the ball so that the string remains just taut when the ball is at the top of the circle ?] [3·13 m/s]

11. যে-উড়োজাহাজ 800 m ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে 50 m/s^2 অভিকেন্দ্র ত্বরণে ঘুরিতেছে উহার দ্রুতি কত ?

[What is the speed of the aeroplane that turns round a circle of radius 800 m with a centripetal acceleration of 50 m/s^2 ?] [200 m/s]

12. 1 kg ভরবিশিষ্ট একটি পাথরকে একটি সূতার সাহায্যে বাঁধিয়া উহাকে উল্লম্ব তলে 50 cm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তপথে 500 cm/s বেগে ঘুরান হইতেছে। (i) পাথরটি যখন উহার সর্বোচ্চ অবস্থানে, (ii) সর্বনিম্ন অবস্থানে তখন সূতার টান কত ?

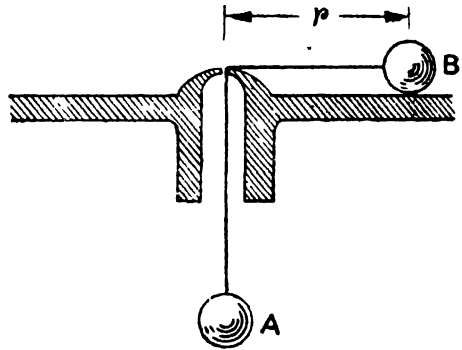
[A stone of mass 1 kg attached to a string is whirled in a vertical circle of radius 50 cm with a speed of 500 cm/s. What is the tension of the string when (i) the stone is at the top-most position, (ii) at the bottom of the circle ?] [40·2 N, 59·8 N]

চিত্র 6.9

13. একটি বড় ভর M এবং একটি ছোট ভর m একটি তারের দুই প্রান্তে যুক্ত। তারটি 6.9 নং চিত্রের অনুরূপভাবে একটি মসৃণ নলের মধ্য দিয়া গিয়াছে। m ভরটি একটি অনুভূমিক বৃত্তপথে ঘুরে। m ভর হইতে নলের উপর পর্যন্ত তারের দৈর্ঘ্য l এবং এই তারের দৈর্ঘ্য উল্লম্ব রেখার সহিত θ কোণ করিয়া আছে। m ভরটির এই ঘূর্ণনের কম্পাঙ্ক কত হইলে M ভরটি সাম্যাবস্থায় থাকে ?

[A large mass M and a small mass m hang at two ends of a

string that passes over a smooth tube as shown in Fig. 6.9. The mass m moves around a circular path which lies in a horizontal plane. The length of the string from the mass m to the top of the tube is l and θ is the angle this length makes with the vertical. What should be the frequency of rotation of mass m so that the mass M remains stationary ?] (I. I. T. Adm. Test, 1978)

$$\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mg}{ml}}\right]$$

14. দুইটি সদৃশ গোলক A এবং B একটি সূতার দুই প্রান্তে যুক্ত। সূতাটি একটি নলের মধ্য দিয়া গিয়াছে (চিত্র 6.10)। B গোলকটি একটি অনুভূমিক তলের উপর ঘুরিতেছে। নলের অক্ষ হইতে B গোলকটির দূরত্ব r। B গোলকটির কৌণিক বেগ কত হইলে A গোলকটি উঠিবেও না, নামিবেও না, ঘর্ষণ উপেক্ষা কর।

[Two similar spheres A and B are attached to the ends of a string which passes through a tube as shown in Fig. 6.10. The sphere B rotates in a horizontal plane. The distance from the axis of the tube to the sphere B is r. What should be the angular velocity of the sphere B in order that the sphere A should neither rise nor fall ? Neglect friction.]

চিত্র 6.10

$\left[\sqrt{\frac{g}{r}}\right.$, $g=$ অভিকর্ষজ ত্বরণ $\left.\right]$

15. m ভরবিশিষ্ট একটি পাথরকে একটি সূতার সহিত বাঁধিয়া r ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে উল্লম্ব তলে ঘুরান হইতেছে। দেখাও যে, সর্বোচ্চ অবস্থানে পাথরটির বেগ $\sqrt{gr}$ অপেক্ষা বেশি হইলে সূতাটি শিথিল হইবে না। উপরের অবস্থানে পাথরটির গতিবেগে ঐ ন্যূনতম গতিবেগের সমান হইলে সর্বনিম্ন অবস্থানে পাথরটির গতিবেগ কত হইবে ?

[A body of mass m attached to a string is whirled in a vertical circle of radius r. Show that, if the velocity of the stone is more than $\sqrt{gr}$, it will not slacken at the topmost position. If the stone moves with that minimum velocity at the topmost position, what is its velocity at the bottom of the circle ?]

[$\sqrt{5gr}$, $g=$ অভিকর্ষজ ত্বরণ]

16. এক মেগাডাইন বলপ্রয়োগ করিলে একগাছি দড়ি ছিঁড়িয়া যায়। 100 g ভরবিশিষ্ট একখণ্ড পাথরকে ঐ দড়ি দিয়া বাঁধিয়া অনুভূমিক তলে 100 cm ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে ঘুরান হইতে লাগিল। মিনিটে আবর্তন-সংখ্যা কত হইলে দড়িটি ছিঁড়িয়া যাইবে ?

[A string breaks when a force of 1 Mdyn is applied to it. A stone of mass 100 g is attached to it and is whirled in a horizontal circle of radius 100 cm. What is the number of revolutions per minute that will break the string ?] $\left[\frac{300}{\pi}\right]$

17. একটি অনুভূমিক ঘূর্ণমান টেবিলের উপর একটি ছোট মুদ্রা স্থাপন করা হইল। টেবিলটিকে 3·14 s সময়ে তিনবার আবর্তিত হইতে দেখা গেল। (i) যদি মুদ্রাটিকে ঘূর্ণমান টেবিলের কেন্দ্র হইতে 7·5 cm দূরে রাখা হয় এবং যদি মুদ্রাটি পিছলাইয়া না যায় তবে মুদ্রাটির রৈখিক দ্রুতি কত হয়? মুদ্রাটির ত্বরণও (মান এবং অভিমুখ) নির্ণয় কর। যদি মুদ্রাটির ভর 5 g হয় তবে মুদ্রাটির উপর ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ-বলের মান কত ? (ii) মুদ্রাটিকে টেবিলের কেন্দ্র হইতে 10 cm অপেক্ষা বেশি দূরে স্থাপন করিলে যদি ইহা পিছলাইয়া টেবিল হইতে বাহির হইয়া যায় তাহা হইলে মুদ্রা এবং টেবিলের মধ্যে স্থিত ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক কত ?

[A small coin is placed on a horizontal turntable. It is seen that the turntable makes three revolutions in 3·14 s. (i) What is the linear speed of the coin when it rests on the turntable without slipping at a distance 7·5 cm from its centre ? Find also the acceleration magnitude and direction) of the coin. What is the frictional force acting on the coin, if the coin has a mass of 5 g ? (ii) What is the coefficient of static friction between the coin and the turntable if the coin is seen to slide off the turntable when it is placed at distance greater than 10 cm from the centre of the turntable ?]

[(i) 45 cm/s, 270 cm/s², ঘূর্ণমান টেবিলের কেন্দ্রাভিমুখে, 1350 dyn (ii) 0 37]

সপ্তম পরিচ্ছেদ

বলের ভ্রামক, বস্তুর সাম্য, ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্র

7.1 বলের ভ্রামক ঃ কোন বিন্দু বা অক্ষে অবাধে ঘূর্ণনক্ষমভাবে আটকান কোন বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করিলে বস্তুটি ঐ বিন্দু বা অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরিতে চাহে এবং ঘূর্ণনে কোন বাধা না থাকিলে ঘুরিতে থাকে। এই ঘূর্ণনের প্রবণতা (tendency of rotation) দুইটি রাশির উপর নির্ভর করে। যথা,

(i) প্রযুক্ত বল F-এর মান এবং

(ii) অক্ষ হইতে বলের প্রয়োগরেখার দূরত্ব (r)

এই দুইটি রাশির যে-কোন একটির মান বাড়িলে বস্তুটির ঘূর্ণনের প্রবণতা বাড়িবে। এই রাশি দুইটির গুণফলকে প্রযুক্ত বলের ভ্রামক বলা হয়। সুতরাং,

বলের ভ্রামক (Γ)=ক্রিয়াশীল বল (F)×অক্ষ হইতে প্রয়োগরেখার লম্ব-দূরত্ব (r)

7.2 বস্তুর সাম্য ঃ যদি কোন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল সকল বলের ভেক্টর যোগফল (vector sum) বা লব্ধি শূন্য হয় তাহা হইলে বস্তুর চলন গতির কোনরূপ পরিবর্তন হইবে না। আবার যদি কোন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল সকল ভ্রামকের

বীজগাণিতিক যোগফলের মান শূন্য হয় তবে বস্তুটির ঘূর্ণন গতির কোন পরিবর্তন হইবে না। এই দুইটি শর্ত যুগপৎ মানিয়া চলিলে বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকে।

গাণিতিক সঙ্কেতের সাহায্যে লেখা যায়,

(i) $\Sigma F=0$ (চলন গতি অপরিবর্তিত থাকার শর্ত)

(ii) $\Sigma \Gamma=0$ (ঘূর্ণন গতি অপরিবর্তিত থাকার শর্ত)

7.3 ভরকেন্দ্র (Centre of mass) ঃ যদি $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$ ভরবিশিষ্ট বস্তুকণা যথাক্রমে $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \cdots, (x_n, y_n, z_n)$ বিন্দুতে অবস্থিত হয় তাহা হইলে উহাদের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (x, y, z) নিম্নের সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়,

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}=\frac{\Sigma m_ix_i}{\Sigma m_i}$$

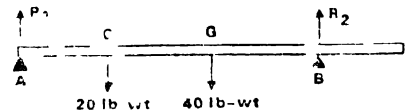
$$y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}=\frac{\Sigma m_iy_i}{\Sigma m_i}$$

$$z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3+\cdots+m_nz_n}{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}=\frac{\Sigma m_iz_i}{\Sigma m_i}$$

বস্তু অতি বৃহৎ না হইলে উহার ভারকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্র কার্যত একই বিন্দু। কাজেই, ব্যবহারিক ক্ষেত্রে উপরি-উক্ত পদ্ধতিতে কোন বস্তুর ভরকেন্দ্র এবং ভারকেন্দ্র —উভয়েরই অবস্থান নির্ণয় করা হয়।

সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ

উদাহরণ 7.1 5 ft দীর্ঘ এবং 40 lb ভরবিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ডকে A এবং B অবস্থানে দুইটি ক্ষুরধারের উপর স্থাপন করা আছে (চিত্র 7.1)। A বিন্দুটি দণ্ডের এক প্রান্তে অবস্থিত এবং B বিন্দুটি A হইতে 3 ft দূরে অবস্থিত। যদি A বিন্দু হইতে $1\frac{1}{2}$ ft দূরে 20 lb-wt ওজনের একটি বস্তুকে ঝুলাইয়া দেওয়া হয় তাহা হইলে ক্ষুরধার দুইটির প্রতিক্রিয়া বলের মান কত ?

[A uniforn bar 5 ft long and having a mass of 40 lb is supported on two knife-edges A and B (Fig. 7.1). A is at one end of the bar and B is at distance of 3 ft from A. If now a body of weight 20 lb-wt is suspended from a point $1\frac{1}{2}$ ft from A, calculate the reactions at the knife-edges.]

চিত্র 7.1

সমাধান ঃ ধরি, A এবং B ক্ষুরধারের প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R_1 এবং R_2 (চিত্র 7.1)।

এখন, দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া,

মোট ঊর্ধ্বাভিমুখী বল = মোট নিম্নাভিমুখী বল

বা, $R_1+R_2=20+40$ lb-wt

বা, $R_1 + R_2 = 60$ lb-wt ... (i)

আবার, A বিন্দুর সাপেক্ষে বলগুলির ভ্রামক লইয়া লেখা যায়,

$R_1 \times 0 + R_2 \times AB - 20 \times AC - 40 \times AG = 0$ ... (ii)

এখন, $AB = 3$ ft, $AC = 1\frac{1}{2}$ ft এবং $AG = 2\frac{1}{2}$ ft

∴ সমীকরণ (ii) হইতে পাই,

$R_2 \times 3 - 20 \times \frac{3}{2} - 40 \times \frac{5}{2} = 0$

বা, $R_2 = \frac{130}{3}$ lb-wt ... (iii)

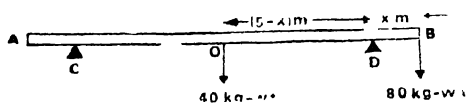
সমীকরণ (i) এবং (iii) হইতে পাই,

$R_1 = 60 - \frac{130}{3} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$ lb-wt

সুতরাং, A ক্ষুরধারের প্রতিক্রিয়া $16\frac{2}{3}$ lb-wt এবং B ক্ষুরধারের প্রতিক্রিয়া $43\frac{1}{3}$ lb-wt।

উদাহরণ 7.2 10 m দীর্ঘ এবং 40 kg ভরবিশিষ্ট একটি সুষম বীম উহার দুই প্রান্ত হইতে সমান দূরত্বে দুইটি খুঁটির উপর স্থির রহিয়াছে। এই দূরত্বের মান সর্বোচ্চ কত হইলে 80 kg ভরের কোন ব্যক্তি বীমটির যে-কোন স্থানে দাঁড়াইলেও বীমটি কাত হইয়া পড়িবে না?

[A uniform beam of length 10 m and mass 40 kg rests on two props at equal distances from the ends. Find the maximum value of these distances so that a man weighing 80 kg may stand anywhere on the beam without upsetting it.]

সমাধান: AB বীমটি C এবং D খুঁটির উপর অবস্থিত (চিত্র 7.2)। মনে করি, C এবং D খুঁটিদ্বয় যথাক্রমে A এবং B প্রান্ত হইতে x m দূরে অবস্থিত। অর্থাৎ, $AC = BD = x$ m

চিত্র 7.2

লোকটি বীমের AC এবং DE অংশের কোথাও দাঁড়াইলে নিকটবর্তী খুঁটির সাপেক্ষে তাহার ওজনের ভ্রামক বীমের ওজনের ভ্রামকের বিপরীতমুখী হইবে। ব্যক্তির ওজনের ভ্রামক যদি বীমের ওজনের ভ্রামক অপেক্ষা বেশি হয় তাহা হইলে বীমটি কাত হইয়া পড়িবে। এখন, লোকটি যখন বীমের কোন একটি প্রান্তে থাকে তখন নিকটবর্তী খুঁটির সাপেক্ষে তাহার ভ্রামক সর্বোচ্চ হয়। স্পষ্টতই, লোকটি যখন বীমের প্রান্তে রহিয়াছে তখন যদি বীমটি সাম্যাবস্থায় থাকে তাহা হইলে লোকটি যে-কোন জায়গায়ই দাঁড়াক না কেন বীমের সাম্য অব্যাহত থাকিবে। এইবার, মনে করি, লোকটি B প্রান্তে রহিয়াছে এবং বীমটি সাম্যে আছে।

কাজেই, x-এর মান যখন সর্বোচ্চ, তখন

D বিন্দুর সাপেক্ষে বীমের ওজনের ভ্রামক = D বিন্দুর সাপেক্ষে লোকটির ওজনের ভ্রামক

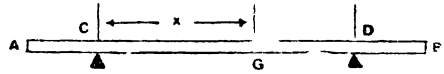
বা, $(40 \text{ kg-wt}) \times (5-x) \text{ m} = (80 \text{ kg-wt}) \times x \text{m}$

বা, $5-x = 2x$ বা, $x = \frac{5}{3} = 2\frac{2}{3}$

কাজেই, বীমের প্রান্ত হইতে খুঁটির দূরত্বের সর্বোচ্চ মান $2\frac{2}{3}$m

উদাহরণ 7.3 দুইটি অবলম্বনের উপর 100 cm দীর্ঘ একটি অসম দণ্ড স্থিরভাবে বিদ্যমান। অবলম্বন দুইটির দূরত্ব 60 cm এবং দণ্ডটির মধ্যবিন্দু ঠিক অবলম্বন দুইটির মধ্যস্থলে আছে। দণ্ডটির সাম্য ব্যাহত না করিয়া দণ্ডটির এক প্রান্তে সর্বোচ্চ 4 lb-wt এবং অপর প্রান্তে সর্বোচ্চ 5 lb-wt মানের ওজন ঝুলাইয়া দেওয়া যায়। দণ্ডটির ওজন কত এবং ইহা কোথায় ক্রিয়া করিবে ?

[A non-uniform rod of length 100 cm rests on two props. The distance between the props is 60 cm and the midpoint of the rod is just in the middle of the two props. The greatest weight that can be hung from one side without disturbing the equilibrium of the rod is 4 lb-wt. The corresponding weight is 5 lb-wt for the other side. What is the weight of the rod and where does it act ?]

সমাধান : AB দণ্ডটি C এবং D অবলম্বনের উপর স্থির অবস্থায় আছে। O হইল AB এবং CD-এর মধ্যবিন্দু।

চিত্র 7.3

প্রশ্নের শর্তানুসারে,

$$CD = 60 \text{ cm}$$

এবং $AC = DB = \frac{1}{2} \times (100 - 60) = 20$ cm

মনে করি, দণ্ডটির ওজন $= W$ এই ওজন G বিন্দুতে ক্রিয়া করিতেছে।

মনে করি, $CG = x$

শর্তানুসারে, দণ্ডের এক প্রান্তে সর্বোচ্চ 4 lb-wt ওজন এবং অন্য প্রান্তে সর্বোচ্চ 5 lb-wt ওজন ঝুলাইলে দণ্ডটি সাম্যে থাকে।

মনে করি, দণ্ডের সাম্য ব্যাহত না করিয়া A প্রান্তে সর্বোচ্চ 4 lb-wt ওজন ঝুলান যায়। এই অবস্থায় D অবলম্বনের উপর কোনরূপ বল ক্রিয়া করে না।

C বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক লইয়া লেখা যায়,

$$4 \times AC - W \times CG = 0$$

বা, $4 \times 20 - W \times x = 0$ বা, $Wx = 80$ ... (i)

অনুরূপভাবে, দণ্ডের সাম্য ব্যাহত না করিয়া B প্রান্তে সর্বোচ্চ 5 lb-wt ওজন ঝুলান যায়। এই অবস্থায় C অবলম্বনের উপর কোনরূপ বল ক্রিয়া করে না।

এক্ষেত্রে, D বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক লইয়া লেখা যায়,

$$5 \times DB - W \times DG = 0$$

বা, $5 \times 20 - W \times (60 - x) = 0$

বা, $W \times (60 - x) = 100$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

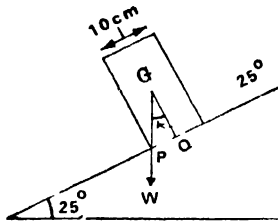
$$\frac{60-x}{x}=\frac{100}{80}=\frac{5}{4}$$

বা, $x=\frac{240}{9}=26{\cdot}67$ cm (প্রায়)

অর্থাৎ, দণ্ডের সাম্য ব্যাহত না করিয়া দণ্ডের যে-প্রান্তে সর্বোচ্চ 4 lb-wt ওজন ঝুলান যায় সেই প্রান্ত হইতে G-বিন্দুর দূরত্ব (26·67) cm।

উদাহরণ 7.4 10 cm ব্যাসবিশিষ্ট একটি সুষম চোঙের উচ্চতা সর্বোচ্চ কত হইলে উহাকে অনুভূমিক তলের সহিত 25° কোণে আনত অমসৃণ নততলের উপর স্থাপন করিলে উহা উল্টাইয়া পড়িবে না ?

[Find the maximum height of a uniform cylinder of diameter 10 cm that can be placed on its base on a rough inclined plane that makes an angle of 25° with the horizontal, without the cylinder toppling over.]

সমাধান : আমরা জানি যে, কোন বস্তুকে একটি নততলের উপর রাখা হইলে উহার ভারকেন্দ্র হইতে নিম্নাভিমুখী অঙ্কিত উল্লম্ব রেখাটি যদি ঐ বস্তুর ভূমির কোন-না-কোন বিন্দু দিয়া যায় তবেই বস্তুটি ঐ তলে স্থির থাকিবে, নতুবা উহা উল্টাইয়া পড়িয়া যাইবে। যে-উচ্চতার ক্ষেত্রে চোঙের ভারকেন্দ্রের মধ্য দিয়া অঙ্কিত উল্লম্ব রেখা চোঙের ভূমির প্রান্তবিন্দু দিয়া যায় চোঙের উচ্চতা তদপেক্ষা বেশি হইলে উহা উল্টাইয়া যাইবে। অর্থাৎ, চোঙের উচ্চতা যখন সর্বোচ্চ তখন উহার ভারকেন্দ্র দিয়া অঙ্কিত উল্লম্ব রেখা উহার ভূমির পরিধির কোন একটি বিন্দু দিয়া যায় (চিত্র 7.4)। মনে করি, চোঙটির সর্বোচ্চ উচ্চতা $=h$

চিত্র 7.4

7.4 নং চিত্রে G হইল চোঙটির ভারকেন্দ্র। ইহা হইতে অঙ্কিত উল্লম্ব রেখা ভূমির পরিধির P বিন্দু দিয়া যায়।

এখন, △PGQ ত্রিভুজে

∠PGQ=নততলের আনতি=25° ; PQ=চোঙের ব্যাসার্ধ$=\frac{10}{2}=5$ cm

GQ=চোঙের অর্ধ-উচ্চতা$=\frac{h}{2}$; স্পষ্টতই, $\frac{PQ}{GQ}=\tan 25^\circ$

বা, $\frac{5}{h/2}=\tan 25^\circ \quad \therefore \quad h=\frac{10}{\tan 25^\circ}=21{\cdot}45$ cm (প্রায়)

উদাহরণ 7.5 একটি সুষম বৃত্তাকার ফলকের ব্যাসার্ধ 20 cm। ইহার কেন্দ্র হইতে কিছু দূরে 8 cm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার ছিদ্র করা হইল। ফলকটির কেন্দ্র হইতে ছিদ্রটির কেন্দ্রের দূরত্ব 10 cm হইলে ছিদ্রযুক্ত ফলকটির ভারকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর।

[A uniform circular lamina has a radius of 20 cm. A circular hole of radius 8 cm is drilled at a certain distance away from its centre. If the distance between the centre of the lamina and the centre of the hole is 10 cm, find the centre of gravity of the perforated lamina.]

সমাধান: ফলকটির ছিদ্র না থাকিলে উহার ভারকেন্দ্রের অবস্থান হইত ফলকটির কেন্দ্রে অর্থাৎ G বিন্দুতে (চিত্র 7.5)। ছিদ্র করিবার ফলে যে-অংশ অপসারিত হইয়াছে উহার ভারকেন্দ্র ছিদ্রের কেন্দ্র G_1-এ অবস্থিত ছিল। মনে করি, ছিদ্রযুক্ত ফলকটির ভারকেন্দ্র G_2 বিন্দুতে অবস্থিত। স্পষ্টতই, G_2-বিন্দুটি বর্ধিত G_1G-রেখার উপর অবস্থিত হইবে। ছিদ্রযুক্ত ফলকটির ওজন W_1 এবং ছিদ্র করিয়া অপসারিত অংশের ওজন W_2 হইলে লেখা যায়,

চিত্র 7.5

$$W_1 \times G_2G = W_2 \times GG_1$$

বা, $$G_2G = \frac{W_2}{W_1} \times GG_1$$

এখন, $GG_1 = 10$ cm, $W_1 = \pi[20^2 - 8^2]\,\rho$

এবং $W_2 = \pi \times 8^2 \times \rho$

এখানে ρ হইল ফলকটির প্রতি একক ক্ষেত্রফলের ওজন।

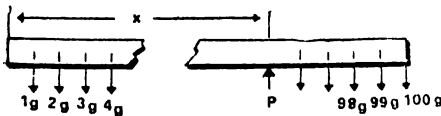
কাজেই, সমীকরণ (i) হইতে পাই,

$$G_2G = \frac{8^2}{20^2 - 8^2} \times 10 = \frac{64 \times 10}{400 - 64}$$

$$= \frac{40}{21} = 1{\cdot}905 \text{ cm (প্রায়)}$$

কাজেই, ছিদ্রযুক্ত ফলকের ভারকেন্দ্র ফলকটির কেন্দ্র হইতে ছিদ্রের কেন্দ্রের বিপরীত দিকে প্রায় 1·905 cm দূরে।

উদাহরণ 7.6 একটি উপেক্ষণীয় ওজনের মিটার স্কেলের 1 cm, 2 cm, 3 cm,···, 100 cm দাগগুলি হইতে যথাক্রমে 1 g, 2 g, 3 g, ···, 100 g ইত্যাদি ভর ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। স্কেলটিকে কোন্ স্থানে ঠেকা দিলে স্কেলটি অনুভূমিক অবস্থায় সাম্যে থাকিবে?

[Masses of 1 g, 2 g, 3 g, ···, 100 g are suspended from the marks of 1 cm, 2 cm, 3 cm, ··· and 100 cm respectively from a metre scale of negligible weight. Find where the scale should be supported to keep it horizontal.]

চিত্র 7.6

সমাধান: মনে করি, AB মিটার স্কেলটিকে P বিন্দুতে ঠেকা দিলে স্কেলটি

অনুভূমিক থাকে (চিত্র 7.6)। যদি OP$=x$ হয় তাহা হইলে A বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক লইয়া লেখা যায়, $(1\times1)+(2\times2)+(3\times3)+\cdots+(100\times100)$

$$=(1+2+3+\cdots+100)x$$

বা, $$1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2=(1+2+3+\cdots+100)x$$

বা, $$\frac{100(100+1)(2\times100+1)}{6}=\frac{100(100+1)}{2}x$$

বা, $$x=67 \text{ cm}$$

উদাহরণ 7.7 ত্রিমাত্রিক কার্তেজীয় নির্দেশতন্ত্রে 1 g, 2 g এবং 4 g ভরবিশিষ্ট তিনটি বস্তুকণার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 2, 3) ; (0, 0, 0) এবং (2, 4, 6) হইলে এই বস্তু সংস্থার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[If the co-ordinates of three particles of masses 1 g, 2 g and 4 g in three-dimensional cartesian co-ordinate system are (1, 2, 3), (0, 0, 0, and (2, 4, 6) respectively, find the co-ordinates of the centre of mass of the above system of particles.]

সমাধান : আমরা জানি যে, ভরকেন্দ্রের x-স্থানাঙ্ক, y-স্থানাঙ্ক এবং z-স্থানাঙ্ক যথাক্রমে নিম্নের সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়—

$$\bar{x}=\frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}$$

$$\bar{y}=\frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}$$

এবং $$\bar{z}=\frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}$$

এখানে, $m_1=1$ g, ইহার স্থানাঙ্ক $(x_1=1, y_1=2, z_1=3)$

$m_2=2$ g, ইহার স্থানাঙ্ক $(x_2=0, y_2=0, z_2=0)$

এবং, $m_3=4$ g, ইহার স্থানাঙ্ক $(x_3=2, y_3=4, z_3=6)$

সুতরাং $$\bar{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{1\times1+2\times0+4\times2}{1+2+4}=\frac{9}{7}$$

$$\bar{y}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{1\times2+2\times0+4\times4}{1+2+4}=\frac{18}{7}$$

এবং $$\bar{Z}=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{1\times3+2\times0+4\times6}{1+2+4}=\frac{27}{7}$$

সুতরাং, আলোচ্য ভরসংস্থার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{9}{7}, \frac{18}{7}, \frac{27}{7})$

উদাহরণ 7.8 XY-তলে 1 kg, 2 kg এবং 3 kg ভরবিশিষ্ট তিনটি বস্তুকণার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 3), (2, 2) এবং (1, 1) হইলে এই কণা-সমবায়ের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[If the co-ordinates of three particles of masses 1 kg, 2 kg and 3 kg in the XY plane are (3, 3), (2, 2) and (1, 1) respectively, find the co-ordinate of the centre of mass of the system of particles.]

সমাধান ঃ প্রথম বস্তুকণার ভর, $m_1=1$ kg এবং ইহার স্থানাঙ্ক ($x_1=3$ $y_1=3$) , দ্বিতীয় বস্তুকণার ভর, $m_2=2$ kg এবং ইহার স্থানাঙ্ক ($x_2=2, y_2=2$) এবং তৃতীয় বস্তুকণার ভর, $m_3=3$ kg এবং ইহার স্থানাঙ্ক ($x_3=1, y_3=1$) ।

আলোচ্য বস্তুসংস্থার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে দেখা যায়,

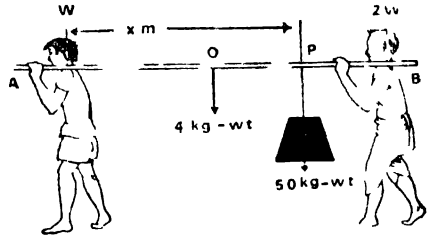
$$\bar{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{1\times3+2\times2+3\times1}{1+2+3}=\frac{5}{3}$$

এবং $$\bar{y}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{1\times3+2\times2+3\times1}{1+2+3}=\frac{5}{3}$$

কাজেই, আলোচ্য সংস্থার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$

উদাহরণ 7 9 একটি লোক এবং একটি বালক একটি সুষম বাঁশের সাহায্যে 50 kg ভরের একটি বোঝা বহন করিতেছে। বাঁশের এক প্রান্ত লোকটির কাঁধে এবং অপর প্রান্ত বালকটির কাঁধে রহিয়াছে। বাঁশটির দৈর্ঘ্য 4 m এবং ইহার ভর 4 kg। বোঝাটিকে কোথায় ঝুলাইলে লোকটি বালকটি অপেক্ষা দ্বিগুণ বোঝা বহন করিবে ?

[A man and a boy carry a load of 50 kg by means of a pole. The man and the boy support the two ends of the pole on their shoulders. The length of the pole is 4 m and its mass is 4 kg. Where should the load be supported on the pole in order that the man may carry twice as much load as the boy ?]

সমাধান ঃ বাঁশটি সুষম বলিয়া উহার ভার 4 kg-wt বাঁশটির মধ্যবিন্দু O দিয়া নিম্নাভিমুখী ক্রিয়া করিবে (চিত্র 7.7)। মনে করি, বাঁশের A প্রান্তটি বালকটির কাঁধে এবং B-প্রান্তটি লোকটির কাঁধে স্থাপিত রহিয়াছে। মনে করি, বালকটি W kg-wt এবং লোকটি 2 W kg-wt বহন করিতেছে।

চিত্র 7.7

$\therefore$ শর্তানুসারে, W + 2W = বোঝার ওজন+বাঁশের ওজন

বা, 3W = 50 + 4 বা, W = 18

সুতরাং, বালকটি 18 kg-wt এবং লোকটি 18 × 2 বা 36 kg-wt বোঝা বহন করিতেছে।

মনে করি, A প্রান্ত হইতে x m দূরত্বে P বিন্দু হইতে বোঝাটিকে ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। A বিন্দুর সাপেক্ষে বাঁশের উপর ক্রিয়াশীল বলগুলির ভ্রামক লইয়া পাই,

$$W\times0+4\times AO+50\times OP-2W\times AB=0$$

কিন্তু, AO = 2m, OP = x m এবং AB = 4 m

$$\therefore \quad 4\times2+50\,x-2W\times4=0$$

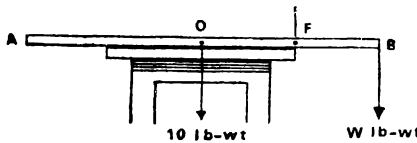
আবার, W = 18 বলিয়া পাই,

$$8+50x=8\times18 \quad \text{বা,} \quad x=\frac{8\times17}{50}=2\cdot72 \text{ m}$$

অর্থাৎ, বালকটি যে-প্রান্তে রহিয়াছে সেই প্রান্ত হইতে 2·72 m দূরে বোঝাটি ঝুলাইতে হইবে।

উদাহরণ : 7.10 5 ft লম্বা একটি সুষম দণ্ডকে প্রতিসমভাবে একটি টেবিলের উপর এমনভাবে রাখা হইল যাহাতে দণ্ডটির 1 ft দৈর্ঘ্য টেবিলের উভয় ধার হইতে বাহিরের দিকে প্রলম্বিত অবস্থায় থাকে। যদি দণ্ডটির ভর 10 lb হয় তাহা হইলে দণ্ডটির একটি প্রান্তে ন্যূনতম যে-ওজন ঝুলাইয়া দিলে দণ্ডটি কাত হইবে তাহার মান নির্ণয় কর।

[A uniform rod 5 ft in length is placed symmetrically on a table with 1 ft of length projecting over each edge. If the mass of the rod is 10 lb, find the weight that must be suspended at one end, in order to just tilt the rod.]

সমাধান : দণ্ডটি সুষম বলিয়া উহার ভার (10 lb-wt) ইহার মধ্যবিন্দু O-এর মধ্য দিয়া ক্রিয়া করে (চিত্র 7.8)। মনে করি, দণ্ডটির কোন প্রান্তে যে-ওজন চাপাইলে দণ্ডটি কাত হইবে তাহার মান W lb-wt। যদি এই ওজনটি B প্রান্তে চাপান হয়, তাহা হইলে টেবিলের ধার F-এর সাপেক্ষে দণ্ডের ওজনের ভ্রামক এবং B-প্রান্তে চাপান ওজনের ভ্রামক সমান হইবে।

চিত্র 7.8

অর্থাৎ, $10\times OF=W\times FB$ ... (i)

এখন, $OF=OB-FB=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$ ft এবং $FB=1$ ft

সুতরাং, সমীকরণ (i) হইতে লেখা যায়,

$$10\times\frac{3}{2}=W\times1 \quad \text{বা,} \quad W=15 \text{ lb-wt}$$

অর্থাৎ, দণ্ডটির যে-কোন একটি প্রান্তে 15 lb-wt ওজন ঝুলাইয়া দিলে দণ্ডটির কাত হইয়া পড়িবার উপক্রম হইবে।

উদাহরণ 7.11 ABCD একটি বর্গক্ষেত্র, ইহার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 100 cm। A, B, C এবং D বিন্দুগুলিতে যথাক্রমে 20 g, 50 g, 100 g এবং 80 g ভরবিশিষ্ট বস্তুকণা স্থাপন করা হইল। এই বস্তুসংহতির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

[ABCD is a square ; each of its sides is 100 cm long. Particles of masses 20 g, 50 g, 100 g and 80 g are placed at A, B, C and D respectively. Find the position of the centre of gravity of the system of particles.]

সমাধান : AB রেখা বরাবর x-অক্ষ এবং AD রেখা বরাবর y-অক্ষ কল্পনা করা হইল। A বিন্দুটি উক্ত নির্দেশ-তন্ত্রের মূলবিন্দু (চিত্র 7.9)।

তাহা হইলে B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (100 cm, 0 cm), C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (100 cm, 100 cm) এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0 cm, 100 cm)।

মনে করি, G হইল আলোচ্য বস্তুসংহতির ভারকেন্দ্রের অবস্থান। ইহার স্থানাঙ্ক $\bar{x}$ এবং $\bar{y}$ হইলে লেখা যায়,

চিত্র 7.9

$$\bar{x}=\frac{\Sigma mx}{\Sigma m}$$

$$=\frac{(20g)\times(0cm)+(50g)\times(100cm)+(100g)\times(100cm)+(80g)\times(0cm)}{(20+50+100+80)g}$$

$$=\frac{5000+10000}{250}\text{ cm}=60\text{ cm}$$

এবং $$\bar{y}=\frac{(20\text{ g})\times 0+(50\text{ g})\times 0+(100\text{ g})\times(100\text{ cm})+(80g)\times(100\text{ cm})}{(20+50+100+80)g}$$

$$=\frac{18000}{250}\text{ cm}=72\text{ cm}$$

কাজেই, ভারকেন্দ্রটি AB রেখা হইতে 72 cm দূরে এবং AD রেখা হইতে 60 cm দূরে অবস্থিত।

উদাহরণ 7.12 5 kg এবং 15 kg ভরবিশিষ্ট দুইটি গোলকের মধ্যবর্তী দূরত্ব 24 cm। এই বস্তুসংস্থার ভরকেন্দ্র কোথায় অবস্থিত?

[The distance between the two spheres of masses 5 kg and 15 kg is 24 cm. Where is the centre of mass of the system ?]

সমাধান : 5 kg ভরবিশিষ্ট গোলক হইতে ভরকেন্দ্র G-এর দূরত্ব এবং 15 kg ভরবিশিষ্ট গোলক হইতে ভরকেন্দ্র G-এর দূরত্ব যথাক্রমে r_1 এবং r_2 (চিত্র 7.10)। তাহা হইলে লেখা যায়,

চিত্র 7.10

$$5\times r_1=15\times r_1$$

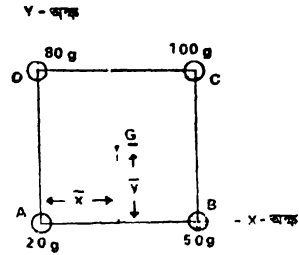
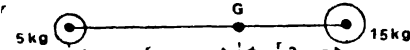
বা, $$\frac{r_1}{r_2}=3 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

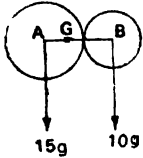
আবার, $$r_1+r_2=24\text{ cm} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $r_1=18$ cm, $r_2=6$ cm

অর্থাৎ, উক্ত দুই ভরের ভরকেন্দ্র ক্ষুদ্রতর ভরবিশিষ্ট গোলকের কেন্দ্র হইতে অপর গোলকের কেন্দ্রের দিকে 18 cm দূরে অবস্থিত।

উদাহরণ 7.13 25 cm ও 20 cm ব্যাসার্ধের এবং যথাক্রমে 15 g ও 10 g ভরের দুইটি গোলক পরস্পরের সহিত সংস্পর্শে থাকিয়া যে-নিরেট বস্তু গঠন করে উহার ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

[Find the centre of gravity of the solid formed by two

spheres touching each other, their radii being 25 cm and 20 cm and their masses being 15 g and 10 g respectively.]

সমাধান : গোলকদ্বয়ের ভর উহাদের কেন্দ্রে একত্রীভূত অবস্থায় আছে এইরূপ ধরিয়া লওয়া যায়। কাজেই, আমরা ধরিয়া লইতে পারি যে, 10 g-wt এবং 15 g-wt বল দুইটি পরস্পর হইতে 45 cm দূরে অবস্থিত। স্পষ্টতই, গোলকদ্বয়ের সংস্পর্শে গঠিত যুগ্মভরটির ভারকেন্দ্র এই দুই গোলকের কেন্দ্রের সংযোজী সরলরেখা AB-এর উপর অবস্থিত হইবে। মনে করি, আলোচ্য সংস্থার ভারকেন্দ্রটি G বিন্দুতে অবস্থিত।

চিত্র 7.11

G-এর সাপেক্ষে দুই গোলকের ওজনের ভ্রামক লইয়া লেখা যায়,

$$15\times AG=10\times BG$$

বা, $15\times AG=10\times(45-AG)$ বা, $AG=18$ cm

সুতরাং, $BG=(45-18)=27$ cm

কাজেই, আলোচ্য ভর-সংস্থাটির ভারকেন্দ্র G ক্ষুদ্রতর গোলকের কেন্দ্র হইতে 27 cm দূরে এবং বৃহত্তর গোলকের কেন্দ্র হইতে 18 cm দূরে অবস্থিত।

উদাহরণ 7.14 একটি মিটার দণ্ডের 35 cm দাগাঙ্কিত স্থান হইতে 200 g ভর ঝুলাইয়া দিলে দেখা যায় যে, দণ্ডটিকে 40 cm দাগাঙ্কিত স্থান হইতে ঝুলাইলে উহা অনুভূমিক অবস্থায় থাকে। যদি মিটার দণ্ডটি সুষম হয় তাহা হইলে ইহার ভর নির্ণয় কর।

[A metre rod suspended from 40 cm division remains horizontal if a mass of 200 g is suspended from 35 cm division. If the metre rod is uniform, find the mass of the rod.]

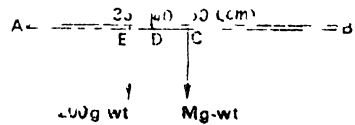
সমাধান : মনে করি, মিটার দণ্ডটির ভর M g, ইহার ওজন M g-wt দণ্ডটির মধ্যবিন্দু C-এর মধ্য দিয়া নিম্নাভিমুখে ক্রিয়া করে (চিত্র 7.12)।

চিত্র 7.12

দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া D বিন্দুর (অর্থাৎ, 40 cm দাগাঙ্কিত স্থানের) সাপেক্ষে 200 g-wt বলের ভ্রামক এবং দণ্ডের ওজন M g-wt বলের ভ্রামক পরস্পরের সমান।

কাজেই, $200\times DE=M\times DC$

বা, $200\times[40-35]=M\times[50-40]$ বা, $M=100$

সুতরাং, মিটার দণ্ডটির ভর $=100$ g

উদাহরণ 7.15 একটি সুষম বৃত্তাকার ফলক হইতে একটি বর্গাকৃতি অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। বর্গাকৃতি ছিদ্রটির কর্ণ উক্ত বৃত্তাকার ফলকের ব্যাসার্ধের সমান।

দেখাও যে, ঐ ফলকের অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র বৃত্তাকার ফলকটির কেন্দ্র হইতে $a/(4\pi-2)$ দূরত্বে অবস্থিত, এখানে a হইল উক্ত বৃত্তাকার ফলকের ব্যাসার্ধ।

[A square hole is cut out of uniform circular lamina, the diagonal of the square being equal to the radius of the circle. Show that the centre of gravity of the remainder is at a distance of $a/(4\pi-2)$ from the centre of the circle, where a is the radius of the circle.]

সমাধান: মনে করি, G_1 বিন্দুটি হইল ছিদ্রের মধ্যবিন্দু (চিত্র 7.13)। কাজেই, ফলকের অপসারিত অংশটির ভারকেন্দ্রটি এই বিন্দুতেই অবস্থিত ছিল।

চিত্র 7.13

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $OG_1=\frac{a}{2}$,

a হইল বৃত্তাকার ফলকটির ব্যাসার্ধ।

অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্রটি AO রেখার উপর অবস্থিত (চিত্র 7.13)।

মনে করি, G_2 বিন্দুতে এই ভারকেন্দ্রটি অবস্থিত।

যে-বর্গাকার অংশটি কাটিয়া বাদ দেওয়া হইয়াছে উহার ক্ষেত্রফল $=x^2$, এখানে $x=OP$

এখানে, $OP^2=OG_1^2+G_1P^2=2\,OG_1^2$

$$\text{বা,}\quad x^2=2\times\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$

কাজেই, যে-বর্গাকৃতি অংশটি কাটিয়া ফেলা হইয়াছে উহার ক্ষেত্রফল $=\frac{a^2}{2}$

বৃত্তাকার ফলকের অবশিষ্টাংশের ক্ষেত্রফল

$$=\pi a^2-\frac{a^2}{2}=(2\pi-1)\frac{a^2}{2}$$

ফলকটির প্রতি একক ক্ষেত্রফলের ভর ρ হইলে লেখা যায়,

অপসারিত বর্গাকৃতি অংশের ভর, $M_1=\frac{a^2}{2}\rho$

এবং অবশিষ্টাংশের ভর, $M_2=(2\pi-1)\frac{a^2}{2}\rho$

সুতরাং, O বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক লইয়া লেখা যায়,

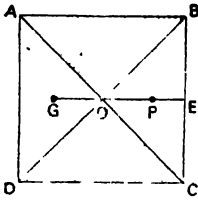
$$(M_1g)\times OG_1=(M_2g)\times OG_2$$

$$\text{বা,}\quad \frac{a^2}{2}\rho g\times\tfrac{1}{2}a=(2\pi-1)\frac{a^2}{2}\rho g\times OG_2$$

$$\text{বা,}\quad OG_2=\frac{a}{2(2\pi-1)}=\frac{a}{(4\pi-2)}$$

উদাহরণ 7.16 সুষম বেধসম্পন্ন এবং 10 cm দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট একটি ধাতব

বর্গাকার ফলকে কর্ণ টানিয়া উহাকে চারিটি সমান ত্রিভুজে বিভক্ত করা হইল এবং একটি ত্রিভুজ কাটিয়া বাদ দেওয়া হইল। অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর।

[A metallic square lamina of uniform thickness and side 10 cm is divided into four equal triangles by drawing the diagonals and one of the triangles is then cut out. Find the position of the centre of gravity of the remainder.]

চিত্র 7.14

সমাধান : মনে করি, বর্গাকার ফলক AB-এর কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে (চিত্র 7.14)। COB ত্রিভুজটিকে কাটিয়া বাদ দেওয়া হইল। এই ত্রিভুজাকার অংশটি কাটিয়া বাদ দিবার পূর্বে বর্গাকার ফলকটির ভারকেন্দ্র O বিন্দুতে অবস্থিত ছিল। কাজেই, O-বিন্দুর সাপেক্ষে COB ত্রিভুজের ওজনের ভ্রামক এবং বর্গাকার ফলকের অবশিষ্টাংশের ওজনের ভ্রামক পরস্পর সমান।

মনে করি, সমগ্র ফলকটির ওজন $=W$

কাজেই, COB অংশের ওজন $=\frac{1}{4}W$

এবং বর্গাকার ফলকটির অবশিষ্টাংশের ওজন $=\frac{3}{4}W$

এখন, COB ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র উহার মধ্যমা OE-এর উপর P বিন্দুতে অবস্থিত। এখানে, $OP=\frac{2}{3}\times OE$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $OE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 10\text{ cm}=5\text{ cm}$

$$\therefore\quad OP=\frac{2}{3}\times OE=\frac{10}{3}\text{ cm} \quad\cdots\quad (i)$$

BOC অংশটি বাদ দিবার পর বর্গাকার ফলকের যে-অংশ অবশিষ্ট রহিল উহার ভারকেন্দ্র EO রেখার বর্ধিতাংশের কোন বিন্দু G-তে অবস্থিত থাকিবে। এই বিন্দু দিয়া বর্গাকার ফলকের অবশিষ্টাংশের ওজন ক্রিয়া করিতেছে ধরিয়া লওয়া যায়। O বিন্দুর সাপেক্ষে BOC ত্রিভুজাকার অংশের ওজন $(W/4)$ এবং অবশিষ্টাংশের ওজন $(\frac{3}{4}W)$-এর ভ্রামক লইয়া লেখা যায়, $GO\times\frac{3}{4}W=OP\times\frac{1}{4}W$

$$\text{বা,}\quad GO=OP\times\frac{1}{3} \quad\cdots\quad (ii)$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $GO=\frac{10}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{9}=1\frac{1}{9}\text{ cm}$

উদাহরণ 7.17 15 m দীর্ঘ একটি দড়ির এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব টেলিফোন পোস্টের সহিত যুক্ত রহিয়াছে এবং এক ব্যক্তি অপর প্রান্ত ধরিয়া নির্দিষ্ট বলে টানিতেছে। পোস্টটির কোন্ বিন্দুতে দড়িটি যুক্ত করিলে লোকটি পোস্টটিকে কাত করিয়া ফেলিতে সবচেয়ে বেশি সুযোগ পাইবে ?

[One end of a rope of length 15 m is attached to a vertical telegraph post and a man pulls at the other end with a given force. At what point of the post should the rope be attached in order that the man will have the best chance of overturning the post ?]

সমাধান ঃ মনে করি, দড়িটি AB টেলিফোন পোস্টের C বিন্দুর সহিত যুক্ত রহিয়াছে এবং লোকটি D অবস্থান হইতে পোস্টটিকে P বলে টানিতেছে।

মনে করি, দড়িটি ভূমির সহিত θ কোণ করিয়া রহিয়াছে। B বিন্দুর সাপেক্ষে P বলের ভ্রামক

$$=P \times BE = P \times BD \sin \theta$$

$$=P \times CD \cos \theta \sin \theta = \tfrac{1}{2} P \times CD \times \sin 2\theta$$

চিত্র 7.15

স্পষ্টতই, ভ্রামক যখন সর্বোচ্চ মানে পৌঁছায় তখন $\sin 2\theta = 1$

বা, $2\theta = 90^\circ$ বা, $\theta = 45^\circ$

এই সময় $BC = CD \sin \theta = CD \sin 45^\circ$

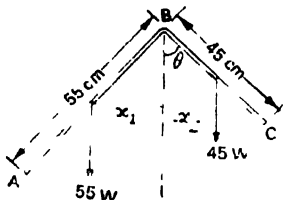
প্রশ্নের শর্তানুসারে, $CD = 15$ m

$$\therefore \quad BC = 15 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 10{\cdot}61 \text{ m}$$

অর্থাৎ, দড়িটিকে ভূমি হইতে 10·61 m উঁচুতে বাঁধিয়া টানিলে লোকটি পোস্টটিকে কাত করিয়া ফেলিতে সবচেয়ে বেশি সুবিধা পাইবে।

উদাহরণ 7.18 এক মিটার লম্বা একটি পাতলা সুষম ধাতব দণ্ডকে উহার এক প্রান্ত হইতে 45 cm দূরত্বে সমকোণে বাঁকাইয়া L-এর ন্যায় আকৃতি দেওয়া হইল। দণ্ডটিকে উহার বাঁকান স্থান হইতে একটি পেরেকের সাহায্যে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। যখন সংস্থাটি সাম্যে আসিবে তখন 45 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বাহুটি উল্লম্ব রেখার সহিত কত কোণ করিয়া থাকে ?

[At thin uniform metal rod of length one metre is bent at a point 45 cm away from one of its ends, forming a right-angled L-shaped piece. The bent rod is hung on a nail at the point of bend. What angle does the 45 cm side make with the vertical line, when the system is in equilibrium ?]

সমাধান ঃ মনে করি, দণ্ডটিকে B বিন্দুতে বাঁকান হইয়াছে এবং $BC = 45$ cm এবং $AB = (100 - 45) = 55$ cm

চিত্র 7.16

B বিন্দু হইতে L-আকৃতির দণ্ডটিকে ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। মনে করি, সাম্যাবস্থায় BC অংশটি উল্লম্ব রেখার সহিত θ কোণ করে (চিত্র 7.16)।

দণ্ডটির প্রতি সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যের ওজন W হইলে AB এবং BC অংশের ওজন উহাদের মধ্যবিন্দু দিয়া ক্রিয়া করে।

B বিন্দুর সাপেক্ষে ইহাদের ওজনের ভ্রামক লইয়া পাই,

$$55 \text{ W} \times x_1 = 45 \text{ W} \times x_2 \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

এখানে, $x_1 = \frac{55}{2}\cos\theta$ এবং $x_2 = \frac{45}{2}\sin\theta$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়,

$$55\ W \times \frac{55}{2}\cos\theta = 45\ W \times \frac{45}{2}\sin\theta$$

বা, $\tan\theta = \left(\frac{55}{45}\right)^2 = 1{\cdot}494$ (প্রায়)

বা, $\theta = 56{\cdot}2^\circ$

প্রশ্নমালা 7

1. XY তলে 10 g, 20 g এবং 40 g ভরবিশিষ্ট তিনটি বস্তুকণার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে, (3, 6), (4, 2) এবং (2, 1) হইলে এই কণা-সমবায়ের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

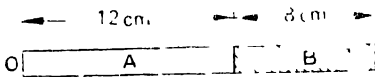
[If the co-ordinates of three particles of masses 10 g, 20 g and 40 g in the XY-plane are (3, 6), (4, 2) and (2, 1) respectively, find the co-ordinates of the centre of mass of the system of particles.]

[$\frac{19}{7}$, 2]

2. ত্রিমাত্রিক কার্তেজীয় নির্দেশতন্ত্রে 5 g, 10 g এবং 15 g ভরবিশিষ্ট তিনটি বস্তুকণার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে, (0, 1, 2), (3, 0, 1) এবং (1, 2, 0) হইলে এই বস্তুসংস্থার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[If the co-ordinates of three particles of masses 5 g, 10 g and 15 g in 3-dimensional co-ordinate system are (0,1, 2), (3, 0, 1) and (1, 2, 0) respectively, find the co-ordinates of the centre of mass of the above system of particles.]

[$\frac{3}{2}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{2}{3}$]

3. 7.17 নং চিত্রের A দণ্ডের উপাদানের ঘনত্ব 4 g/cm³ এবং B দণ্ডের ঘনত্ব 6 g/cm³। ইহাদের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল সমান। A এবং B দণ্ডের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 12 cm এবং 8 cm। O বিন্দু হইতে এই সংস্থার ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

চিত্র 7.17

[The density of the material of the rod A in Fig. 7.17 is 4 g/cm³ and that of the rod B is 6 g/cm³. The rods have the same cross-section. The lengths of the rods A and B are 12 cm and 8 cm respectively. Find the distance of the centre of gravity of the system from O.]

[11 cm]

4. সমবেধবিশিষ্ট একটি-বৃত্তাকার ধাতব ফলকের ব্যাসার্ধ 10 cm। ইহার কেন্দ্র হইতে কিছু দূরে 4 cm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার ছিদ্র করা হইল। ফলকের কেন্দ্র হইতে ছিদ্রের কেন্দ্রের দূরত্ব 5 cm হইলে ছিদ্রযুক্ত ফলকটির ভারকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর।

[A uniform circular lamina has a radius of 10 cm. A circular hole of radius 4 cm is made at a certain distance away from its centre. If the distance between the centre of the lamina and the

centre of the hole is 5 cm, find the centre of gravity of the perforated lamina.]

[ফলকের কেন্দ্র হইতে ছিদ্রের কেন্দ্রের বিপরীত দিকে $\frac{20}{21}$ cm দূরে]

5. একটি ত্রুটিপূর্ণ তুলাযন্ত্রের বাহুদ্বয় সমান এবং ইহাদের দৈর্ঘ্য d; কিন্তু ইহার তুলাপাত্রদ্বয়ের ওজন অসমান। ডান তুলাপাত্রে রাখিয়া কোন বস্তুর ওজন করিলে উহার আপাত ভর পাওয়া যায় m_1 এবং বাম তুলাপাত্রে রাখিয়া ওজন করিলে আপাত ভর পাওয়া যায় m_2। দেখাও যে, বস্তুটির প্রকৃত ভর, $m = (m_1 + m_2)/2$।

[The arms of a false balance are equal and of length d, but the pans are of equal weights. If a body is weighed by placing it on the right pan its apparent mass is m_1 and if it is weighed by placing it on the left pan its apparent weight is m_2. Show that the true mass of the body is $m = (m_1 + m_2)/2$.]

6. একটি সুষম দণ্ড AB-এর দৈর্ঘ্য 4 m। 10 kg এবং 20 kg ভরবিশিষ্ট দুইটি বস্তুকে A প্রান্ত হইতে যথাক্রমে 1 m এবং 3 m দূরে ঝুলান হইল। দণ্ডটিকে B প্রান্ত হইতে 1·75 m দূরে ঠেকা দিলে উহা অনুভূমিক অবস্থায় সাম্যে থাকে। AB দণ্ডটির ওজন নির্ণয় কর।

[AB is a uniform rod of length 4 m. Two bodies of masses 10 kg and 20 kg are hung from two points 1 m and 3 m away from the end A respectively. If the rod is supported at a point 1·75 m away from the end B, it remains horizontal. Find the weight of the rod AB.] [10 kg-wt]

7. একটি দণ্ডের সাহায্যে দুই ব্যক্তি A এবং B একটি বোঝা বহন করিতেছে। A ব্যক্তি হইতে কতদূর বোঝাটি ঝুলাইয়া দিলে উহার ওজনের দুই-তৃতীয়াংশ A ব্যক্তির স্কন্ধে পড়িবে? A এবং B ব্যক্তির স্কন্ধের দূরত্ব 6 ft।

[Two men A and B are carrying a load by means of a rod. At what distance from the man A must the load be suspended so that the two-thirds of its weight falls on the shoulder of the man A? The distance between the shoulders of A and B is 6 ft.]

[A ব্যক্তির স্কন্ধ হইতে 2 ft দূরে]

8. জনৈক ব্যবসায়ী একটি ত্রুটিপূর্ণ তুলাযন্ত্র ব্যবহার করে। তুলাযন্ত্রটির দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে l_1 এবং l_2। উক্ত ব্যবসায়ী দুইজন ক্রেতাকে তাহার তুলাযন্ত্রের পাঠ অনুযায়ী W পাউণ্ড চা ওজন করিয়া দিল। কিন্তু প্রথম ক্রেতাকে দেওয়ার সময় সে একটি তুলাপাত্রে বাটখারা রাখিয়া ওজন করে এবং দ্বিতীয় ক্রেতাকে দেওয়ার সময় অপর তুলাপাত্রে বাটখারা রাখিয়া ওজন করে। ইহাতে তাহার কত লাভ বা ক্ষতি হইল?

[A tradesman uses a false balance. The lengths of the two arms of the balance are l_1 and l_2 respectively. He weighs out to two customers W lb of tea as indicated by his balance. But in serving one of the customers he puts the weights in one pan while in serving the other he puts them on the other pan. How much does he gain or lose by this?]

[$W\frac{(l_1 - l_2)^2}{l_1 l_2}$ পরিমাণ ক্ষতি হয়]

9. 6·4 ft লম্বা একটি সুষম দণ্ডকে প্রতিসমভাবে একটি টেবিলের উপর রাখা হইল যাহাতে দণ্ডটির 0·5 ft দৈর্ঘ্য টেবিলের উভয় ধার হইতে বাহিরের দিকে প্রলম্বিত অবস্থায় থাকে। যদি দণ্ডটির ভর 7·5 lb হয় তাহা হইলে দণ্ডটির একটি প্রান্তে কী ওজন চাপাইলে ইহা কাত হইবার উপক্রম হইবে ?

[A uniform rod 6·4 ft long is placed symmetrically on a table with 0·5 ft of its length projecting over each edge. If the weight of the rod is 7·5 lb, find the weight that must be suspended at one end in order to just tilt the rod.] [20·25 lb-wt]

10. 4 m দীর্ঘ এবং 10 kg ভরবিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ডকে A এবং B অবস্থানে দুইটি ক্ষুরধারের উপর স্থাপন করা আছে। A বিন্দুটি দণ্ডের এক প্রান্তে অবস্থিত এবং B বিন্দুটি A বিন্দু হইতে 3 m দূরে অবস্থিত। যদি A বিন্দু হইতে 1·5 m দূরে 25 kg-wt ওজনবিশিষ্ট একটি বস্তুকে ঝুলাইয়া দেওয়া হয় তাহা হইলে ক্ষুরধারদ্বয়ের প্রতিক্রিয়া বলের মান নির্ণয় কর।

[A uniform rod 4 m long and having a mass of 10 kg is supported on two knife edges A and B. A is at one end of the bar and B is at distance of 3 m from A. If now a body of weight 25 kg-wt is suspended from a point 1·5 m away from A, calculate the reactions at the knife edges.] [$15\frac{5}{6}$ kg-wt, $19\frac{1}{6}$ kg-wt]

11. একটি মিটার দণ্ডের 30 cm দাগাঙ্কিত স্থান হইতে 1·5 kg ভর ঝুলাইয়া দিলে দেখা যায় যে, দণ্ডটিকে 47·5 cm দাগাঙ্কিত স্থান হইতে ঝুলাইয়া দিলে উহা অনুভূমিক অবস্থায় থাকে। যদি মিটার দণ্ডটি সুষম হয় তাহা হইলে ইহার ভর নির্ণয় কর।

[A metre rod suspended from 47·5 cm division remains horizontal, if a mass of 1·5 kg is suspended from 30 cm division. If the metre rod is uniform, find the mass of the rod.] [10·5 kg]

12. 25 cm ও 80 cm ব্যাসার্ধের এবং যথাক্রমে 100 g ও 500 g ভরের দুইটি গোলক পরস্পরের সংস্পর্শে থাকিয়া যে-কঠিন বস্তু গঠন করে উহার ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

[Find the centre of gravity of the solid formed by two spheres touching each other, their radii being 25 cm and 80 cm and their masses being 100 g and 500 g respectively.]

[80 cm ব্যাসার্ধের গোলকের কেন্দ্র হইতে 17·5 cm দূরে]

13. একটি ব্যক্তি এবং একটি বালক একটি সুষম বাঁশের সাহায্যে 100 lb ভরের একটি বোঝা বহন করিতেছে। বাঁশের এক প্রান্ত লোকটির কাঁধে এবং অপর প্রান্ত বালকটির কাঁধে রহিয়াছে। বাঁশটির দৈর্ঘ্য 10 ft এবং ইহার ভর 8 lb। বোঝাটিকে কোথায় ঝুলাইলে লোকটি বালকটি অপেক্ষা দ্বিগুণ বোঝা বহন করিবে ?

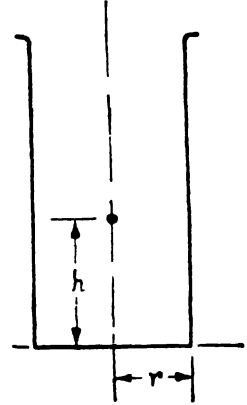
[A man and a boy carry a load of mass 100 lb by means of a pole. The man and the boy support the two ends of the pole on their shoulders. The length of the pole is 10 ft and its mass is 8 lb. Where should the load be supported on the pole so that the man may carry twice as much load as the boy ?]

[বালকটি যে-প্রান্তে আছে সেই প্রান্ত হইতে 6·8 ft দূরে]

14. 12 cm ব্যাসবিশিষ্ট একটি সুষম চোঙের উচ্চতা সর্বোচ্চ কত হইলে উহাকে অনুভূমিক তলের সহিত 20° কোণে আনত অমসৃণ নততলের উপর স্থাপন করিলে উহা উল্টাইয়া পড়িবে না ?

[Find the maximum height of a uniform cylinder of diameter 12 cm that can be placed with its base on a rough inclined plane that makes an angle 20° with the horizontal without the cylinder toppling over.] [32·97 cm (প্রায়)]

15. একটি চোঙাকৃতি পাত্রের ব্যাসার্ধ r এবং ইহার ভারকেন্দ্রটি তলদেশ হইতে h উচ্চতায় কেন্দ্ররেখার উপরে অবস্থিত (চিত্র 7.18)। উল্টাইয়া ফেলিবার পূর্ব পর্যন্ত পাত্রটিকে উল্লম্ব রেখার সহিত সর্বোচ্চ কতটা কাত করা যায় ?

[A cylindrical vessel of radius r has its centre of gravity at a height of h from its bottom and on the centre line (Fig. 7.18). Through what maximum angle from the vertical can the vessel be displaced before it topples over ?] [$\cot^{-1}(h/r)$]

চিত্র 7.18

16. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র, যাহার প্রতিটি বাহু 50 cm দীর্ঘ। A, B, C এবং D বিন্দুগুলিতে যথাক্রমে 2 g, 4 g, 6 g, এবং 8 g ভরবিশিষ্ট বস্তুকণা স্থাপন করা হইল। এই বস্তুসংহতির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

[ABCD is a square each of whose sides is 50 cm long. Particles of masses 2 g, 4 g, 6 g and 8 g are placed at A, B, C and D respectively. Find the position of the centre of gravity of the system of particles.] [AB বাহু হইতে 35 cm দূরে এবং AD বাহু হইতে 20 cm দূরে]

17. সুষম বেধসম্পন্ন এবং 12 cm দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গাকার ফলককে কর্ণ টানিয়া চারিটি সমান ত্রিভুজে বিভক্ত করা হইল এবং একটি ত্রিভুজ কাটিয়া বাদ দেওয়া হইল। বর্গাকার ফলকটির অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

[A square lamina of uniform thickness and side 12 cm is divided into four triangles by drawing the diagonals and one of the triangles is then cut out. Find the position of the centre of gravity of the remainder.] [বর্গাকার ফলকের মধ্যবিন্দু হইতে 1·33 দূরে]

18. 1 g, 2 g, 3 g, 4 g এবং 5 g ভরবিশিষ্ট পাঁচটি বস্তুকে উপেক্ষণীয় ওজনের একটি মিটার দণ্ড হইতে 25 cm ব্যবধানে পর পর ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। দণ্ডটিকে কোথায় ঠেকা দিয়া রাখিলে উহা অনুভূমিক অবস্থায় স্থির থাকিবে ?

[Five bodies of masses 1 g, 2 g, 3 g, 4 g and 5 g are hung successively at intervals of 25 cm along a metric stick. Find where the stick should be supported to keep it horizontal.]

[প্রথম বস্তুটি হইতে $66\frac{2}{3}$ cm দূরে]

19. 16 m দীর্ঘ এবং 50 kg ভরবিশিষ্ট একটি সুষম বীম উহার দুই প্রান্ত হইতে

সমান দূরত্বে দুইটি খুঁটির উপর স্থির রহিয়াছে। এই দূরত্বের মান সর্বোচ্চ কত হইলে 100 kg ভরের কোন ব্যক্তি বীমটির যে কোন স্থানে দাঁড়াইলেও বীমটি কাত হইয়া পড়িবে না ?

[A uniform beam of length 16 m and mass 50 kg rests on two props at equal distances from the ends. Find the maximum value of these distances so that a man weighing 100 kg may stand anywhere on the beam without upsetting it.] [$2\frac{2}{3}$ m]

20. 10 m দীর্ঘ একটি দড়ির এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব টেলিফোন পোস্টের সহিত লাগান আছে। এক ব্যক্তি দড়ির অপর প্রান্ত ধরিয়া একটি নির্দিষ্ট বলে টানিতেছে। পোস্টটির কোন্ বিন্দুতে দড়িটি যুক্ত করিলে লোকটি পোস্টটিকে কাত করিয়া ফেলিতে সবচেয়ে বেশি সুযোগ পাইবে ?

[One end of a rope of length 10 m is attached to a vertical telegraph post and a man pulls at other end with a given force. At what point of the post should the rope be attached in order that the man will have the best chance of overturning the post ?]

[ভূমি হইতে প্রায় 7·07 m উঁচুতে]

21. 50 cm লম্বা একটি পাতলা সুষম ধাতব দণ্ডকে উহার এক প্রান্ত হইতে 30 cm দূরত্বে সমকোণে বাঁকাইয়া L-এর ন্যায় আকৃতি দেওয়া হইল। দণ্ডটিকে উহার বাঁকানো স্থান হইতে একটি পেরেকের সাহায্যে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। যখন সংস্থাটি সাম্যে আসিবে তখন 30 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বাহুটি উল্লম্ব রেখার সহিত কত কোণ করিয়া থাকে ?

[A thin uniform metal rod of length 50 cm is bent at a point 30 cm away from one of its ends, forming a right-angled L-shaped piece. The bent rod is hung on a nail at the point of bend. What angle does the 30 cm side make with the vertical line when the system is in equilibrium ?] [24° (প্রায়)]

অষ্টম পরিচ্ছেদ

কার্য, ক্ষমতা ও শক্তি

8.1 কার্য (Work) : কোন বস্তুর উপর কোন বল প্রযুক্ত হইলে যদি বলের প্রয়োগবিন্দুর সরণ ঘটে তাহা হইলে প্রযুক্ত বল কার্য করিতেছে বলা হয়। প্রযুক্ত বল এবং বলের অভিমুখে উহার প্রয়োগবিন্দুর সরণের গুণফল দ্বারা কার্যের পরিমাপ করা হয়। অর্থাৎ,

বল-কর্তৃক কৃত কার্য (W) = বল (F) × বলের প্রয়োগবিন্দুর সরণ (s) ··· (8.1)

বলাধীন বস্তুর সরণ বলের প্রয়োগরেখার সহিত যে-কোন কোণ করিয়া থাকিতে পারে। সেক্ষেত্রে, বলের দ্বারা কৃত কার্য বলটির প্রয়োগবিন্দুর সরণ ও সরণের অভিমুখে

ঐ বলের কার্যকর উপাংশের গুণফল। ভাষান্তরে বলা যায়, বলের দ্বারা কৃত কার্য বল ও বলের অভিমুখে সরণের উপাংশের গুণফল। কোন বল F-এর ক্রিয়াধীন কোন বস্তুর সরণ s হইলে এবং বল ও সরণের অভিমুখের মধ্যবর্তী কোণ θ হইলে লেখা যায়,

F বল-কর্তৃক কৃত কার্য $= Fs \cos\theta$ ... (8.2)

8.2 ক্ষমতা (Power)ঃ কার্য করিবার হারকে ক্ষমতা বলা হয়। যদি t সময়ে কোন বল দ্বারা W কার্য হয় তাহা হইলে সংজ্ঞানুসারে বল-প্রয়োগকারীর ক্ষমতা,

$$P = \frac{W}{t}$$

অর্থাৎ, ক্ষমতা = $\frac{\text{কৃত কার্য}}{\text{সময়}}$ ... (8.3)

8.3 শক্তি (Energy)ঃ কার্য করিবার সামর্থ্যকে শক্তি বলা হয়। কোন বস্তুর শক্তি একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ কার্য সূচিত করে বলিয়া শক্তিকে কার্যের এককেই প্রকাশ করা হয়।

যান্ত্রিক শক্তি দুই প্রকার—স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি।

গতিশীল বস্তু স্থির হইবার পূর্ব পর্যন্ত যে-পরিমাণ কার্য করিতে পারে তাহাই বস্তুটির গতিশক্তি। কোন বস্তুর গতিবেগ v এবং ভর m হইলে উহার গতিশক্তি

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

অর্থাৎ, বস্তুর গতিশক্তি = $\frac{1}{2}$ × ভর × (গতিবেগ)^2 ... (8.4)

স্বাভাবিক অবস্থান বা আকৃতি হইতে পরিবর্তন করিয়া কোন বস্তুকে অন্য কোন অবস্থান বা আকৃতিতে আনিলে উহাতে কিছু পরিমাণ শক্তি সঞ্চিত হয় বস্তুর এই অবস্থান বা আকৃতির জন্য বস্তুতে যে-শক্তি সঞ্চিত থাকে তাহাকে উহার স্থিতিশক্তি বলে। বর্তমান অবস্থান বা আকৃতি হইতে স্বাভাবিক অবস্থান বা আকৃতিতে ফিরিয়া আসিবার পূর্বে বস্তুটি যে-পরিমাণ কার্য করিতে পারে তাহাই ঐ বস্তুর স্থিতিশক্তির পরিমাণ।

কোন বস্তুকে অভিকর্ষের বিরুদ্ধে উপরে তুলিতে কার্য করিতে হয়। এই কার্য করিতে যে-শক্তির যোগান প্রয়োজন তাহা স্থিতিশক্তিরূপে বস্তুটিতে সঞ্চিত হয়। ইহাকে বস্তুটির অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি বলা হয়। কোন বস্তুর অভিকর্ষীয় স্থিতি-শক্তির মান নির্ণয় করিবার জন্য একটি নির্দেশ-তল (reference plane) ধরিয়া লইতে হয়। সাধারণত ভূপৃষ্ঠকেই নির্দেশ-তল ও বস্তুর 'স্বাভাবিক অবস্থান' (standard position) ধরিয়া লওয়া হয়। এই অবস্থান হইতে h উচ্চতায় অবস্থিত কোন বিন্দুতে m ভরবিশিষ্ট কোন বস্তুর অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি,

$$V = mgh \qquad \text{... (8.5)}$$

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 8.1 10 g ভরবিশিষ্ট একটি বুলেট কোন কাঠের তক্তার মধ্য দিয়া যাইবার ফলে বুলেটটির গতিবেগ 100 m/s হইতে 50 m/s-এ নামিয়া আসে। বুলেটটির গতিশক্তির হ্রাস নির্ণয় কর।

[The velocity of a 10 g bullet falls from 100 m/s to 50 m/s in passing through a plank of wood. What is the loss in kinetic energy ?]

সমাধান : বুলেটটির প্রাথমিক গতিশক্তি, $E_1=\frac{1}{2}mu^2$

এখানে, $m=10$ g, $u=100$ m/s $=100\times100$ cm/s

$\therefore \quad E_1=\frac{1}{2}\times10\times(100\times100)^2=50\times10^7$ erg

বুলেটটির অন্তিম গতিশক্তি, $E_2=\frac{1}{2}mv^2$

এখানে, $v=50$ m/s $=50\times100$ cm/s

$\therefore \quad E_1=\frac{1}{2}\times10\times(50\times100)^2=12{\cdot}5\times10^7$ erg

কাজেই, গতিশক্তির হ্রাস, $E_1-E_2=(50-12{\cdot}5)\times10^7$ erg $=37{\cdot}5$ J

উদাহরণ 8.2 একটি রেলগাড়ির বগিতে 40 জন যাত্রী আছে, তাহাদের গড় ওজন 140 lb। যদি বগিটির ওজন 6 টন হয় এবং ইহা যদি ঘণ্টায় 30 মাইল গতিবেগে চলিতে থাকে তবে ইহার গতিশক্তি কত ?

[A railway carriage contains forty passengers, whose average weight is 140 lb. If the carriage itself weighs 6 tons and is moving at a rate of 30 miles an hour, what is its kinetic energy ?]

সমাধান : যাত্রীসহ ট্রেনের বগির ভর, m

$=140\times40+6\times2240$ lb $=5600+13440=19040$ lb

গতিবেগ, $v=\frac{30\times1760\times3}{60\times60}$ ft/s $=44$ ft/s

কাজেই, যাত্রীসহ রেলগাড়ির বগিটির গতিশক্তি, E

$=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times19040\times(44)^2$ ft-poundal

$=\frac{1}{2}\times\frac{19040}{32}\times44\times44$ ft-lb

$=575960$ ft-lb

উদাহরণ 8.3 ভূ-পৃষ্ঠ হইতে এক মাইল ঊর্ধ্বে কিছু পরিমাণ মেঘ রহিয়াছে। ঐ মেঘ বৃষ্টিরূপে নামিয়া আসিলে পৃথিবী-পৃষ্ঠের এক বর্গমাইল স্থানে $\frac{1}{2}$ inch গভীরতার জল সৃষ্টি করিতে পারে। এই জলকে মেঘে পরিণত করিতে কত কার্য করিতে হইয়াছিল ?

[There is some cloud at a height of 1 mile from the ground. If the cloud comes down as rain, the water so formed is sufficient to cover 1 sq. mile of the surface of the earth $\frac{1}{2}$ inch deep. How much work was done in raising the water to the clouds ?]

সমাধান : মোট জলের আয়তন $= 1$ বর্গমাইল$\times\frac{1}{2}$ ইঞ্চি

$$=(1760\times3)^2\times\frac{1}{2\times12}\ ft^3$$

$$=(5280)^2\times\frac{1}{24}\ ft^3$$

1 ft^3 জলের ভর 62·5 lb বলিয়া মোট জলের ভর

$$=(5280)^2\times\frac{1}{24}\times62\cdot5\ lb$$

এই পরিমাণ জলকে একমাইল বা 5280 ft ঊর্ধ্বে তুলিতে কৃত কার্যের পরিমাণ,

$$W=mgh$$

$$=\frac{(5280)^2\times62\cdot5}{24}\times32\times5280\ \text{ft-poundal}$$

$$=\frac{(5280)^3\times62\cdot5}{24}\text{ft-lb}=3\cdot832\times10^{11}\ \text{ft-lb}$$

উদাহরণ 8.4 224 টন ওজনবিশিষ্ট কোন ট্রেনকে অনুভূমিক লাইনে 10 মাইল পথ লইয়া যাইতে কী পরিমাণ কার্য করিতে হইবে ? বিরুদ্ধ বলের মান প্রতি টনে 10 lb ধরিয়া লও ।

[Calculate the work done in moving a railway train weighing 224 tons through a distance of 10 miles along a level line, assuming that the resistance amounts to 10 lb for every ton in motion.]

সমাধান : ট্রেনের গতির বিপরীতদিকে ক্রিয়াশীল বিরুদ্ধ বল,

$$=10\times224\ lb=1\ ton$$

ট্রেন-কর্তৃক কৃত কার্য=বিরুদ্ধ বল$\times$অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$=(1\ ton\times10\times1760\times3\ ft)=52800\ \text{ft-tons}$$

উদাহরণ 8.5 320 ft/s গতিবেগে 5 lb ভরবিশিষ্ট কোন বস্তুকে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বমুখে উৎক্ষেপ করা হইল । বস্তুটি উহার সর্বোচ্চ উচ্চতার অর্ধেক দূরে উঠিতে অভিকর্ষের বিরুদ্ধে কী পরিমাণ কার্য করিবে ? ($g=32\ ft/s^2$)

[A body of mass 5 lb is projected vertically upward with a velocity of 320 ft/s. How much work is done against gravity when it has ascended to half its maximum height ? $g=32\ ft/s^2$)]

সমাধান : বস্তুটি যখন সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠিবে তখন উহার বেগ শূন্য বলিয়া লেখা যায়,

$$0=u^2-2gh$$

$$\therefore\quad \text{সর্বোচ্চ উচ্চতা}=\frac{u^2}{2g}=\frac{320\times320}{2\times32}=1600\ ft$$

বস্তুটি উহার সর্বোচ্চ উচ্চতার অর্ধেক অর্থাৎ $\frac{1600}{2}$ বা 800 ft উপরে উঠিতে অভিকর্ষ-বলের বিরুদ্ধে যে-পরিমাণ কার্য করে তাহার মান

$$W=\text{বস্তুর ওজন}\times\text{উচ্চতা}=5\times800\ ft\ lb=4000\ \text{ft-lb}$$

উদাহরণ 8.6 একটি ইঞ্জিন 10 টন ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে 30 s সময়ে 30 ft উপরে তুলিতে পারে । ইঞ্জিনটির অশ্ব-ক্ষমতা কত ?

[An engine can raise a body weighing 10 tons to a height of 30 ft in 30 seconds. What is the H. P. of the engine ?]

সমাধান : বস্তুটির ওজন $=10\times 2240$ lb-wt

কাজেই 30 s সময়ে ইঞ্জিন-কর্তৃক কৃত কার্য

$=$ বস্তুর ওজন $\times$ উচ্চতা $= 10\times 2240\times 30$ ft-lb

কাজেই, 1 s সময়ে ইঞ্জিন-কর্তৃক কৃত কার্য

$$=\frac{10\times 2240\times 30}{30}=2240\dot{0}\text{ lb-wt}$$

সুতরাং, ইঞ্জিনের ক্ষমতা $=\frac{22400}{550}=40{\cdot}73$ H. P.

উদাহরণ 8.7 একটি ইঞ্জিন প্রতি মিনিটে 48 ft/s বেগে 39600 lb জলকে উৎক্ষেপ করিতে পারে। ইঞ্জিনটির ক্ষমতা কত ?

[An engine can project water at a rate of 39600 lb per minute at the velocity of 48 ft/s. What is the power of the engine ?]

সমাধান : ইঞ্জিন-কর্তৃক 1 মিনিটে কৃত কার্য,

$$=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}\times 39600\times(48)^2\text{ ft-poundals}$$

$$=\tfrac{1}{2}\times\frac{39600\times(48)^2}{32}\text{ ft-lb}$$

কাজেই, ইঞ্জিনের ক্ষমতা $=\frac{1}{2}\times\frac{39600\times 48\times 48}{32\times 33000}=\frac{216}{5}=43{\cdot}2$ H. P.

উদাহরণ 8.8 130 lb ভরবিশিষ্ট এক ব্যক্তি 80 lb ভরের বোঝাকে 2 মিনিটে 80 ft উচ্চতাবিশিষ্ট একটি অট্টালিকার শীর্ষে লইয়া গেল। ইহাতে ঐ ব্যক্তি কী ক্ষমতা প্রয়োগ করিল ?

[A man weighing 130 lb lifts a weight of 80 lb to the top of a building 80 ft high in 2 minutes. What power does he employ ?]

সমাধান : বোঝাসহ ব্যক্তির ওজন $= 130+80 = 210$ lb-wt

2 মিনিটে ব্যক্তি কর্তৃক কৃত কার্য

$=$ বোঝাসহ ব্যক্তির ওজন $\times$ উচ্চতা $=210\times 80$ ft-lb

$\therefore$ ঐ ব্যক্তির ক্ষমতা $=\frac{210\times 80}{2\times 33000}=0{\cdot}254$ H. P.

উদাহরণ 8.9 এক কিলোগ্রাম ভরবিশিষ্ট বস্তুর গতিবেগ 5 সেকেণ্ডে 5 cm/s হইতে বৃদ্ধি পাইয়া 20 cm/s হইল। বস্তুটির উপর কত বল প্রযুক্ত হইল এবং গতিবেগের ঐ পরিবর্তনের সময় বস্তুটির উপর কী পরিমাণ কার্য করা হইল নির্ণয় কর।

[The velocity of a body weighing 1 kg changes from 5 cm/s to 20 cm/s in 5 seconds. Find the force acting and the work done on the body during the changes.]

সমাধান : বস্তুটির প্রাথমিক গতিবেগ, $u=5$ cm/s

5 সেকেণ্ড পর বস্তুটির গতিবেগ, $v=20$ cm/s

কাজেই বস্তুর ত্বরণ, $f=\frac{v-u}{t}=\frac{20-5}{5}=3\ cm/s^2$

কাজেই বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বল $P=mf$

$=10^3\times 3\ dyn=3000\ dyn$

$\therefore$ বস্তুর উপর কৃত কার্য$=\frac{1}{2}m(v^2-u^2)=\frac{1}{2}\times 10^3\times(20^2-5^2)$

$=187500\ erg$

উদাহরণ 8.10 5 অশ্ব-ক্ষমতাসম্পন্ন একটি মোটরের সাহায্যে একটি কুয়া হইতে 30 ft উচ্চতায় জল তোলা হয়। যদি পাম্পের দক্ষতা 85% হয় তাহা হইলে প্রতি মিনিটে কী পরিমাণ জল তোলা যাইবে ? 1 গ্যালন জলের ওজন=10 lb।

[Water is pumped up from a well through a height of 30 ft by means of a 5 horse-power motor. If the efficiency of the pump is 85%, find in gallons the quantity of water pumped up per minute. Given 1 gallon of water weighs 10 lb.]

সমাধান : 5 অশ্ব-ক্ষমতাসম্পন্ন মোটরে প্রতি মিনিটে যে-পরিমাণ শক্তি ব্যয়িত হয় তাহার মান, $W=5\times 33000$ ft-lb

পাম্পের দক্ষতা 85% বলিয়া প্রতি মিনিটে কার্যকর বা ব্যবহারযোগ্য শক্তি

$=5\times 33000\times \frac{85}{100}$ ft-lb ... (i)

মনে করি, পাম্পটি প্রতি মিনিটে x গ্যালন জল তোলে। কাজেই, প্রতি মিনিটে পাম্প-কর্তৃক কৃত কার্য$=10x\times 30$ ft-lb ... (ii)

(i) এবং (ii) হইতে, $10\,x\times 30=\frac{5\times 33000\times 85}{100}$

বা, $x=467\cdot5$ gallons

উদাহরণ 8.11 একটি পাম্পের সাহায্যে একটি জলাধার হইতে প্রতি মিনিটে 5000 গ্যালন জলকে 20 ft উচ্চতায় তোলে। যদি উৎপন্ন শক্তির 40% অপচিত হয় তাহা হইলে ইঞ্জিনটির অশ্ব-ক্ষমতা কত ?

[An engine pumps up 5000 gallons of water per minute from a reservoir to an average height of 20 ft. What is the horse power of the engine if 40% power is wasted ?]

সমাধান : মনে করি, ইঞ্জিনের অশ্ব-ক্ষমতা=P

ইঞ্জিন-কর্তৃক উৎপন্ন শক্তির 40% অপচিত হয় বলিয়া প্রতি মিনিটে কার্যকর শক্তি$=P\times 33000\times\frac{60}{100}$ ft-lb ... (i)

প্রতি মিনিটে ইঞ্জিন-কর্তৃক কৃত কার্য$=5000\times 10\times 20$ ft-lb ... (ii)

কাজেই, (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$P\times 33000\times\frac{60}{100}=5000\times 10\times 20$

বা, $P=\frac{5000\times 10\times 20\times 100}{33000\times 60}=50\cdot5$ H. P.

উদাহরণ 8.12 8 kW ক্ষমতাসম্পন্ন একটি ইঞ্জিন 2000 kg ভরবিশিষ্ট কোন বস্তুকে 50 s সময়ে কতটা উচ্চতা পর্যন্ত তুলিতে পারে তাহা নির্ণয় কর। ($g=9\cdot80\ m/s^2$)

[Find the height at which an engine of 8 kilowatt can raise a mass of 2000 kg within 50 seconds. $(g=9{\cdot}80\ \text{m/s})^2$]

সমাধান : মনে করি, নির্ণেয় উচ্চতা $= h$ m

বস্তুটির ওজন $= 2000$ kg $= 2000\times 9{\cdot}8$ newtons

ইঞ্জিন-কর্তৃক কৃত কার্য=বস্তুর ওজন × উচ্চতা

$$= 2000\times 9{\cdot}8\times h \text{ joules} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

ইঞ্জিনের ক্ষমতা 8 kilowatt বলিয়া 50 s সময়ে ইহা দ্বারা কৃত কার্য

$$= 8000\times 50 \text{ joules} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

∴ (i) এবং (ii) হইতে, $2000\times 9{\cdot}8\times h = 8000\times 50$

বা, $h=\dfrac{8000\times 50}{2000\times 9{\cdot}8}=20{\cdot}4$ m (প্রায়)

উদাহরণ 8.13 550 গ্যালন আয়তন-ধারণক্ষম এবং 50 ft উচ্চে অবস্থিত একটি ট্যাঙ্ককে 0·25 অশ্বক্ষমতাসম্পন্ন পাম্পের সাহায্যে জলপূর্ণ করিতে কত সময় লাগিবে ? (1 গ্যালন জলের ভর = 10 lb) ।

[Find the time required to completely fill a tank of 550 gallon capacity situated at a height of 50 ft by a pump of 0·25 H. P. (1 gallon of water weighs 10 lb)]

সমাধান : ট্যাঙ্কটিকে জলপূর্ণ করিতে মোট যে-পরিমাণ কার্য করিতে হইবে তাহার পরিমাণ, $W = 550\times 10\times 50$ ft-lb ··· (i)

0·25 অশ্ব-ক্ষমতাসম্পন্ন পাম্প প্রতি সেকেণ্ডে মোট যে-পরিমাণ কাজ করে তাহার পরিমাণ, $w = 0{\cdot}25\times 550$ ft-lb ··· (ii)

কাজেই, ট্যাঙ্কটিকে জলপূর্ণ করিতে সময় লাগিবে

$$t=\frac{W}{w}\text{ s}=\frac{550\times 10\times 50}{0{\cdot}25\times 550}\text{ s} \quad \text{[(i) এবং (ii) হইতে]}$$

$$=2000 \text{ s}=33 \text{ min. } 20 \text{ s}$$

উদাহরণ 8.14 একটি মোটরগাড়ি অনুভূমিক রাস্তা দিয়া 60 mi/h সমবেগে চলিতেছে। যদি গাড়ির গতির বিরুদ্ধে বায়ু এবং রাস্তার ঘর্ষণজনিত বাধা 50 lb-wt হয় তাহা হইলে গাড়ির ইঞ্জিনের অশ্ব-ক্ষমতা নির্ণয় কর ।

[A motor car is running on a level road at a uniform rate of 60 mi/h. If the frictional resistance offered by the air and road to the motion of the car is 50 lb-wt, calculate the H. P. developed by the engine of the car.]

সমাধান : গাড়িটি অনুভূমিক পথে চলিতেছে বলিয়া উহার উপর অভিকর্ষজ বাধা ক্রিয়া করিতেছে না। ইঞ্জিন কেবল 50 lb-wt বল প্রয়োগ করিয়া বায়ু ও রাস্তার ঘর্ষণ-জনিত বলের বিরুদ্ধে কার্য করিতেছে।

ইঞ্জিনের গতিবেগ $=\frac{60\times 1760\times 3}{60\times 60}=88$ ft/s

কাজেই, প্রতি সেকেণ্ডে ইঞ্জিন-কর্তৃক কৃত কার্যের পরিমাণ

=প্রযুক্ত বল × অতিক্রান্ত দূরত্ব=50 × 88 ft-lb

∴ ইঞ্জিনের ক্ষমতা $=\frac{50 \times 88}{550}=8$ H. P.

উদাহরণ 8.15 এক টন ওজনের একটি মোটরগাড়ি $\frac{1}{100}$ নতিবিশিষ্ট কোন নততল বরাবর প্রতি ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে উপরের দিকে উঠিতেছে। যদি ইঞ্জিনটি উহার পূর্ণ ক্ষমতা 12 H. P. প্রয়োগ করিয়া থাকে তাহা হইলে গাড়ির গতির বিরুদ্ধে রাস্তা এবং বায়ুর ঘর্ষণ বাধাজনিত বল নির্ণয় কর।

[A motor car weighing one ton is moving up an incline of 1 in 100 with a velocity of 60 miles/h. If the engine is exerting its full power of 12 H. P., find the resistance of the road and air to the motion of the car]

সমাধান : মনে করি, বায়ু ও রাস্তার বাধাজনিত বল = F lb-wt

নততল বরাবর গাড়ির ওজনের উপাংশ, P= $mg \sin \theta$

চিত্র 8.1

এখানে, $m=1$ ton=2240 lb,

$g=32$ ft/s^2

এবং $\sin \theta=\tan \theta=\frac{1}{100}$ [θ-এর মান ক্ষুদ্র বলিয়া]

∴ $P=2240 \times 32 \times \frac{1}{100}$ poundal

$= 2240 \times \frac{1}{100}=22{\cdot}4$ lb-wt

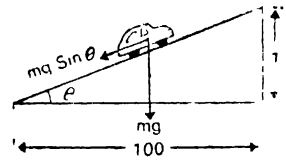
সমবেগে চলিতে হইলে ইঞ্জিনকে যে-পরিমাণ বল প্রয়োগ করিতে হইবে তাহার মান, =(P + F) lb-wt=(22·4 + F) lb-wt

এখন, গাড়ির গতিবেগ=60 mi/h=88 ft/s

কাজেই প্রতি সেকেণ্ডে ইঞ্জিন-কর্তৃক কৃত কার্য = (22·4+F) × 88 ft-lb

সুতরাং, ইঞ্জিনের অশ্ব-ক্ষমতা $=\frac{(22{\cdot}4+F) \times 88}{550}$ H. P.

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\frac{(22{\cdot}4+F) \times 88}{550}=12$

∴ F=52·6 lb-wt

উদাহরণ 8.16 8 অশ্ব-ক্ষমতাসম্পন্ন বৈদ্যুতিক মোটর-চালিত একটি পাম্পের সাহায্যে 80 ft উলম্ব উচ্চতায় জল তোলা হয়। যদি পাম্পটির দক্ষতা 60% হয় তাহা হইলে উহা প্রতি ঘণ্টায় কী পরিমাণ জল তোলে? (1 গ্যালন জলের ভর 10 lb)

[A pump run by an electric motor consuming 8 H. P. lifts water through a vertical height of 80 ft. Find the volume of

water lifted in an hour, if the efficiency of the pump is 60%. (I gallon of water weighs 10 lb)]

সমাধান : মনে করি, মোটর-চালিত পাম্পটি প্রতি ঘণ্টায় x গ্যালন জল তোলে।

কাজেই, প্রতি ঘণ্টায় উত্তোলিত জলের ভর $= x \times 10$ lb

প্রতি ঘণ্টায় পাম্প-কর্তৃক কৃত কার্য

= প্রতি ঘণ্টায় উত্তোলিত জলের ওজন × উল্লম্ব উচ্চতা

$= x \times 10 \times 80$ ft-lb

প্রতি ঘণ্টায় মোটর-কর্তৃক ব্যয়িত শক্তি $= 8 \times 33000 \times 60$ ft-lb

পাম্পের দক্ষতা 60% বলিয়া জল তুলিবার জন্য যে-শক্তি ব্যয়িত হয় তাহার পরিমাণ

$$= 8 \times 33000 \times 60 \times \frac{60}{100} \text{ ft-lb}$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $x \times 10 \times 80 = 8 \times 33000 \times 60 \times \frac{60}{100}$

বা, $x = 11,880$ gallons

উদাহরণ 8.17 100 টন ওজনের একটি ইঞ্জিন একটি অনুভূমিক রেলপথ বরাবর ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে চলিতেছে। যদি গতির বিরুদ্ধে বাধাজনিত বল 15 lb-wt/ton হয় তাহা হইলে ইঞ্জিনটির অশ্ব-ক্ষমতা কত ?

[Calculate the horse power of a 100 ton engine moving along a horizontal railroad with a velocity of 30 miles per hour, if the resisting force is 15 lb-wt/ton.]

সমাধান : বাধাজনিত বলের মান প্রতি টনে 15 lb-wt বলিয়া ইঞ্জিনের বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল মোট বাধাজনিত বল $= 15 \times 100$ lb-wt

ইঞ্জিনের গতিবেগ $= \frac{30 \times 1760 \times 3}{60 \times 60} = 44$ ft/s

কাজেই, এক সেকেণ্ডে ইঞ্জিন-কর্তৃক কৃত কার্য $= 15 \times 100 \times 44$ ft-lb

সুতরাং, ইঞ্জিনের অশ্ব-ক্ষমতা $= \frac{15 \times 100 \times 44}{550} = 1200$ H. P.

উদাহরণ 8.18 500 kg ভরবিশিষ্ট একটি গাড়ি 72 km/h গতিবেগে চলিতেছে। যখন (i) ইহা অনুভূমিক পথ ধরিয়া চলিতেছে, (ii) 1/25 নতিবিশিষ্ট তল দিয়া উপরের দিকে উঠিতেছে, (iii) একই নতিবিশিষ্ট তল দিয়া নিচের দিকে নামিতেছে, তখন গাড়ির ইঞ্জিন-কর্তৃক উৎপন্ন ক্ষমতা কত ? ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক $= 0.1$ এবং $g = 9.8$ m/s^2।

[Find the power developed by the engine of a car of mass 500 kg, if it moves with a constant speed of 72 km/h (i) along a horizontal road, (ii) up an incline of 1 in 25, (iii) down the same incline. The coefficient of friction is 0·1 and $g = 9.8$ m/s^2]

সমাধান : গাড়ির গতিবেগ, $v = 72$ km/h $= \frac{72000}{60 \times 60} = 20$ m/s

(i) গাড়িটি যখন অনুভূমিক রাস্তা দিয়া চলে তখন গাড়ির বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ বল, $F=\mu mg=0{\cdot}1\times500\times9{\cdot}8$ N

গাড়িটি স্থির গতিবেগে চলে বলিয়া ইঞ্জিন-কর্তৃক উৎপন্ন বল ঘর্ষণ-বলের সমান। কাজেই, প্রতি সেকেণ্ডে ইঞ্জিন-কর্তৃক উৎপন্ন শক্তি (অর্থাৎ, ক্ষমতা)

$$=F\times v=0{\cdot}1\times500\times9{\cdot}8\times20 \text{ watt}=9{\cdot}8 \text{ kW}$$

(ii) যদি নততলের নতি θ হয় তাহা হইলে প্রশ্নের শর্তানুসারে লেখা যায়,

$\tan\theta=\sin\theta=\frac{1}{25}$ এবং $\cos\theta\cong1$

গাড়িটি নততল বাহিয়া উপরের দিকে উঠিতে থাকিলে উহার উপর ঐ নততল বরাবর যে-নিম্নাভিমুখী বল ক্রিয়া করে তাহার মান, P

$$= \text{ওজনের উপাংশ}+\text{ঘর্ষণ-বল (F)}$$

$$=mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta$$

$$=500\times9{\cdot}8\times\frac{1}{25}+0{\cdot}1\times500\times9{\cdot}8\times1$$

$$=686 \text{ N}$$

চিত্র 8.2

এক্ষেত্রে প্রতি সেকেণ্ডে গাড়ি-কর্তৃক উৎপন্ন শক্তি (অর্থাৎ, গাড়ির ক্ষমতা)

$$=P\times v=686\times20 \text{ watts}=13{\cdot}72 \text{ kW}$$

(iii) গাড়ি যখন নততল বাহিয়া নিচের দিকে নামিতে থাকে তখন নততল বরাবর উহার উপর ক্রিয়াশীল ঊর্ধ্বাভিমুখী বল, P′

$$=\mu mg\cos\theta-mg\sin\theta=0{\cdot}1\times500\times9{\cdot}8\times1-500\times9{\cdot}8\times\frac{1}{25}$$

$$=490-196=294 \text{ N}$$

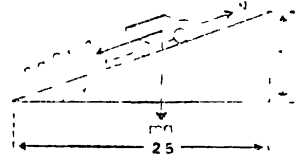
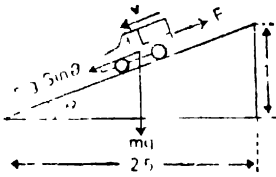
চিত্র 8.3

এক্ষেত্রে ইঞ্জিন-কর্তৃক উৎপন্ন ক্ষমতা$=P'\times v$

$$=294\times20 \text{ watts}=5{\cdot}88 \text{ kW}$$

উদাহরণ 8.19 জলের মধ্যে কোন বস্তুকে h উচ্চতা তুলিলে উহার স্থিতিশক্তির কী পরিবর্তন হয় নির্ণয় কর। বস্তুর ঘনত্ব জলের ঘনত্ব অপেক্ষা বেশি এবং কম—উভয় ক্ষেত্রেই বিবেচনা কর। বস্তুটির ঘনত্ব d, জলের ঘনত্ব d_0 এবং বস্তুর আয়তন V।

[Calculate the change in the potential energy of a body raised through a height h in water. Consider the cases in which the density of the body is greater than, and less than that of water. The density of the body is d, the density of water is d_0 and the volume of the body is V.]

সমাধান : জলে নিমজ্জিত অবস্থায় থাকিলে বস্তুর উপর যুগপৎ দুইটি বল ক্রিয়া করে—ইহাদের একটি হইল (i) বস্তুর ওজন এবং (ii) অপরটি হইল জলের প্লবতা।

বস্তুর ওজন = বস্তুর আয়তন × বস্তুর ঘনত্ব × অভিকর্ষজ ত্বরণ = $V \times d \times g$

বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল প্লবতা = $V \times d_o \times g$

জলের মধ্যে কোন বস্তুকে h উচ্চতা তুলিতে উহার স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি পাইবে $(hVdg)$। আবার, জলের প্লবতার জন্য বস্তুটির স্থিতিশক্তি হ্রাস পাইবে $(h \times V \times d_o \times g)$।

$\therefore$ মোট স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি $\triangle E = V \times g \times h(d - d_o)$

(i) যখন জলের ঘনত্বের তুলনায় বস্তুর ঘনত্ব বেশি, অর্থাৎ যখন $d > d_o$, তখন

$$\triangle E > 0$$

এক্ষেত্রে, বস্তুকে উপরে তুলিলে উহার স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি পায়।

(ii) যখন জলের ঘনত্বের তুলনায় বস্তুর ঘনত্ব কম অর্থাৎ যখন $d < d_o$, তখন

$$\triangle E < 0$$

এক্ষেত্রে, বস্তুকে উপরে তুলিলে উহার স্থিতিশক্তির মান হ্রাস পায়।

দ্রষ্টব্য ঃ যখন জলে নিমজ্জিত কোন বস্তুকে h উচ্চতা তোলা হয় তখন বস্তুটির পূর্ববর্তী অবস্থান জলপূর্ণ হয়। অর্থাৎ, বলা যায় যে, V আয়তন জল এবং V আয়তনবিশিষ্ট বস্তু পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিয়াছে। বস্তুটি h উচ্চতায় উঠিবার ফলে ইহার স্থিতিশক্তির বৃদ্ধি $Vdgh$ এবং একই আয়তনের জল h উচ্চতা নামিবার ফলে জলের স্থিতিশক্তির হ্রাস$=Vd_ogh$,

কাজেই, আলোচ্য সংস্থার স্থিতিশক্তির পরিবর্তন

$$= Vdgh - Vd_ogh = V(d - d_o)gh$$

উদাহরণ 8.20 100 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে 100 m উ'চু একটি মিনারের উপর হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। (i) বস্তুটিকে ছাড়িয়া দিবার 1 s পর এবং (ii) মিনারের পাদদেশে আসিয়া উহাতে কী পরিমাণ গতিশক্তি সঞ্চারিত হয় তাহা নির্ণয় কর।

[A body of mass 100 g is let loose from a tower 100 m high. Calculate the kinetic energy of the body (i) one second after its release and (ii) when it is at the bottom of the tower.]

(H. S. (New), 1978)

সমাধান ঃ (i) উপর হইতে ছাড়িয়া দিবার 1 s পরে বস্তুটির নিম্নাভিমুখী গতিবেগ, $v = gt = 980 \times 1 = 980$ cm/s $= 9{\cdot}8$ m/s

কাজেই, এই সময় বস্তুর গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$

$$= \frac{1}{2} \times 100 \times (9{\cdot}8)^2 \text{ joules} = 9604 \text{ joules}$$

(ii) যখন বস্তুটি মিনারের পাদদেশে আসিয়া পৌঁছে তখন বস্তুটির গতিবেগ v' হইলে লেখা যায়, $v'^2 = 2gh = 2 \times 9{\cdot}8 \times 100\ (\text{m/s})^2$

এই সময় বস্তুর গতিশক্তি, $\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times 2 \times 9{\cdot}8 \times 100$

$$= 9{\cdot}8 \times 100 \times 100 \text{ জুল} = 98000 \text{ J}$$

উদাহরণ 8.21 60 kg ভরবিশিষ্ট এক ব্যক্তি 20 kg ভর মাথায় লইয়া সিঁড়ি বাহিয়া উঠিতেছে। সিঁড়িতে 20টি ধাপ আছে এবং প্রতিটি ধাপের উচ্চতা 20 cm। যদি ব্যক্তিটি উপরে উঠিতে 10 s সময় লয় তাহা হইলে তাহার ক্ষমতা নির্ণয় কর।

[A man weighing 60 kg climbs up a stair-case carrying a 20 kg load on his head. The stair case has 20 steps and each step has a height of 20 cm. If he takes 10 s to climb, calculate his power.]

সমাধান : লোকটি যে-পরিমাণ কার্য করে তাহার মান $W=mgh$

এখানে, $m=(60+20)=80$ kg

এবং $h=20\times20$ cm

$\therefore \quad W=80\times10^3\times980\times(20\times20)$ erg

এই কার্য করিতে মোট সময় লাগে 10 s

কাজেই, লোকটির ক্ষমতা

$$=\frac{\text{কৃত কার্য}}{\text{সময়}}=\frac{80\times10^3\times980\times400}{10}\text{ erg/s}$$

$$=\frac{80\times10^3\times980\times400}{10\times10^7}\text{ watts}=313{\cdot}6\text{ W}$$

উদাহরণ 8.22 10^5 পাউণ্ডাল মানের বাধাজনিত বলের বিরুদ্ধে 400 অশ্ব-ক্ষমতাসম্পন্ন একটি ইঞ্জিন-কর্তৃক চালিত ট্রেনের গতিবেগ নির্ণয় কর। গতিবেগকে m. p. h. এককে প্রকাশ কর।

[Find the speed of a train driven by an engine of 400 H. P. against a resistance of 10^5 poundals. Express it in miles per hour.]

সমাধান : মনে করি, ট্রেনের গতিবেগ $= x$ mi/h

$$=x\times1760\times3\text{ ft/h}$$

400 অশ্ব-ক্ষমতাসম্পন্ন ইঞ্জিন-কর্তৃক প্রতি ঘণ্টায় কৃত কার্য

$$=400\times550\times60\times60\text{ ft-lb} \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

এক ঘণ্টায় ট্রেনের উপর ইঞ্জিন-কর্তৃক কৃত কার্য

$$=x\times1760\times3\times10^5\text{ ft-poundal} \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$$=\frac{x\times1760\times3\times10^5}{32}\text{ ft-lb}$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\dfrac{x\times1760\times3\times10^5}{32}=400\times550\times60\times60$

বা, $x=48$ mi/h

উদাহরণ 8.23 640 ft/s গতিবেগে 1·5 lb ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে উল্লম্ব-ভাবে উপরের দিকে ছোঁড়া হইল। বস্তুটি উহার সর্বোচ্চ উচ্চতার অর্ধেক আরোহণ করিতে অভিকর্ষের বিরুদ্ধে কী পরিমাণ কার্য করে?

[A body of mass 1·5 lb is projected vertically upwards with

a velocity of 640 ft/s. What is the amount of work done by the body against gravity in ascending half its maximum height ?]

সমাধান : মনে করি, বস্তুটির সর্বোচ্চ উচ্চতা $=h$

সর্বোচ্চ উচ্চতায় বস্তুটির গতিবেগ শূন্য বলিয়া লেখা যায়,

$$0=u^2-2gh$$

বা, $h=\frac{u^2}{2g}=\frac{640^2}{2g}$ [g=অভিকর্ষজ ত্বরণ]

বস্তুটিকে সর্বোচ্চ উচ্চতার অর্ধেক বা $h/2$ উচ্চতায় উঠিতে যে-পরিমাণ কার্য করিতে হয়, তাহার মান =বস্তুর ওজন × অভিকর্ষের বিরুদ্ধে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$=1\cdot5\times\frac{1}{2}\times\frac{640^2}{2\times32}=4800 \text{ ft-lb}$$

উদাহরণ 8.24 1 lb ভরবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের বলকে 27 ইঞ্চি লম্বা সুতার সহিত বাঁধা হইল এবং সূতাটি যখন অনুভূমিক অবস্থায় রহিয়াছে তখন উহাকে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। ইহার গতিপথের নিম্ন অবস্থানে আসিয়া উহা একটি ঘর্ষণহীন তলে স্থিরভাবে অবস্থিত 5 lb ভরবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের বলকে আঘাত করে (চিত্র 8.4)। এই সংঘাত স্থিতিস্থাপক। সংঘাতের পর বল এবং ব্লকটির দ্রুতি কত হইবে?

চিত্র 8.4

[A steel ball of mass 1 lb is fastened to a cord 27 inches long and is released when the cord is horizontal. At the bottom of its path the ball strikes a 5 lb steel block initially at rest on a frictionless surface (Fig. 8.4). The collision is elastic. Find the speed of the ball and the speed of the block just after the collision.]

সমাধান : সূতার দৈর্ঘ্য, $l=27$ inches$=\frac{27}{12}=2\cdot25$ ft

ধরি, ব্লকের সহিত সংঘাতের পূর্বে বলটির গতিবেগ$=v$ ft/s^2

শক্তির সংরক্ষণ সূত্র হইতে লেখা যায়, $\frac{1}{2}mv^2=mgl$ বা, $v^2=2gl$

বা, $v=\sqrt{2gl}=\sqrt{2\times32\times2\cdot25}$

বা, $v=12$ ft/s ... (i)

কাজেই, সংঘাতের অব্যবহিতকাল পূর্বে বলটির ভরবেগ

$$=mv=1\times12=12 \text{ lb ft/s}$$

ধরি, সংঘাতের পর বলটির গতিবেগ v_1 ft/s এবং ব্লকটির গতিবেগ v_2 ft/s। তাহা হইলে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র হইতে লেখা যায়,

$$mv=mv_1+Mv_2$$

এখানে, M=ব্লকটির ভর = 5 lb

সুতরাং, $1 \times v = 1 \times v_1 + 5v_2$ বা, $v = v_1 + 5v_2$ ... (ii)

গতিশক্তির সংরক্ষণ সূত্র হইতে পাই, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2$

বা, $v^2 = v_1^2 + 5\,v_2^2$ ... (iii)

সমীকরণ (i) হইতে v-এর মান বসাইয়া সমীকরণ (ii) এবং (iii) হইতে পাই,

$12 = v_1 + 5v_2$ ... (iv)

এবং $144 = v_1^2 + 5\,v_2^2$ ... (v)

(iv) এবং (v) সমাধান করিয়া পাই,

$v_1 = -8$ ft/s এবং $v_2 = 4$ ft/s

(এখানে, সংঘাতের পূর্বে বলের গতিবেগের যে-অভিমুখ ছিল সেই অভিমুখের গতিবেগকে ধনাত্মক ধরা হইয়াছে।)

উদাহরণ 8.25 5 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা প্রারম্ভিক অবস্থায় 10 cm/s গতিবেগে একটি সরলরেখা বরাবর চলিতেছে এবং ইহার পর বস্তুটির উপর উহার গতির প্রারম্ভিক অভিমুখের সহিত 45° কোণে $10\sqrt{2}$ dyn বল প্রয়োগ করা হইল। প্রথম সেকেণ্ডে বস্তুটির গতিশক্তির পরিবর্তন নির্ণয় কর।

[A particle of mass 5 g is initially moving along a straight line with a velocity of 10 cm/s and then a force of $10\sqrt{2}$ dyn is applied to it at an angle of 45° to the initial direction of motion. Calculate the change in its kinetic energy during the first second.]

সমাধান : মনে করি, বস্তুকণাটি প্রথমে OP অভিমুখে 10 cm/s গতিবেগে চলিতেছে (চিত্র 8.5)। এই সময় বস্তুকণার গতিশক্তি

$E_0 = \frac{1}{2} \times m \times u_x^2$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 10^2 = 250$ erg ... (i)

চিত্র 8.5

বস্তুকণার উপর OQ অভিমুখে $10\sqrt{2}$ dyn বল প্রয়োগ করা হইল। OX অভিমুখে ইহার উপাংশ,

$$F_x = 10\sqrt{2}\cos 45° = 10 \text{ dyn}$$

কাজেই, বস্তুটির ত্বরণের x-উপাংশ,

$$f_x = \frac{F_x}{m} = \frac{10}{5} = 2 \text{ cm/s}^2$$

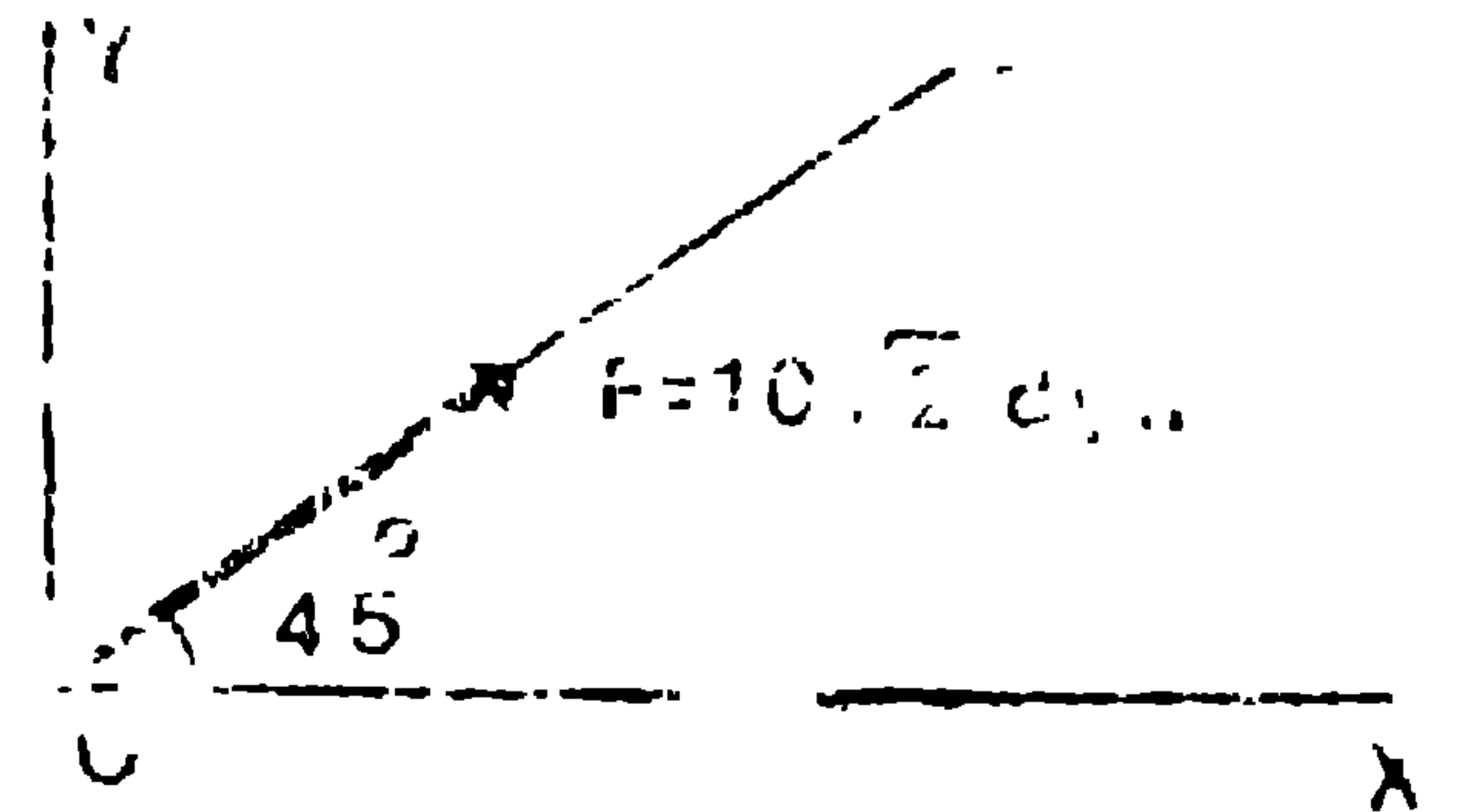
1 s সময় পরে বস্তুকণার গতিবেগের x-উপাংশ

$$v_x = u_x + f_x \times 1 = 10 + 2 \times 1 = 12 \text{ cm/s}$$

বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল বলের y-উপাংশ, $F_y = 10\sqrt{2}\sin 45° = 10$ dyn

কাজেই, বস্তুকণার ত্বরণের y-উপাংশ, $f_y = \frac{10}{5} = 2$ cm/s^2

1 s পর বস্তুকণার গতিবেগের y-উপাংশ,

$$v_y = 0 + f_y \times 1 = 0 + 2 \times 1 = 2 \text{ cm/s}$$

সুতরাং, 1 s পর বস্তুকণার গতিশক্তি, $E=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)$

$=\frac{1}{2}\times5\times(12^2+2^2)=5\times74=370$ erg ... (ii)

কাজেই, 1 s সময়ে বস্তুকণার গতিবেগের পরিবর্তন $=E-E_0$

$=370-250$ [সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে]

$=120$ erg

উদাহরণ 8.26 10 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু যতক্ষণ না 10 m উচ্চতা পর্যন্ত উঠে ততক্ষণ ধরিয়া উহার উপর একটি উধ্বর্মুখী বল F = 196 newtons প্রয়োগ করা হইল।

F বল-কর্তৃক কৃত কার্য এবং অভিকর্ষের বিরুদ্ধে কৃত কার্যের মান নির্ণয় কর। F বল-কর্তৃক কৃত কার্য বস্তুর অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তির বৃদ্ধির মান অপেক্ষা বেশি। হিসাব করিয়া সুস্পষ্টভাবে দেখাও যে, এখানে শক্তির সংরক্ষণ সূত্রটি লঙ্ঘিত হইতেছে না।

[An upward force F = 196 newtons is applied upon a body of 10 kg till it is raised vertically upwards by a distance of 10 m. Calculate the work done by F and the work done against gravity. Here the work done by F is much greater than the gain in gravitational potential energy. Show using clear calculations that the law of Conservation of Energy is quantitatively satisfied here.]

সমাধান : উধ্বর্মুখে F বল-কর্তৃক কৃত কার্য = F × উধ্বর্াভিমুখে বস্তুর সরণ (h)

$=196\times10=1960$ joules ... (i)

অভিকর্ষ বল-কর্তৃক কৃত কার্য $=mg\times h$

এখানে, m=বস্তুর ভর = 10 kg, $g=9\cdot8$ m/s^2, $h=10$ m

∴ অভিকর্ষ বল-কর্তৃক কৃত কার্য, $V=10\times9\cdot8\times10$

$=980$ joules ... (ii)

ইহাই বস্তুটির স্থিতিশক্তির বৃদ্ধি। (i) এবং (ii) তুলনা করিয়া দেখা যাইতেছে যে, এক্ষেত্রে উধ্বর্মুখী বল F-কর্তৃক কৃত কার্য অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তির বৃদ্ধি অপেক্ষা বেশি ; ইহা আপাত-দৃষ্টিতে শক্তির সংরক্ষণ সূত্রের বিরোধী হইলেও প্রকৃতপক্ষে তাহা নহে, কেননা এক্ষেত্রে কেবলমাত্র স্থিতিশক্তিই নয়, F বলের প্রভাবে বস্তুটিতে গতিশক্তিও সঞ্চারিত হইবে। দেখান যায় যে, F বল-কর্তৃক কৃত কার্য বস্তুটির স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তির বৃদ্ধির সমান। নিম্নে তাহাই দেখান হইয়াছে।

বস্তুটির উপর উধ্বর্মুখী অসম বল, $P=F-mg=196-10\times9\cdot8$

$=98$ newtons

∴ উধ্বর্মুখী ত্বরণ, $f=\frac{P}{m}=\frac{98}{10}=9\cdot8$ m/s^2

এই ত্বরণের ফলে বস্তুটির গতিবেগ ধীরে ধীরে বাড়িতে থাকিবে। h উচ্চতা উঠিয়া বস্তুটির গতিবেগ v হইলে লেখা যায়, $v^2=2fh$

কাজেই, 10 m ঊর্ধ্বে বস্তুটির গতিশক্তি,

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times m\times 2\,fh=mfh$$
$$=10\times 9{\cdot}8\times 10=980 \text{ joules} \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

কাজেই, দেখা যাইতেছে যে,

বস্তুটির স্থিতিশক্তির বৃদ্ধি+গতিশক্তির বৃদ্ধি=980+980
=1960 জুল = F কর্তৃক কৃত কার্য

কাজেই, এক্ষেত্রে শক্তির সংরক্ষণ সূত্রটি লঙ্ঘিত হইতেছে না।

উদাহরণ 8.27 একটি মোটরগাড়ি u গতিবেগে অনুভূমিক রাস্তা দিয়া যাইতেছে। এই সময় গাড়ির ইঞ্জিন বন্ধ করিয়া দেওয়া হইল। যদি ইঞ্জিনের গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল বাধা মোটরগাড়ির ওজনের 5% হয় তাহা হইলে থামিবার পূর্বে গাড়িটি কতদূর যাইবে?

[A motor car is moving along a horizontal road with a velocity of u. At this moment, the engine of the motor car is shut off. If the resistance against the motion of the car is 5% of the weight of the car, how far will the car move before it comes to rest ?]

সমাধান : গাড়িটির ভর$=m$

ইহার গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল বিরুদ্ধ বল, $F=\frac{5}{100}\times mg$

এখানে. g=অভিকর্ষজ ত্বরণ

থামিবার পূর্বে গাড়িটি s দূরত্ব অতিক্রম করিলে F বলের বিরুদ্ধে কৃত কার্য

$$F\times s=\frac{5}{100}\times mg\times s$$

ইহা বস্তুটির প্রারম্ভিক গতিশক্তির সমান বলিয়া লেখা যায়,

$$\frac{1}{2}mu^2=\frac{5}{100}\times mg\times s \quad \text{বা,} \quad s=\frac{10u^2}{g}$$

উদাহরণ 8.28 6 স্টোন $6\frac{3}{4}$ পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বালক 14 বার 6 ইঞ্চি উচ্চতা লাফায়। দেখাও যে, ইহাতে যে-শক্তি ব্যয়িত হইল তাহা $13\frac{1}{2}$ স্টোন ভরবিশিষ্ট এবং ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে ধাবমান একটি চোরকে থামাইবার পক্ষে যথেষ্ট (অভিকর্ষজ ত্বরণ=32 ft/s²)।

[A boy weighing 6 stones $6\frac{3}{4}$ pounds skips 6 inches high fourteen times. Show that the energy thus spent is sufficient to stop a thief weighing $13\frac{1}{2}$ stones running at the rate of 10 miles an hour. (The acceleration due to gravity = 32 ft/s²)]

সমাধান : বালকটির ভর, $m=6$ স্টোন $6\frac{3}{4}$ পাউণ্ড$=\frac{363}{4}$ পাউণ্ড

বালকটি এক বার 6 ইঞ্চি লাফাইলে মোট ব্যয়িত শক্তি$=mgh$

$$=\frac{363}{4}\times 32\times\frac{1}{2}\text{ ft-poundals}$$

কাজেই, 14 বার লাফাইলে মোট ব্যয়িত শক্তি $=\frac{363}{4}\times 32\times\frac{1}{2}\times 14$

$$=20328\text{ ft-poundals} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

চোরটির ভর = $13\frac{1}{2}$ স্টোন = 189 পাউণ্ড
চোরের গতিবেগ, $v = 10$ মাইল/ঘণ্টা $= \frac{44}{3}$ ft/s
সুতরাং, চোরটিকে থামাইতে প্রয়োজনীয় শক্তির পরিমাণ

$$= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 189 \times (\frac{44}{3})^2 = 20328 \text{ ft-poundals} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে দেখা যাইতেছে যে, বালকটি 14 বার লাফাইতে যে-শক্তি ব্যয় করে তাহা চোরটিকে থামাইবার পক্ষে যথেষ্ট।

উদাহরণ 8.29 250 N ওজনবিশিষ্ট একটি ব্লককে সম-গতিবেগে একটি অনুভূমিক তলের উপর দিয়া 10 m দূরত্ব টানা হইতেছে। চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক 0·20 হইলে এবং প্রযুক্ত বল উল্লম্ব রেখার সহিত 45° কোণে আনত থাকিলে প্রযুক্ত বল-কর্তৃক কৃত কার্যের পরিমাণ কত হইবে ?

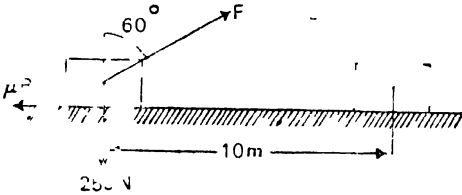
[A block of weight of 250 N is pulled 10 m along horizontal surface at constant velocity. Calculate the work done by the pulling force if the coefficient of kinetic friction is 0·20 and the pulling force makes an angle of 45° with the vertical.]

সমাধান : মনে করি, ব্লকটির উপর প্রযুক্ত বল = F N

এই বলের অনুভূমিক উপাংশ $= F \sin 60° = F \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ N

ব্লকটি সমগতিবেগে চলিতেছে বলিয়া ইহার উপর ক্রিয়াশীল অসম বলের মান শূন্য। সুতরাং, প্রযুক্ত বলের অনুভূমিক উপাংশ ব্লকের গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ-বলের সমান হইবে (চিত্র 8.6)।

চিত্র 8.6

ঘর্ষণ-বল $= \mu \times R$, μ = চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক এবং R = লম্ব-প্রতিক্রিয়া।

লম্ব প্রতিক্রিয়া, $R = W - F \cos 60°$

W = বস্তুর ওজন

$\therefore \quad R = (250 - F \times \frac{1}{2})$ N

ঘর্ষণ-বল এবং প্রযুক্ত বলের অনুভূমিক উপাংশ পরস্পর সমান বলিয়া লেখা যায়,

$$F \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \mu[250 - F \times \frac{1}{2}]$$

বা, $$F \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{\cdot}20[250 - F \times \frac{1}{2}]$$

বা, $$F \times [\frac{\sqrt{3}}{2} + 0{\cdot}10] = 0{\cdot}20 \times 250$$

বা, $$F = \frac{50}{0{\cdot}867 + 0{\cdot}1} = \frac{50}{0{\cdot}967} = 51{\cdot}71 \text{ N}$$

প্রযুক্ত বল-কর্তৃক ব্লকের উপর ক্রিয়াশীল কার্য $= F \sin 60^\circ \times 10$ J

$$= 51{\cdot}71 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 \text{ J} = 447{\cdot}8 \text{ J}$$

উদাহরণ 8.30 100 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণাকে 100 cm দীর্ঘ একটি সূতায় বাঁধিয়া উল্লম্ব তলে দোলান হইতেছে। উল্লম্ব রেখার সহিত সূতাটি যখন $\theta=60^\circ$ কোণে আনত, তখন বস্তুটির দ্রুতি 200 cm/s। যখন $\theta=60^\circ$, তখন সূতার টান এবং যখন বস্তুকণাটি উহার গতিপথের সর্বনিম্ন অবস্থানে আসে তখন ইহার দ্রুতি নির্ণয় কর।

[A particle of mass 100 g is suspended from the end of a light string 100 cm long and is allowed to swing in a vertical plane. The speed of the particle is 200 cm/s when the string makes an angle $\theta=60^\circ$ with the vertical. Find the tension in the string at $\theta=60^\circ$ and the speed of the particle at the lowest position of its path.] (I. I. T. Adm. Test, 1971)

সমাধান ঃ মনে করি, যখন সূতাটি উল্লম্ব রেখার সহিত θ কোণে আছে তখন বস্তুকণার গতিবেগ $=u$

এই অবস্থায় বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল অভিকেন্দ্র বল,

$$F=\frac{mu^2}{l} \quad (\, l = \text{সূতার দৈর্ঘ্য}\,)$$

বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষজ বল = বস্তুকণার ওজন $= mg$

সুতরাং, দৈর্ঘ্য বরাবর এই বলের উপাংশ$=mg \cos\theta$

সুতরাং, এই অবস্থায় সূতার টান,

$$T=mg\cos\theta+\frac{mu^2}{l}$$

$\theta=60^\circ$ হইলে $u=200$ cm/s (চিত্র 8.7)

কাজেই, এই সময় সূতার টান, T

$$=m\left[g\cos 60+\frac{(200)^2}{100}\right]$$

এখানে $m=100$ g এবং $g=980$ cm/s^2 (ধরি)।

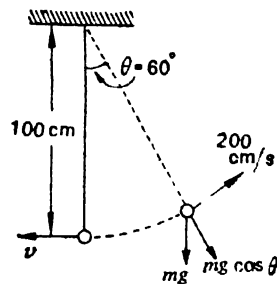
$$\therefore \quad T=100[980\times\tfrac{1}{2}+\tfrac{40000}{100}]$$

$$=89000=8{\cdot}9\times10^4 \text{ dyn}$$

চিত্র 8.7

ধরি, সর্বনিম্ন অবস্থানে বস্তুকণার গতিবেগ$=v$ cm/s

সর্বনিম্ন অবস্থানে বস্তুকণার গতিশক্তি = পূর্বাবস্থায় উহার গতিশক্তি + পূর্বাবস্থায় ইহার অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}mu^2\times mg(l-l\cos\theta)$$

বা, $v^2=u^2+2mgl\ (1-\cos\theta)$

এখন, $\theta=60°$ হইলে $u=200$ cm/s

$v^2=200^2+2\times 980\times 100(1-\frac{1}{2})=40000+98000=138000\ (\text{cm/s})^2$

সুতরাং, $v=371{\cdot}48$ cm/s

উদাহরণ 8.31 অনুভূমিক রেখা বরাবর 100 m/s গতিবেগে ধাবমান 20 g ভরবিশিষ্ট একটি বুলেট 1 m লম্বা উল্লম্ব তার হইতে ঝুলন্ত 1 kg ভরবিশিষ্ট একটি কাঠের ব্লকে প্রবিষ্ট হইল। উল্লম্ব রেখার সহিত তারটির সর্বোচ্চ নতি কত হইবে নির্ণয় কর। (ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g=9{\cdot}8$ m/s^2 এবং $\cos 37°=0{\cdot}8038$)

[A bullet of mass 20 g travelling horizontally at 100 m/s embeds itself in the centre of a block of mass 1 kg which is suspended by light vertical string 1 m in length. Calculate the maximum inclination of the strings to the vertical. (Take $g=9{\cdot}8$ m/s^2 and $\cos 37°=0{\cdot}8038$).]

সমাধান : মনে করি, বুলেটটি যখন কাঠের ব্লকটিতে প্রবিষ্ট হয় তখন ব্লক এবং বুলেটের দ্বারা উৎপন্ন যুগ্ম-ভরের গতিবেগ$=V$

বুলেটের গতিবেগ v হইলে, ভরবেগের নিত্যতা সূত্র হইতে লিখিতে পারি,

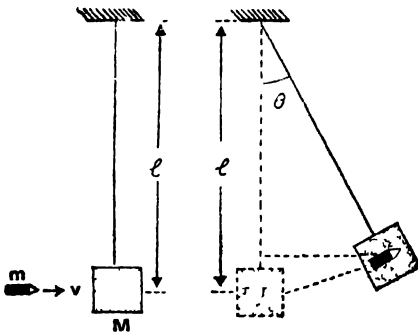
$$mv=(M+m)V$$

এখানে, $m=$বুলেটের ভর এবং $M=$কাঠের ব্লকের ভর ... (i)

$$\therefore\quad V=\frac{m}{M+m}v=\frac{20}{1000+20}\times 100\ \text{m/s}$$

$$=\frac{20}{1020}\times 100\times 100\ \text{cm/s}=\frac{10^4}{51}\ \text{cm/s}$$

কাজেই, বুলেট-ব্লক-যুগ্মে সঞ্চারিত গতিশক্তি$=\frac{1}{2}(M+m)V^2$

$$=\frac{1}{2}\times(1000+20)\times\left(\frac{10^4}{51}\right)^2=\frac{10^9}{51}\ \text{erg} \quad\cdots\quad \text{(ii)}$$

চিত্র 8.8

এই গতিশক্তির প্রভাবে সূতা হইতে ঝুলান বুলেট-ব্লক-যুগ্মটি দুলিতে থাকিবে। সর্বোচ্চ অবস্থানে উক্ত যুগ্মের ভর, উহাতে সঞ্চারিত গতিশক্তির [সমীকরণ (i) কর্তৃক প্রকাশিত] সমান। মনে করি, এই অবস্থায় সূতাটি উল্লম্ব রেখার সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে (চিত্র 8.8)।

কাজেই, বুলেট ও ব্লকের সংঘাতের অব্যবহিত পরে বুলেট-ব্লক-যুগ্মের গতিশক্তি=সর্বোচ্চ অবস্থানে স্থিতিশক্তি$=(M+m)\,gl\,(1-\cos\theta)$ (iii)

কেননা, প্রাথমিক ও অন্তিম অবস্থানের উচ্চতার অন্তর $= l\ (1-\cos\theta)$

$\therefore$ (ii) এবং (iii) হইতে পাই,

$$(M+m)gl\ (1-\cos\theta)=\frac{10^9}{51}$$

বা, $$(1000+20)\times 980\times 100\times(1-\cos\theta)=\frac{10^9}{51}$$

বা, $$(1-\cos\theta)=\frac{10^9}{51\times 1020\times 980\times 100}=0{\cdot}1962$$

বা, $\cos\theta=1-0{\cdot}1962=0{\cdot}8038$

$\therefore\ \theta=\cos^{-1}(0{\cdot}8038)=37^\circ$

উদাহরণ 8.32 একটি হাল্কা এবং একটি ভারী বস্তুর ভরবেগ সমান। উহাদের মধ্যে কোন্‌টির গতিশক্তি বেশি হইবে স্থির কর।

[A light and a heavy body possess equal momentum. Determine which one possesses larger kinetic energy.]

সমাধান : মনে করি, হাল্কা বস্তুটির ভর ও গতিবেগ যথাক্রমে m ও v এবং ভারী বস্তুটির ভর ও গতিবেগ যথাক্রমে M ও V।

শর্তানুসারে, ইহাদের ভরবেগ সমান। কাজেই, $mv=MV$

বা, $$V=\frac{m}{M}v \qquad \cdots \qquad (i)$$

এখন, হাল্কা বস্তুটির গতিশক্তি $=\frac{1}{2}mv^2$ এবং ভারী বস্তুটির গতিশক্তি $=\frac{1}{2}MV^2$

সমীকরণ (i) হইতে লেখা যায়,

$$\tfrac{1}{2}MV^2=\tfrac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v\right)^2=\tfrac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}v^2$$

বা, $$\tfrac{1}{2}MV^2=\tfrac{1}{2}.mv^2.\frac{m}{M}$$

কিন্তু, $M>m$ বা, $\frac{m}{M}<1$

কাজেই, $\frac{1}{2}mv^2>\frac{1}{2}MV^2$

অর্থাৎ, হাল্কা বস্তুর গতিশক্তি > ভারী বস্তুর গতিশক্তি

উদাহরণ 8.33 প্রতি মিনিটে 450 লিটার জলকে 10 m উল্লম্ব উচ্চতা তুলিয়া 4 cm ব্যাসের ছিদ্রপথ দিয়া উৎক্ষেপ করিতে হইলে কত ক্ষমতা প্রয়োজন নির্ণয় কর। (অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g=9{\cdot}8\ m/s^2$)

[Calculate the power required to raise 450 litres of water per minute through a vertical height of 10 m and then to deliver it through a nozzle of diameter 4 cm. (The acceleration due to gravity $=9{\cdot}8\ m/s^2$) (Cambridge University)

সমাধান : 450 লিটার জলের ভর $=450$ kg

প্রতি সেকেণ্ডে যে-পরিমাণ জল তোলা হয় তাহার ভর, m

$$=\frac{450}{60}=7{\cdot}5 \text{ kg/s}$$

প্রতি সেকেণ্ডে জলের অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তির বৃদ্ধি$=m\times g\times h$

$$=7{\cdot}5\times 9{\cdot}8\times 10 \text{ J/s}=735 \text{ J/s} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

এই জলকে 4 cm ব্যাসবিশিষ্ট ছিদ্র দিয়া উৎক্ষেপ করা হইতেছে। জলের গতিবেগ v cm/s হইলে লেখা যায়,

প্রতি সেকেণ্ডে উৎক্ষিপ্ত জলের আয়তন$=v\times\pi\times(\frac{4}{2})^2$ cm^3/s ··· (ii)

প্রশ্নের শর্তানুসারে প্রতি সেকেণ্ডে উৎক্ষিপ্ত জলের আয়তন

$$=7500 \text{ cm}^3 \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

সমীকরণ (ii) এবং (iii) হইতে পাই, $7500=v\times\pi\times 4$

বা, $v=\frac{7500}{4\pi}=596{\cdot}8$ cm/s বা, $v=5{\cdot}97$ m/s (প্রায়)

প্রতি সেকেণ্ডে জলের গতিশক্তির বৃদ্ধি$=\frac{1}{2}mv^2$

$$=\frac{1}{2}\times 7{\cdot}5\times(5{\cdot}97)^2=133{\cdot}65 \text{ J/s} \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

কাজেই, প্রয়োজনীয় ক্ষমতা, P

=প্রতি সেকেণ্ডে জলের স্থিতিশক্তির বৃদ্ধি+প্রতি সেকেণ্ডে জলের গতিশক্তির বৃদ্ধি

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $P=735+133{\cdot}65$

$$=868{\cdot}95 \text{ J/s}=868{\cdot}65 \text{ W}$$

প্রশ্নমালা ৪

1. 0·5 kg ভরবিশিষ্ট কোন বস্তুকে 10 m উঁচুতে তুলিতে কী পরিমাণ কার্য করিতে হয়? ধরিয়া লও, অভিকর্ষজ ত্বরণ$=9{\cdot}8$ m/s^2।

[How much work is done in raising mass of 0·5 kg to a height of 10 m? Assume that the acceleration due to gravity = 9 8 m/s^2] [49 J]

2. একটি ইঞ্জিন প্রতি মিনিটে 6600 lb জলকে 48 ft/s বেগে উৎক্ষেপ করে। ইঞ্জিনটির অশ্ব-ক্ষমতা নির্ণয় কর।

[An engine ejects 6600 lb of water per minute with a velocity of 48 ft/s. Find the horse power of the engine.] [7·2 H. P.]

3. পৃথিবীপৃষ্ঠ হইতে এক মাইল ঊর্ধ্বে কিছু পরিমাণ মেঘ রহিয়াছে। ঐ মেঘ বৃষ্টিরূপে নামিয়া আসিলে পৃথিবীপৃষ্ঠের দুই বর্গমাইল স্থানে 0 25 ইঞ্চি গভীরতার জল সৃষ্টি করিতে পারে। এই জলকে মেঘে পরিণত করিতে কত কার্য করিতে হইয়াছিল?

[There is some cloud at a height of 1 mile from the surface of the earth. If the cloud falls as rain, it is sufficient to cover 2 square miles with a layer of water 0·25 inch high. How much work was done in raising the water to the clouds ?]

[$3{\cdot}83\times 10^{11}$ft-lb (প্রায়)]

4. 4 H. P. ক্ষমতা প্রয়োগ করিলে একটি ক্রেন 1650 lb ভরবিশিষ্ট একটি লৌহখণ্ডকে কী দ্রুততায় উচ্চে তুলিবে ?

[How fast will a crane raise a piece of iron weighing 1650 lb if it exerts 4 H. P. ? [$1\frac{1}{3}$ ft/s]

5. একটি বাষ্পচালিত ট্রেন যখন ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে চলিতেছিল তখন ইহার বাষ্প সরবরাহ বন্ধ করিয়া দেওয়া হইল। ঘর্ষণ ইত্যাদি বাধাজনিত বল ট্রেনটির ওজনের $\frac{1}{84}$ অংশের সমান হইলে থামিবার পূর্ব পর্যন্ত ট্রেনটি কতদূর যাইবে ? ($g=32$ ft/s^2)

[The supply of steam in a locomotive was stopped when the train was moving with a speed of 10 miles/hour. If the resisting force due to friction etc is equal to $\frac{1}{84}$ th of the weight of the train, how far will the train move before it comes to rest ? ($g=32$ ft/s^2)] [484 ft]

6. কোন পাম্পের সাহায্যে প্রতি ঘণ্টায় 10,000 গ্যালন জলকে 100 ft তুলিতে হইলে পাম্পটির অশ্ব-ক্ষমতা কত হওয়া প্রয়োজন ? (1 গ্যালন জলের ভর = 10 পাউণ্ড)।

[What is the H. P. of the engine, if it is required to lift 10,000 gallons of water per hour through a height of 100 ft ? (1 gallon of water weighs 10 lb)] [5·05 H. P.]

7. একটি ট্রাক্টর 1000 lb-wt অনুভূমিক বল প্রয়োগ করিতে এবং ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে চলিতে পারে। ইহার অশ্বক্ষমতা কত ?

[A tractor can exert a horizontal force of 1000 lb-wt and can move with a speed of 4 miles/hour. Find its horse power.]

[10·67 H. P. (প্রায়)]

8. 25 g ভরবিশিষ্ট একটি বুলেট 500 m/s গতিবেগে ছুটিয়া একটি লক্ষ্যবস্তুকে আঘাত করিল এবং উহাকে বিদ্ধ করিয়া নিষ্ক্রান্ত হইবার সময় ইহার গতিবেগ হইল 100 m/s। লক্ষ্যবস্তুকে বিদ্ধ করিতে উহার কতটা শক্তি ব্যয়িত হইয়াছিল ?

[A bullet of mass 25 g travelling with a velocity of 500 m/s strikes a target which it penetrates. The velocity of emergence of the bullet is 100 m/s. What was the energy spent in passing through the target ?] [3,000 J]

9. 7 স্টোন 2 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট একটি বালিকা 9 ইঞ্চি উচ্চতা পর্যন্ত 20 বার লাফায়। ইহাতে বালিকাটির দ্বারা কৃত কার্যের মান নির্ণয় কর।

[A girl of mass 7 stones 2 pounds skips 9 inches high 20 times. Calculate the total amount of work done by her.]

[1500 ফুট-পাউণ্ড]

10. একটি 5 অশ্ব-ক্ষমতাসম্পন্ন মোটর পাম্পের সাহায্যে একটি কূপ হইতে 25 ft ঊর্ধ্বে জল তোলা হইতেছে। যদি পাম্পটির দক্ষতা 80% হয় তবে, প্রতি মিনিটে কত গ্যালন জল তোলা যাইবে ? (1 গ্যালন জলের ভর 10 lb এবং $g=32·2$ ft/s^2)।

[A 5 H. P. motor pump lifts water from a well 25 ft deep. If the efficiency of the pump is 80%, how many gallons of water can be lifted per minute ? (1 gallon of water weighs 10 lb and the acceleration due to gravity is 32·2 ft/s^2)] [528 গ্যালন]

11. 13 ft কার্যকর দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরল দোলকের পিণ্ডের ভর 5 lb। উহাকে বিলম্বন-বিন্দুগামী উল্লম্ব রেখা হইতে 5 ft দূরে টানিয়া ছাড়িয়া দেওয়া হইল। যখন পিণ্ডটি উহার সর্বনিম্ন অবস্থানের মধ্য দিয়া যায় তখন উহার গতিশক্তি কত?

[The bob of a simple pendulum of effective length 13 ft is 5 lb. It is pulled aside a distance of 5 ft from the vertical line passing through the point of suspension and then released. What is the kinetic energy of the bob when it passes through the lowest point ?] [160 ft-poundals]

12. ভূপৃষ্ঠ হইতে 20 m উচ্চ একটি স্থান হইতে 1 kg ভরের একটি বস্তুকে 2 m/s বেগে উর্ধ্বে উৎক্ষেপ করা হইল। ভূমি স্পর্শ করিবার পূর্ব মুহূর্তে বস্তুটির গতিশক্তি কত হইবে? ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g=9 \cdot 8 \text{ m/s}^2$।

[A body of mass 1 kg is thrown vertically upwards with a velocity of 2 m/s from a height of 20 m from the ground. Find the kinetic energy of the body just before it touches the ground. Assume that the acceleration due to gravity, $g=9 \cdot 8 \text{ m/s}^2$] [198 J]

13. একটি ইঞ্জিন 20 ft গড় গভীরতা হইতে প্রতি মিনিটে 5000 গ্যালন জল তুলিতেছে। যদি ইঞ্জিনের দ্বারা উৎপন্ন শক্তির 30% অপচিত হয় তবে ইঞ্জিনের ক্ষমতা কত? (1 গ্যালন জলের ভর = 10 পাউণ্ড)

[An engine lifts 5000 gallons of water per minute from an average height of 20 ft. If 30% of the energy produced is lost, what is the power of the engine ? (1 gallon of water weighs 10 lb)] [43·3 H P.]

14. 20 g ভরবিশিষ্ট একটি বুলেট কোন কাঠের তক্তার মধ্য দিয়া যাইবার ফলে বুলেটের গতিবেগ 120 m/s হইতে 60 m/s-এ নামিয়া আসিল। বুলেটটির গতিশক্তির হ্রাস নির্ণয় কর।

[The velocity of a 20 g bullet falls from 120 m/s to 60 m/s in passing through a plank of wood. What is the loss in kinetic energy ?] [108 J]

15. 120 lb ভরবিশিষ্ট এক ব্যক্তি 90 lb ভরবিশিষ্ট একটি বোঝাকে 2 মিনিটে 80 ft উচ্চতাবিশিষ্ট একটি অট্টালিকার শীর্ষে লইয়া গেল। ইহাতে ঐ ব্যক্তি কী ক্ষমতা প্রয়োগ করিল?

[A man weighing 120 lb lifts a weight of 90 lb to the top of a building 80 ft high in 2 minutes. What power does he employ ?] (0·254 H. P.)

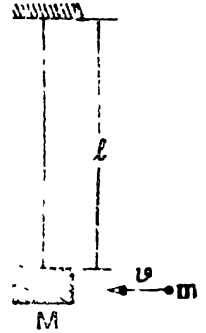
16. 1100 গ্যালন আয়তন-ধারণক্ষম এবং 100 ft উচ্চে অবস্থিত একটি ট্যাঙ্ককে 1 H. P. ক্ষমতাসম্পন্ন পাম্পের সাহায্যে জলপূর্ণ করিতে কত সময় লাগিবে? (1 গ্যালন জলের ভর = 10 lb)

[Find the time required to completely fill a tank of 1100 gallon capacity situated at a height of 100 ft by a pump of 1 H. P.] (1 gallon of water weighs 10 lb) [33 min. 20 s]

17. 6 ft ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি কূপের জল 10 ft গভীর এবং ইহার উপরি-পৃষ্ঠ ভূমি হইতে 15 ft নিচে অবস্থিত। ঐ জলকে এক ঘণ্টায় পাম্প করিয়া উপরে তুলিতে হইবে। যদি পাম্পের দক্ষতা 75% হয় তাহা হইলে এই উদ্দেশ্যে কী অশ্ব-ক্ষমতা প্রয়োজন হইবে?

[Water is 10 ft deep in a well of radius 6 ft and its surface is 15 ft below the ground level. This water is to be pumped up to the ground level in an hour. If the pump works at 75% efficiency, calculate the H. P. of the motor required for the purpose.] [0·95 H. P.]

চিত্র 8.9

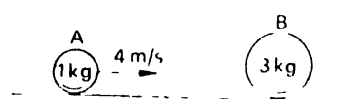
18. m ভরবিশিষ্ট একটি বুলেট l দৈর্ঘ্যের একটি সূতা হইতে ঝুলন্ত M ভরবিশিষ্ট একটি কাঠের ব্লকে আঘাত করিল এবং উহাতে প্রবিষ্ট হইয়া রহিল (চিত্র 8.9)। বুলেটের গতিবেগ v হইলে ব্লকটির কৌণিক বিস্তার কত হইবে?

[A bullet of mass m hits a wooden block of mass M which is suspended from a thread of length l and is embedded in it (Fig. 8.9). Find through what angle the block will swing if the bullet's velocity is v.]

$$\left[2 \sin^{-1}\left\{\frac{mv}{(2m+M)\sqrt{gl}}\right\}\right]$$

19. m ভরবিশিষ্ট একটি বুলেট v_0 গতিবেগে অনুভূমিক রেখা বরাবর চলিয়া একটি সূতা হইতে ঝুলন্ত M ভরবিশিষ্ট একটি কাঠের ব্লকের উপর আঘাত করিয়া উহার সহিত আটকাইয়া যায়। বুলেটের সহিত সংঘাতের পর সাম্যাবস্থান হইতে সূতার বিক্ষেপের ফলে কাঠের ব্লকটি কতটা উচ্চতা পর্যন্ত উঠিবে?

[A bullet of mass m travelling horizontally with a velocity v_0, hits a wooden block of mass M, suspended on a string and sticks to the block. To what height will the block rise after the bullet hits it, due to deviation of the string from the equilibrium position?]

$$\left[\frac{v_0^2}{2g}\cdot\frac{m^2}{(m+M)^2}\right]$$

20. 4 m/s বেগে চলমান 1 kg ভরবিশিষ্ট একটি গোলক A-এর সহিত 3 kg ভরবিশিষ্ট একটি স্থির গোলক B-এর সংঘাত ঘটিল (চিত্র 8.10)। ইহার পর A এবং B একে অন্যের সহিত লাগিয়া গেল এবং উহারা একত্রে একই বেগে চলিতে লাগিল।

চিত্র 8.10

(i) সংঘাতের পূর্বে A-এর ভরবেগ কত?
(ii) সংঘাতের পর A এবং B-এর বেগ কত?
(iii) A-এর সংঘাত-পূর্ব গতিশক্তি নির্ণয় কর।
(iv) সংঘাতের পর A এবং B-এর মোট শক্তি কত? এই শক্তি A-এর সংঘাত-পূর্ব গতিশক্তি অপেক্ষা কম কেন?

[A sphere A of mass 1 kg moving with a velocity of 4 m/s collides head-on with a stationary sphere B (Fig. 8.10). A and B then stick together and move with the same velocity. (i) What is the momentum of A before collision ? (ii) What is the velocity A and B after collision ? (iii) Calculate the kinetic energy of A before collision. (iv) What is the total energy of A and B after collision ? Why is this less than the kinetic energy of A before collision ?] [(i) 4 kg m/s, (ii) 1 m/s, (iii) 8 J, (iv) 2 J]

21. m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু সম-ত্বরণে চলিয়া T সময়ে V গতিবেগ লাভ করিল। দেখাও যে, বস্তুর উপর কৃত কার্যকে V এবং T-এর সাহায্যে এবং সময় t-এর অপেক্ষক হিসাবে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়—

$$W=\frac{1}{2}m\frac{V^2}{T^2}t^2$$

[A body of mass m accelerates uniformly from rest to speed V in time T. Show that the work done on the body as function of time in terms of V and T is $W=\frac{1}{2}m\frac{V^2}{T^2}t^2$.]

22. প্রতি মিনিটে 300 লিটার জলকে 6 m উল্লম্ব উচ্চতা তুলিয়া 2·4 cm ব্যাসের ছিদ্রপথ দিয়া উৎক্ষেপ করিতে হইলে কত ক্ষমতা প্রয়োজন নির্ণয় কর।

[Calculate the power required to raise 300 litres of water per minute through a vertical height of 6 m and then to deliver it through a nozzle of diameter 2·4 cm] [599 39 W]

23. 10 kg ভরবিশিষ্ট একটি স্থির বস্তুর উপর 4 s সময় ধরিয়া 30 N লব্ধি বল ক্রিয়া করিল। (i) বস্তু-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব, (ii) বস্তুর উপর কৃত কার্য এবং ইহার গতিশক্তি এবং (iii) বস্তুটির অন্তিম গতিবেগ নির্ণয় কর।

[A resultant force of 30 N is applied for 4 s to a body of mass 10 kg which are originally at rest. Calculate (i) the distance travelled by the body, (ii) the work done on the body and hence its kinetic energy, and (iii) the final velocity of the body.]

[(i) 24 m, (ii) 0·72 kJ, (iii) 12 m/s]

24. 10^3 kg ভরবিশিষ্ট একটি কৃত্রিম উপগ্রহ 7·0 Mm ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে পৃথিবী প্রদক্ষিণ করে। ঐ উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান, $g=8·2$ m/s². কৃত্রিম উপগ্রহটির গতিশক্তি নির্ণয় কর।

(An artificial satellite of mass 10^3 kg moves in a circular orbit of radius 7·0 Mm round the earth. At this height the acceleration due to gravity $g=8·2$ m/s². Calculate the kinetic energy of the artificial satellite.] [29 GJ]

25. 0·80 kN ওজনবিশিষ্ট এক ব্যক্তি একটি উল্লম্ব দড়ি বাহিয়া 30 s সময়ে 15 m উপরে উঠে। এই আরোহণের সময় ব্যক্তিটির গড় ক্ষমতা নির্ণয় কর।

[A man of weight 0·80 kN climbes 15 m up a vertical rope in 30 s. Calculate his average power during the climb.]

[0 40 kW]

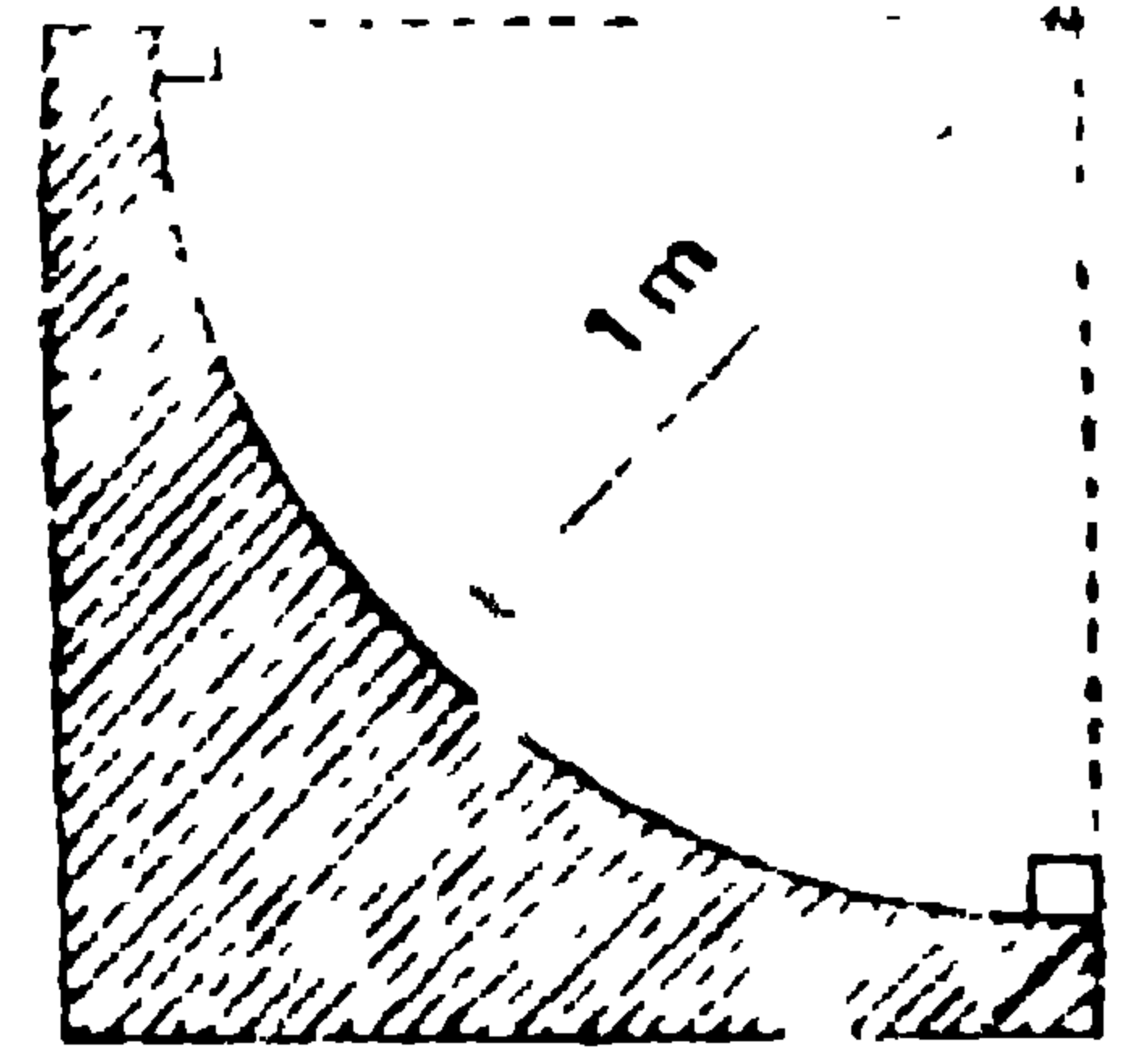
26. 0·15 kN ওজনবিশিষ্ট একটি ব্লককে সম-গতিবেগে একটি অনুভূমিক তলের উপর দিয়া 20 m দূরত্ব টানা হইতেছে। চল ঘর্ষণ-গুণাঙ্ক 0·20 হইলে এবং প্রযুক্ত বল উল্লম্ব রেখার সহিত 60° কোণে আনত থাকলে প্রযুক্ত বল-কর্তৃক কৃত কার্যের পরিমাণ নির্ণয় কর।

[A block of weight 0·15 kN is pulled 20 m along a horizontal surface at constant velocity. Calculate the work done by the pulling force if the coefficient of kinetic friction is 0·20 and the pulling force makes an angle of 60° with the vertical.]

[537·5 J]

27. একটি 5 অশ্ব-ক্ষমতাসম্পন্ন মোটর-পাম্পের সাহায্যে একটি কূপ হইতে 25 ft ঊর্ধ্বে জল তোলা হইতেছে। যদি পাম্পটির দক্ষতা 80% হয় তবে প্রতি মিনিটে কত গ্যালন জল তোলা যাইবে ? (1 গ্যালন জলের ভর 10 lb এবং $g=32·2$ ft/s²)

[Water is being raised from a well to a height of 25 ft by a 5 H. P. motor-pump. If the efficiency of the pump be 80%, how many gallons of water will be raised per minute ?] (1 gallon of water weighs 10 lb and $g=32·2$ ft/s²) (H. S. 1979) [528 gallons]

28. 0·5 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 1 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথ বাহিয়া নিচে পড়িল (চিত্র 8.11) এবং নিম্নতম অবস্থানে আসিয়া 3 m/s গতিবেগ লাভ করিল। অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 9·8 m/s² হইলে ঘর্ষণ-বলের বিরুদ্ধে কৃত কার্যের পরিমাণ কত ?

চিত্র 8.11

[A body of mass 0·5 kg slides down a circular track of radius 1 m (Fig. 8.11) and its speed at the bottom is 3 m/s. Find how much work is done against the frictional force acting on the body if the acceleration due to gravity is 9·8 m/s²]

[**সমাধানের সংকেত :** নিম্নতম অবস্থানের লেভেলকে নির্দেশতল ধরিয়া সর্বোচ্চ অবস্থানে বস্তুটির স্থিতিশক্তি নির্ণয় কর। ইহা হইতে সর্বনিম্ন অবস্থানে বস্তুটির গতিশক্তির মান বিয়োগ কর। উত্তর। 2·65 J]

29. 100 g ভরের একটি বস্তুকে 100 m উচ্চতাবিশিষ্ট একটি মিনারের উপর হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। (i) বস্তুটিকে ছাড়িয়া দিবার এক সেকেণ্ড পর এবং (ii) মিনারের তলদেশে পৌঁছিয়া বস্তুটির গতিশক্তি কত হইবে নির্ণয় কর।

[A body of mass 100 g is let loose from a tower 100 m high. Calculate the kinetic energy of the body (i) one second after release, and (ii) when at the bottom of the tower.

[4·8 J, 98 J]

30. একটি জলপ্রপাত হইতে প্রতি সেকেণ্ডে 10^8 ঘনফুট জল 200 ft নিচে পড়িতেছে। জলের শক্তির শতকরা 75 ভাগ রূপান্তরিত করিতে পারিলে কী ক্ষমতা (power) উৎপন্ন হইবে ? ধরিয়া লও যে, এক ঘনফুট জলের ভর = 62·5 lb।

[Water of volume 10^3 cubic feet falls per second from a waterfall through a vertical height of 200 ft. What power will be produced if 75% of the energy of water is converted. Assume that the mass of 1 ft^3 of water = 62·5 lb]

[$17{\cdot}04 \times 10^3$ H. P.]

31. 10 m/s দ্রুতিতে ধাবমান 2000 kg ভরবিশিষ্ট একটি যানকে উহার ব্রেকের সাহায্যে 12·5 m দূরত্বের মধ্যে স্থির অবস্থায় আনা হইল। গাড়ির উপর ক্রিয়াশীল বিরুদ্ধ বলের গড় মান নির্ণয় কর। যদি ঘর্ষণজনিত বাধা 200 N হয় তাহা হইলে যানটিকে 10 m/s স্থির বেগে $\frac{1}{10}$ নতিসম্পন্ন নততলের উপর দিয়া লইয়া যাইতে গাড়ির ইঞ্জিনকে কী ক্ষমতা উৎপন্ন করিতে হইবে ?

[A vehicle of mass 2000 kg moving at a speed of 10 m/s on a horizontal surface is brought to rest in a distance of 12·5 m by the action of its brakes. Find the average value of the resistive force acting on the vehicle. What power must the engine of the vehicle must develop in order to take the vehicle up an incline of 1 in 10 at a constant speed of 10 m/s, if the frictional resistance is 200 N ?]

[8000 N, 22 kW]

সাধারণ পদার্থবিজ্ঞান

প্রথম পরিচ্ছেদ

মহাকর্ষ

1.1 মহাকর্ষ বল ঃ m_1 এবং m_2 ভরবিশিষ্ট দুইটি বস্তুকণা পরস্পর হইতে দূরত্বে থাকিলে উহাদের মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ বল F নিম্নের সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়, $$F=G\frac{m_1m_2}{r^2} \quad \text{....} \quad (1.1)$$

এখানে, G=মহাকর্ষীয় ধ্রুবক।

1.2 অভিকর্ষজ ত্বরণ ঃ পৃথিবী উহার পৃষ্ঠে অবস্থিত বিভিন্ন বস্তু বা নিকটবর্তী বস্তুর উপর যে-আকর্ষণ বল প্রয়োগ করে তাহাকে **অভিকর্ষ** বলা হয়। নিউটনের দ্বিতীয় গতি সূত্রানুসারে কোন বস্তুর উপর বল প্রযুক্ত হইলে উহার ত্বরণ সৃষ্টি হয়। সুতরাং, পৃথিবী-কর্তৃক প্রযুক্ত অভিকর্ষ বলের প্রভাবেও বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টি হয়। অভিকর্ষ বলের ক্রিয়ায় বস্তুতে যে-ত্বরণ সৃষ্টি হয় তাহাকে অভিকর্ষজ ত্বরণ বলা হয়। ইহাকে সাধারণত g অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

ভূপৃষ্ঠের কোন স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান, $$g = G\frac{M}{R^2} \quad \text{...} \quad (1.2)$$

এখানে, M হইল পৃথিবীর ভর এবং R হইল পৃথিবীর ব্যাসার্ধ।

1.3 পৃথিবীপৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান

$$g'=G\frac{M}{(R+h)^2} \quad \text{....} \quad (1.3)$$

যদি h-এর মান R-এর তুলনায় খুব ছোট হয় ($h \ll R$) তাহা হইলে

$$g' = \left(1-\frac{2h}{R}\right)g \quad \text{....} \quad (1.4)$$

1.4 পৃথিবীর অভ্যন্তরে h গভীরতায় অবস্থিত কোন স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান $$g''=g\left(1-\frac{h}{R}\right) \quad \text{....} \quad (1.5)$$

1.5 পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য ভূপৃষ্ঠের বিভিন্ন স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান বিভিন্ন মাত্রায় প্রভাবিত হয়। λ-অক্ষাংশে অবস্থিত কোন বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ

$$g_\lambda = g\left(1-\frac{R\omega^2}{g}\cos^2\lambda\right) \quad \text{....} \quad (1.6)$$

এখানে, g হইল মেরু অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান (পৃথিবীকে সমসত্ত্ব গোলক ধরিয়া), R হইল পৃথিবীর ব্যাসার্ধ এবং ω হইল আপন অক্ষে পৃথিবীর কৌণিক বেগ।

1.6 মুক্তিবেগ ঃ যে-ন্যূনতম গতিবেগে কোন বস্তুকে ঊর্ধ্বমুখে উৎক্ষেপ করিলে বস্তুটি অভিকর্ষ ক্ষেত্রের বাহিরে চলিয়া যাইতে সক্ষম হয় তাহাকে মুক্তিবেগ বলা হয়। দেখান যায় যে, পৃথিবীর ভর M হইলে এবং ইহার ব্যাসার্ধ R হইলে মুক্তিবেগ,

$$v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad .... \quad (1.7)$$

সমীকরণ (1.2) এবং (1.7) হইতে লেখা যায়, $v_e=\sqrt{2gR}$ .... (1.8)

1.7 গ্রহ ও উপগ্রহের গতি ঃ সূর্যের চারিদিকে নির্দিষ্ট কক্ষপথে ভ্রাম্যমাণ কোন গ্রহের উপর সূর্য যে-মহাকর্ষ বল প্রয়োগ করে তাহা গ্রহের উপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বলের সমান। কাজেই, গ্রহের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ R, সূর্যের ভর M, গ্রহের ভর m এবং গ্রহের কৌণিক বেগ ω হইলে লেখা যায়,

$$G\frac{Mm}{R^2}=m\omega^2R \quad \text{বা,} \quad \frac{GM}{R^2}=\omega^2R \quad (1.9)$$

কাজেই, $GM=\omega^2R^3$

এখন, গ্রহের আবর্তনকাল T হইলে পাই,

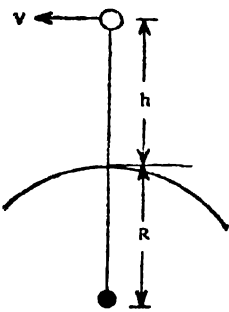
$$GM=\frac{4\pi^2}{T^2}R^3 \quad \text{বা,} \quad T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3 \quad .. \quad (1.10)$$

সূর্যের ভর M এবং মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G ধ্রুবক বলিয়া লেখা যায়,

$$T^2\propto R^3 \quad (1.11)$$

ইহা কেপলারের তৃতীয় সূত্রের গাণিতিক রূপ।

উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, সমীকরণ (1.9) এবং ইহার পরবর্তী সমীকরণগুলি উপগ্রহের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। সেক্ষেত্রে M-কে গ্রহটির ভর বলিয়া ধরিতে হইবে।

1.8 কৃত্রিম উপগ্রহ ঃ পৃথিবীপৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় একটি কৃত্রিম উপগ্রহ স্থাপন করিলে (চিত্র 1.1) উহার গতিবেগ কী হইবে নিম্নে তাহা দেওয়া হইল।

চিত্র 1.1

কৃত্রিম উপগ্রহটির উপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষ বল

$$=G\frac{Mm}{(R+h)^2} \quad .. \quad (i)$$

এখানে, m=উপগ্রহটির ভর।

কৃত্রিম উপগ্রহটির উপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বল

$$=\frac{mv^2}{(R+h)} \quad ... \quad (ii)$$

নির্দিষ্ট কক্ষপথে পরিভ্রমণ করিতে হইলে অভিকর্ষ বল এবং অপকেন্দ্র বল সমান হইবে। সুতরাং,

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2}=\frac{mv^2}{(R+h)} \quad \text{বা,} \quad v=\sqrt{\frac{GM}{(R+h)}} \quad ... \quad (1.12)$$

ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান g হইলে লেখা যায়,

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \text{বা,} \quad GM = gR^2 \qquad \dots \qquad (1.13)$$

সমীকরণ (1.12) ও (1.13) হইতে লেখা যায়,

$$v = R\sqrt{\frac{g}{(R+h)}} \qquad \dots \qquad (1.14)$$

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 1.1 নিম্নের উপাত্তগুলি হইতে পৃথিবীর ভর নির্ণয় কর :

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ m/s^2$; মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}$ এম. কে. এস. একক, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6{\cdot}38 \times 10^6\ m$।

[Calculate the mass of the earth from the following data : acceleration due to gravity, $g = 9{\cdot}8\ m/s^2$, gravitational constant, $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}$ m.k.s. unit, the radius of earth, $R = 6{\cdot}38 \times 10^6$ m.]

সমাধান : আমরা জানি, $g = \frac{GM}{R^2}$

কাজেই, $M = \frac{R^2 g}{G} = \frac{(6{\cdot}38 \times 10^6)^2 \times 9{\cdot}8}{6{\cdot}67 \times 10^{-11}} = 5{\cdot}98 \times 10^{24}$ kg

উদাহরণ 1.2 একটি কৃত্রিম উপগ্রহ 90 মিনিটে বৃত্তপথে একবার পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6370 km এবং উপগ্রহটির কক্ষপথে g-এর মান $9{\cdot}8\ m/s^2$ হইলে পৃথিবীপৃষ্ঠ হইতে উপগ্রহটির উচ্চতা কত ?

[An artificial satellite goes round the earth in 90 minutes in a circular orbit. Calculate the height of the satellite above the earth, taking the earth to be a sphere of radius 6370 km and g at the orbit of the satellite to be $9{\cdot}8\ m/s^2$.]

সমাধান : মনে করি, কৃত্রিম উপগ্রহটির ভর $= m$, ইহার বৃত্তাকার কক্ষপথের ব্যাসার্ধ r এবং উহার দ্রুতি $= v$

তাহা হইলে, উপগ্রহের উপর ক্রিয়াশীল আভিকর্ষ বল = উপগ্রহের উপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বল

বা, $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$ বা, $v^2 = \frac{GM}{r^2} r = gr$ বা, $v = \sqrt{gr}$

কৃত্রিম উপগ্রহের আবর্তন-কাল, $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{gr}} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$

শর্তানুসারে, $T = 90 \times 60$ s $\quad \therefore\ 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 90 \times 60$

বা, $r = \frac{(90 \times 60)^2 \times g}{4\pi^2} = \frac{(90 \times 60)^2 \times 9{\cdot}8}{4\pi^2} = 7245$ km

কাজেই, ভূপৃষ্ঠ হইতে কৃত্রিম উপগ্রহের কক্ষপথের উচ্চতা,

$$h = 7245 - 6370 = 875 \text{ km}$$

উদাহরণ 1.3 যে-গোলাকাকার গ্রহের আবর্তনকাল 10 ঘণ্টা এবং যাহার নিরক্ষীয় অঞ্চলে সকল বস্তু ভারশূন্য তাহার উপাদানের ঘনত্ব নির্ণয় কর।

$(G = 6{\cdot}67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2})$

[Calculate the density of the substance of a spherical planet where the daily period of rotation is 10 hours, if it is known that bodies are weightless at the equator of the planet.

$(G = 6{\cdot}67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2})$

সমাধান ঃ মনে করি, গ্রহটির ব্যাসার্ধ $= R$ cm, নির্ণেয় ঘনত্ব $= d$ g/cm³ এবং গ্রহটির ভর $= M$ g

যদি নিরক্ষীয় অঞ্চলের কোন বিন্দুর রৈখিক গতিবেগ v cm/s হয় তাহা হইলে প্রশ্নের শর্তানুসারে,

$$T = 10 \times 60 \times 60 = \frac{2\pi R}{v} \quad \therefore \quad v = \frac{2\pi R}{36{,}000} \text{ cm/s}$$

নিরক্ষীয় অঞ্চলে সকল বস্তু ভারশূন্য বলিয়া লেখা যায়, $\frac{GM}{R^2} = \frac{v^2}{R}$

$$G \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi R^3 d}{R^2} = \frac{4\pi^2 R^2}{(36000)^2 R}$$

বা, $d = \frac{\pi \times 3}{(36000)^2 \times 6{\cdot}67 \times 10^{-8}}$ g/cm³ $= 0{\cdot}11$ g/cm³

উদাহরণ 1.4 ভূপৃষ্ঠ হইতে কতটা উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান উহার ভূপৃষ্ঠের মানের এক-চতুর্থাংশ হইবে? পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= 6{\cdot}4 \times 10^3$ km।

[At what height above the surface of the earth will the acceleration due to gravity be equal to one-fourth of its value at the surface of the earth? The radius of the earth $= 6{\cdot}4 \times 10^3$ km.]

সমাধান ঃ ধরা যাক, নির্ণেয় উচ্চতা $= h$ km

ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = G\frac{M}{R^2}$ ... (i)

এখানে, $R =$ পৃথিবীর ব্যাসার্ধ

আবার, ভূপৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = G\frac{M}{(R+h)^2}$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{1}{4}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{R}{R+h}$ বা, $h = R = 6{\cdot}4 \times 10^3$ km

উদাহরণ 1.5 ভূপৃষ্ঠ হইতে 700 km উচ্চতায় একটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করিতেছে। কৃত্রিম উপগ্রহটির অনুভূমিক বেগ নির্ণয় কর। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= 6\cdot4\times10^3$ km এবং ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $= 980$ cm/s^2।

[An artificial satellite is circling round the earth at a height 700 km from its surface. Find the horizontal velocity of the satellite. Radius of the earth $=6\cdot4\times10^3$ km and the acceleration due to gravity on the earth's surface $=980$ cm/s^2.]

সমাধান : আমরা জানি যে, কৃত্রিম উপগ্রহের অনুভূমিক গতিবেগ,

$$v=R\sqrt{\frac{g}{R+h}} \quad \text{(সমীকরণ (1.14) দ্রষ্টব্য)} \qquad \text{(i)}$$

এখানে, $R=6400$ km, $h=700$ km এবং $g=980$ cm/s^2

$\therefore$ (i) নং সমীকরণ হইতে পাই, $v = 6400\times10^5\times\sqrt{\frac{980}{(6400+700)\times10^5}}$

$$=6400\times10^5\times\sqrt{\frac{980}{710\times10^6}}=6400\times10^2\times\sqrt{\frac{90}{71}} \text{ cm/s}$$

$=751906$ cm/s $= 7\cdot52$ km/s (প্রায়)

এইরূপ গাণিতিক প্রশ্নের উত্তর দিবার সময় ছাত্রছাত্রীদের পক্ষে (i) নং সমীকরণটি ধরিয়া না লইয়া প্রমাণ করিয়া লওয়াই ভাল। 1.8 নং অনুচ্ছেদে এই সমীকরণটির প্রমাণ দেওয়া হইয়াছে।

উদাহরণ 1.6 10 kg এবং 50 kg ভরবিশিষ্ট গোলকের কেন্দ্রদ্বয় যখন 30 cm দূরে অবস্থিত তখন উহাদের পারস্পরিক আকর্ষণ $\frac{1}{24}$ mg ভরবিশিষ্ট বস্তুর ওজনের সমান। যদি পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6×10^8 cm হয়, তাহা হইলে পৃথিবীর উপাদানের গড় ঘনত্ব নির্ণয় কর।

[Two spheres of masses 10 kg and 50 kg when placed with their centres 30 cm apart, attract each other with a force equal to the weight of $\frac{1}{24}$ milligram. If the radius of the earth is 6×10^8 cm, find the mean density of the earth.]

সমাধান : দুইটি গোলকের পারস্পরিক আকর্ষণ,

$$F=G\times\frac{m_1m_2}{r^2}=G\times\frac{(10\times10^3)\times(50\times10^3)}{(30)^2}$$

$$=G\times\tfrac{5}{9}\times10^6 \text{ dyn} \qquad \ldots\ \text{(i)}$$

$\frac{1}{24}$ mg ভরবিশিষ্ট বস্তুর উপর পৃথিবী যে-বল প্রয়োগ করে তাহাই ঐ বস্তুর ওজন। পৃথিবীর ভর M গ্রাম হইলে এই বস্তুর ওজন

$$W=G\frac{M\times\frac{1}{24}\times10^{-3}}{R^2}, \quad R=\text{পৃথিবীর ব্যাসার্ধ (cm)}$$

পৃথিবীর গড় ঘনত্ব ρ হইলে লেখা যায়, $M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$

$$\therefore\quad W=G\tfrac{4}{3}\pi R\rho\times\tfrac{1}{24}\times10^{-3} \text{ dyn} \qquad \ldots\ \text{(ii)}$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, F=W বলিয়া লেখা যায়,

$$G\times\frac{5}{9}\times10^6=G\times\frac{4}{3}\pi\times R\times\rho\times\frac{1}{24}\times10^{-3}$$

$$\text{বা, } \rho=\frac{5\times3\times24\times10^6}{9\times4\pi\times R\times10^{-3}}$$

কিন্তু, $R=6\times10^8$ cm

$$\therefore\ \rho=\frac{5\times3\times24\times10^6}{9\times4\pi\times6\times10^8\times10^{-3}}=5{\cdot}305\ \text{g/cm}^3$$

উদাহরণ 1.7 একটি বস্তুকে 500 km উচ্চতায় তোলা হইল। ঐ স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কত? ঐ বস্তু এবং পৃথিবীর কেন্দ্রের সংযোজী সরলরেখার সহিত লম্বভাবে কত গতিবেগে বস্তুটিকে উৎক্ষেপ করিলে উহা পৃথিবীকে বৃত্তাকারে ঘুরিবে? পৃথিবীর চতুর্দিকে বস্তুটির আবর্তনের পর্যায়কাল কত হইবে? (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ =6500 km, পৃথিবীপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ=980 cm/s²)

[A body is raised to a height of 500 km. What is the acceleration due to gravity at this point? With what velocity should this body be projected in a direction perpendicular to the line joining the centre of the earth and the body so that it describes a circle about the earth? What will be the period of revolution of the body about the earth? Radius of the earth=6500 km, acceleration due to gravity at the surface of the earth=980 cm/s²]

সমাধান: মনে করি, পৃথিবীপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান g এবং পৃথিবীপৃষ্ঠ হইতে 500 km উচ্চতায় ইহার মান g' ; কাজেই,

$$g=G.\frac{M}{R^2} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$\text{এবং } g'=G.\frac{M}{(R+h)^2} \quad \text{(ii)}$$

এখানে, G=মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, R=পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6500 km

M=পৃথিবীর ভর এবং $h=500$ km

$$\therefore\ g'=g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2=980\times\left(\frac{6500}{6500+500}\right)^2=980\times\left(\frac{65}{70}\right)^2$$

$$=845\ \text{cm/s}^2=8{\cdot}45\ \text{m/s}^2$$

মনে করি, বস্তুটিকে v গতিবেগে উৎক্ষেপ করিলে উহা একটি কৃত্রিম উপগ্রহে পরিণত হইয়া পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করিতে থাকে। তাহা হইলে ঐ অবস্থায় বস্তুটির উপর

ক্রিয়াশীল অভিকেন্দ্র বল $=\frac{mv^2}{(R+h)}$, m=বস্তুর ভর।

ইহা বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষ-বলের সমান হইবে।

$$\therefore\ mg'=\frac{mv^2}{R+h} \quad \text{বা, } v^2=g'(R+h)$$

$$\text{বা, } v=\sqrt{g'(R+h)}=\sqrt{8{\cdot}45\times7000\times10^3}$$

$$=7{\cdot}7\ \text{km/s}$$

উদাহরণ 1.8 বৃহস্পতি গ্রহের একটি উপগ্রহ 17 দিনে একটি আবর্তন পূর্ণ করে। ইহার ব্যাসার্ধ $1 \cdot 86 \times 10^6$ km। চন্দ্র 27 দিনে পৃথিবীকে একবার সম্পূর্ণভাবে ঘুরিয়া আসে। পৃথিবী হইতে চন্দ্রের দূরত্ব $3 \cdot 6 \times 10^5$ km। বৃহস্পতি ও পৃথিবীর ভর তুলনা কর।

[A satellite of Jupiter completes one revolution in 17 days, the radius of the orbit being $1 \cdot 86 \times 10^6$ km. The moon completely rounds the earth once in 27 days The distance of the moon from the earth is $3 \cdot 6 \times 10^5$ km. Compare the masses of Jupiter and the earth.

সমাধান : আমরা জানি যে, উপগ্রহের আবর্তন-কাল

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3 \text{ [সমীকরণ (1.10)]}$$

এখানে, M হইল গ্রহের ভর এবং R হইল উপগ্রহের ব্যাসার্ধ।

$$\therefore \frac{T^2 M}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G} \text{ ধ্রুবক}$$

$$\text{সুতরাং, } \frac{T_1{}^2 M_1}{R_1{}^3} = \frac{T_2{}^2 M_2}{R_2{}^3} \quad \dots \quad (1)$$

মনে করি, বৃহস্পতির ভর $= M_1$, বৃহস্পতির উপগ্রহের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ R_1 এবং ইহার আবর্তন-কাল $= T_1$

অনুরূপভাবে, পৃথিবীর ভর $= M_2$, চন্দ্রের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ $= R_2$ এবং ইহার আবর্তন-কাল T_2

সমীকরণ (1) হইতে পাই, $\frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$

এখানে, $R_1 = 1 \cdot 86 \times 10^6$ km, $R_2 = 3 \cdot 6 \times 10^5$ km,

$T_2 = 27$ days, $T_1 = 17$ days

$$\therefore \frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{1 \cdot 86 \times 10^6}{3 \cdot 6 \times 10^5}\right)^3 \times \left(\frac{27}{17}\right)^2 = \left(\frac{18 \cdot 6}{3 \cdot 6}\right)^3 \times \left(\frac{27}{17}\right)^2 = 347 \cdot 9$$

উদাহরণ 1.9 20 kg ভরবিশিষ্ট একটি গোলক উহা হইতে 20 cm দূরে অবস্থিত 30 kg ভরবিশিষ্ট অপর একটি গোলককে যে-বল দ্বারা আকর্ষণ করে তাহা এক মিলিগ্রাম ভরবিশিষ্ট বস্তুর ওজনের এক-দশমাংশ। এই উপাত্ত হইতে মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান নির্ণয় কর। (অভিকর্ষজ ত্বরণ 980 cm/s^2)।

[The force with which a sphere of mass 20 kg attracts another sphere of mass 30 kg situated at a distance of 20 cm from it is $\frac{1}{10}$th of the weight of one milligram. Find, from the above data, the value of the gravitational constant. The acceleration due to gravity $= 980 \text{ cm/s}^2$.]

সমাধান : আমরা জানি যে, $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ ... (1)

এখানে, G = মহাকর্ষীয় ধ্রুবক $m_1 = 20$ kg এবং $m_2 = 30$ kg

$\therefore\ F = \frac{G \times (20 \times 10^3) \times (30 \times 10^3)}{20^2} = G \times 1.5 \times 10^6$ dyn .... (ii)

এখন, 1 mg ভরবিশিষ্ট বস্তুর ওজন, $W = 10^{-3} \times g$

$\therefore\ g =$ অভিকর্ষজ ত্বরণ $= 980\ cm/s^2$

$\therefore\ W = 10^{-3} \times 980$ dyn .... (iii)

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $F = \frac{1}{10} \times W$

বা, $G \times 1.5 \times 10^6 = \frac{1}{10} \times 10^{-3} \times 980$ [(iii) হইতে]

বা, $G = \frac{980}{1.5} \times 10^{-10} = 6.53 \times 10^{-8}$ c.g.s. unit

উদাহরণ 1.10 কোন খনিগর্ভে অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের অনুপাত 0·9995 হইলে খনিগর্ভটির গভীরতা নির্ণয় কর। (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= 6.4 \times 10^3$ km)

[If the ratio of the acceleration due to gravity at the bottom of a mine and that at the surface of the earth is 0·9995, find the depth of the mine. (The radius of the earth $= 6.4 \times 10^3$ km)]

সমাধান : মনে করি, নির্ণেয় গভীরতা $= h$

এখন, $\frac{\text{খনিগর্ভে অভিকর্ষজ ত্বরণ } (g')}{\text{পৃথিবীপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ } (g)} = 1 - \frac{h}{R}$ [সমীকরণ (1.5)]

শর্তানুসারে, $\frac{g'}{g} = 0.9995 \quad \therefore\ 0.9995 = 1 - \frac{h}{R}$

বা, $\frac{h}{R} = 1 - 0.9995 = 0.0005$ বা, $h = 3.2$ km

উদাহরণ 1.11 20 cm এবং 2 cm ব্যাসবিশিষ্ট দুইটি সীসার বলকে পরস্পর হইতে 100 cm দূরত্বে রাখা হইল। নিম্নের উপাত্তগুলি হইতে উক্ত সীসার বলদ্বয়ের পারস্পরিক আকর্ষণ নির্ণয় কর : পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= 6.37 \times 10^8$ cm, পৃথিবীর উপাদানের গড় ঘনত্ব $= 5.53\ g/cm^3$, ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $= 980\ cm/s^2$ এবং সীসার আপেক্ষিক গুরুত্ব $= 11.5$।

[Two lead balls of diameters 20 cm and 2 cm are placed 100 cm apart. Find the force of attraction between them from the following data : The radius of the earth $= 6.37 \times 10^8$ cm, the mean density of earth's elements $= 5.53\ g/cm^3$, the acceleration due to gravity on the surface of the earth $= 980\ cm/s^2$ and the specific gravity of lead $= 11.5$.]

সমাধান : দুইটি সীসার বলের পারস্পরিক আকর্ষণ,

$$F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2} \quad \text{... (i)}$$

এখানে $m_1 =$ প্রথম বলের ভর $= \frac{4}{3}\pi \times 10^3 \times 11.5$ g

$m_2 =$ দ্বিতীয় বলটির ভর $= \frac{4}{3}\pi \times 11.5$ g

$r = 100$ cm

আবার, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2}$

(এখানে, ρ = পৃথিবীর উপাদানের ঘনত্ব)

বা, $g = G\frac{4}{3}\pi R\rho$

সুতরাং $G = \frac{3g}{4\pi R\rho} = \frac{3 \times 980}{4 \times \pi \times 6.37 \times 10^8 \times 5.53}$

$= 6.64 \times 10^{-8}$ c.g.s. units

$\therefore \quad F = G.\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6.64 \times 10^{-8} \times \frac{(\frac{4}{3}\pi \times 1000 \times 11.5) \times (\frac{4}{3}\pi \times 11.5)}{100^2}$ dyn

$= 15.4 \times 10^{-6}$ dyn

উদাহরণ 1.12 পৃথিবী যদি 6.4×10^6 m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট সীসার নিরেট গোলক হইত তাহা হইলে পৃথিবীপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কত হইত? ধরিয়া লও যে, মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = 6.66 \times 10^{-8}$ সি. জি. এস. একক এবং সীসার আপেক্ষিক গুরুত্ব $= 11.5$।

[If the earth were a solid sphere of lead of radius 6.4×10^6 m, what will be the acceleration due to gravity of the surface of the earth. Assume that the gravitational constant, $G = 6.66 \times 10^{-8}$ c.g.s. unit and the specific gravity of lead $= 11.5$]

সমাধান : আমরা জানি যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = G\frac{M}{R^2}$ (i)

এখন, পৃথিবীর ভর, $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ ... (ii)

এখানে, R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= 6.4 \times 10^6$ m

ρ = পৃথিবীর উপাদানের কল্পিত ঘনত্ব = সীসার ঘনত্ব

$= 11.5$ g/cm^3

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$g = G\frac{4}{3}\pi R\rho = 6.66 \times 10^{-8} \times \frac{4}{3}\pi \times 6.4 \times 10^8 \times 11.5$

$= 2053.24$ cm/s^2

উদাহরণ 1.13 একটি বস্তুকণা 1 km ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি লৌহ-গোলকের পৃষ্ঠতলের ঠিক উপর দিয়া ঐ গোলকের কেন্দ্রগামী তলে পারস্পারিক মহাকর্ষ বলের প্রভাবে ঘুরিতেছে। বস্তুকণাটির আবর্তন-কাল নির্ণয় কর। (লোহার আপেক্ষিক গুরুত্ব 9.6 এবং $G = 6.66 \times 10^{-8}$ সি. জি. এস. একক।

[A particle revolves just beyond the surface of an iron sphere of diameter 1 km in a plane containing the centre of the sphere under the influence of their mutual gravitational attraction. Calculate the period of revolution of the particle. (Specific gravity of iron is 9.6 and $G = 6.66 \times 10^{-8}$ c.g.s. units)]

সমাধান : মনে করি, কণাটির ভর $= m$; লৌহ-গোলকটির ভর $= M$

কণার কক্ষপথের ব্যাসার্ধ = লৌহ-গোলকের ব্যাসার্ধ $= R$

এবং কণার কৌণিক গতিবেগ $= \omega$

এখন, বস্তুকণার উপর গোলক-কর্তৃক প্রযুক্ত মহাকর্ষ বল=উপগ্রহের উপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বল

$$\therefore \quad \frac{GMm}{R^2}=m\omega^2R \quad \text{বা,} \quad GM=\omega^2R^3 \quad \ldots \quad (i)$$

কিন্তু, $M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$, ρ=গোলকের উপাদানের ঘনত্ব

$$\therefore \quad G\times\frac{4}{3}\pi R^3\rho=\omega^2R^3 \quad \text{বা,} \quad \omega^2=\frac{4}{3}G\pi\rho \quad \ldots \quad (ii)$$

বস্তুকণার আবর্তন কাল T হইলে লেখা যায় যে, $\omega=\frac{2\pi}{T}$

কাজেই, সমীকরণ (ii) হইতে পাই,

$$\frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{4}{3}\pi G\rho \quad \text{বা,} \quad T=\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

এখন, $G=6{\cdot}66\times10^{-8}$ সি. জি. এস একক এবং $\rho=9{\cdot}6$ g/cm^3

$$\therefore \quad T=\sqrt{\frac{3\times\pi}{6{\cdot}66\times10^{-8}\times9{\cdot}6}}=3{\cdot}8\times10^3 \text{ s}$$

● লক্ষণীয় যে, এক্ষেত্রে আবর্তন-কাল গোলকটির ব্যাসার্ধের উপর নির্ভরশীল নয়, ইহা কেবলমাত্র গোলকটির উপাদানের ঘনত্বের উপর নির্ভরশীল। কাজেই, গোলকের ভর বা ব্যাসার্ধ যাহাই হউক না কেন, ঘনত্ব অপরিবর্তিত থাকিলে বস্তুকণার আবর্তন-কাল সর্বদাই এক হইবে।

উদাহরণ 1.14 পৃথিবীর চতুর্দিকে চন্দ্রের আবর্তন-কাল 27 দিন 8 ঘণ্টা এবং ইহার কক্ষপথের ব্যাসার্ধ পৃথিবীর ব্যাসার্ধের 60·1 গুণ ধরিয়া লইয়া চন্দ্রের গতি হইতে পৃথিবীপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর। (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ$=6{\cdot}36\times10^6$ m)

[Obtain the value of the acceleration due to gravity on the surface of the earth from the motion of the moon assuming that its period of rotation round the earth is 27 days 8 hours and the radius of its orbit is 60·1 times the radius of the earth. (Radius of the earth$=6{\cdot}36\times10^6$ m)]

সমাধান : কেপলারের তৃতীয় সূত্র হইতে আমরা জানি যে,

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3 \quad \ldots \quad (i)$$

এখানে, T=চন্দ্রের আবর্তন-কাল, G=মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, M=পৃথিবীর ভর, r=চন্দ্রের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ।

শর্তানুসারে, $r=60{\cdot}1$ R $\quad \ldots \quad$ (ii)

এখানে, R=পৃথিবীর ব্যাসার্ধ

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $T^2=\frac{4\pi^2}{GM}\cdot(60{\cdot}1)^3R^3$

$$\text{বা} \quad \frac{GM}{R^2}=\frac{4\pi^2}{T^2}(60{\cdot}1)^3.R \quad \ldots \quad (iii)$$

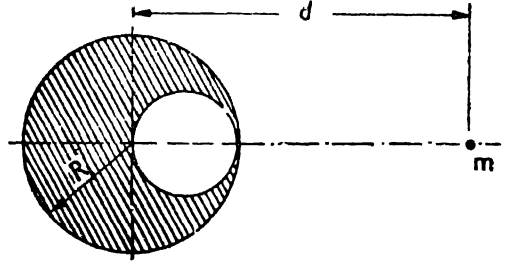
কিন্তু আমরা জানি যে, ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = \frac{GM}{R^2}$ .... (iv)

$\therefore$ (iii) এবং (iv) হইতে পাই, $g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot (60 \cdot 1)^3 . R$

এখানে, T = 27 দিন 8 ঘণ্টা = $(27 \times 24 + 8) \times 60 \times 60 = 2361600$ s

এবং $R = 6 \cdot 36 \times 10^6$ m

$\therefore \quad g = \frac{4\pi^2}{(2361600)^2} \times (60 \cdot 1)^3 \times 6 \cdot 36 \times 10^6 = 9 \cdot 77$ m/s²।

উদাহরণ 1.15 R ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সীসার গোলকের মধ্যে একটি গোলাকার ফাঁপা অংশ সৃষ্টি করা হইল। এই ফাঁপা গোলকটির পৃষ্ঠ সীসার গোলকের পৃষ্ঠকে স্পর্শ করে এবং উহার কেন্দ্রের মধ্য দিয়া যায়। ফাঁপা অংশটি সৃষ্টি করিবার পূর্বে সীসার গোলকটির ভর ছিল M। মহাকর্ষ সূত্রানুসারে, এই সীসার গোলকটি ও ফাঁপা গোলকটির কেন্দ্রের সংযোজী সরলরেখার উপর এবং সীসার গোলকের কেন্দ্র হইতে ফাঁপা অংশের দিকে *d* দূরত্বে অবস্থিত *m* ভরবিশিষ্ট একটি ক্ষুদ্র গোলকের উপর সীসার গোলকটি কী বল প্রয়োগ করিবে (চিত্র 1.2) ?

চিত্র 1.2

[A spherical cavity is made in a lead sphere of radius R such that its surface touches the outside of the lead sphere and passes through its centre. The mass of the sphere previous to hollowing was M. With what force, according to the universal law of gravitation, will the sphere attract a small sphere of mass *m* situated at a distance *d* from the centre of the lead sphere on the straight line joining the centres of the sphere and the side of the hollow (Fig 1.2) ?

সমাধান : যদি সীসার গোলকটি সম্পূর্ণ নিরেট হইত তাহা হইলে উহা ক্ষুদ্র ভর *m*-কে যে-বলে আকর্ষণ করিত উহার মান, $F = G\frac{Mm}{d^2}$ .... (i)

এখানে, G হইল মহাকর্ষীয় ধ্রুবক। এই বলটিকে দুইটি বলের লব্ধি রূপে কল্পনা করা যায়, যথা (i) যে-অংশে ফাঁপা গোলক সৃষ্টি হইয়াছে সেই অংশের আকর্ষণ-বল F_1 এবং (ii) গোলকের বাকী অংশের বল, F_2।

অর্থাৎ, $F = F_1 + F_2$ .... (ii)

এখানে, F_2-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

যে-গোলকটি ফাঁপা অংশটিকে ভরাট করে উহার ভর $M' = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 \rho$,

এখানে ρ=সীসার ঘনত্ব।

$$\therefore \quad M' = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{M}{8}$$

ইহার কেন্দ্রটি m ভরবিশিষ্ট বস্তু হইতে $\left(d - \frac{R}{2}\right)$ দূরত্বে অবস্থিত। সুতরাং,

$$F_1 = G.\frac{\frac{M}{8}.m}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}$$

সুতরাং, নির্ণেয় আকর্ষণ-বল, $F_2 = F - F_1$

$$= G\frac{M.m}{d^2} - G.\frac{\frac{M}{8}.m}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = GMm\left[\frac{7d^2 - 8dR + 2R^2}{8d^2\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}\right]$$

প্রশ্নমালা 1

1. ভূপৃষ্ঠ হইতে কত উচ্চে উঠিলে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান উহার ভূপৃষ্ঠের মানের এক-শতাংশ হইবে? পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6 38 × 10^8 cm ধরিয়া লও।

[At what height above the surface of the earth will the acceleration due to gravity be equal to $\frac{1}{100}$th of its value at the surface of the earth? Assume that the radius of the earth is equal to 6·38 × 10^8 cm.] [57 42 × 10^3 km]

2. 60 kg এবং 200·kg ভরবিশিষ্ট দুইটি গোলকের কেন্দ্রদ্বয় 3 m দূরে অবস্থিত হইলে উহাদের পারস্পরিক আকর্ষণ-বল 0 01 mg ভরবিশিষ্ট বস্তুর ওজনের সমান। যদি পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6 × 10^3 km হয়, তাহা হইলে পৃথিবীর উপাদানের গড় ঘনত্ব নির্ণয় কর।

[Two spheres of masses 60 kg and 200 kg, when placed with their centres 3 m apart, attract each other with a force equal to the weight of 0·01 milligram. If the radius of the earth is 6 × 10^3 km, find the mean density of the earth.] [5·3 g/cm^3 (প্রায়)]

3. পৃথিবী যদি 6·37 × 10^6 m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট লৌহনির্মিত নিরেট গোলক হইত তাহা হইলে পৃথিবীপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কত হইত? ধরিয়া লও যে, মহাকর্ষীয় ধ্রুবক 6·658 × 10^{-8} c.g.s. unit এবং লোহের ঘনত্ব 7·86 g/cm^3।

[If the earth were a solid sphere of iron of radius 6·37 × 10^6 m, what would be the value of acceleration due to gravity at its surface, taking the gravitational constant to be equal to 6·658 × 10^{-8} c.g.s. unit and the density of iron to be equal to 7·86 g/cm^3.]

[1396·35 cm/s^2]

4. 100 g এবং 15 g ভরবিশিষ্ট দুইটি গোলকের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব যখন 5 cm তখন উহারা পরস্পরকে 4 × 10^{-6} dyn বলে আকর্ষণ করে। G-এর মান নির্ণয় কর।

[Two spheres of masses 100 g and 15 g attract each other with a force of 4×10^{-6} dyn when centres are 5 cm apart. Find the value of G.] [$6{\cdot}67 \times 10^{-8}$ c. g. s. unit]

5. একটি গভীর খনিগর্ভে অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের অনুপাত 0·999 হইলে খনিগর্ভটির গভীরতা নির্ণয় কর। (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= 6{\cdot}38 \times 10^{3}$ km)]

[If the ratio of the acceleration due to gravity at the bottom of a deep mine and that at the surface of the earth is 0·999, find the depth of the mine. (The radius of the earth $= 6{\cdot}38 \times 10^{3}$ km)]

[6·38 km]

6. ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত এক গ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর উপর পৃথিবী 980 dyn বল প্রয়োগ করে। যদি মহাকর্ষীয় ধ্রুবক $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-8}$ c.g.s. একক হয় তাহা হইলে পৃথিবীর ভর কত? (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= 6{\cdot}4 \times 10^{8}$ cm)

[The earth exerts a force of 980 dyn on a mass of 1 g at its surface. If the gravitational constant, $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-8}$ c. g. s. unit, find the mass of the earth. (The radius of the earth $= 6{\cdot}4 \times 10^{8}$ cm)

[$6{\cdot}018 \times 10^{27}$ g]

7 ভূপৃষ্ঠ হইতে 600 km উর্ধ্বে একটি কৃত্রিম উপগ্রহ বৃত্তাকার কক্ষপথে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করিতেছে। এই উপগ্রহের বেগ এবং আবর্তন-কাল নির্ণয় কর। (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= 6{\cdot}4 \times 10^{8}$ cm)

[An artificial satellite is revolving the earth in a circular orbit at a height 600 km above the surface of the earth. Find the velocity and the period of revolution of the satellite. (The radius of the earth $= 6{\cdot}4 \times 10^{8}$ cm)] [$7{\cdot}6 \times 10^{5}$ m/s ; 96·45 minutes]

8. পৃথিবীর ভর 6×10^{27} g. উহার ব্যাসার্ধ $6{\cdot}4 \times 10^{3}$ km এবং মহাকর্ষীয় ধ্রুবক $6{\cdot}65 \times 10^{-8}$ সি. জি. এস. একক হইলে ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কত?

[If the mass of the earth is 6×10^{27} g, its radius is $6{\cdot}4 \times 10^{3}$ km and the gravitational constant is $6{\cdot}65 \times 10^{-8}$ c. g. s. unit, what is the acceleration due to gravity on the surface of the earth ?]

[974·12 cm/s^2]

9. ভূপৃষ্ঠ হইতে কতটা উচ্চতায় উঠিলে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান উহার ভূপৃষ্ঠের মানের $\frac{1}{16}$ অংশ হইবে? পৃথিবীকে 6400 কিলোমিটার ব্যাসার্ধের গোলক বলিয়া ধরিয়া লইতে পার।

[At what altitude above the surface of the earth will the acceleration due to gravity be $\frac{1}{16}$th of its value at the surface of the earth ? Assume that the earth is a sphere of radius 6400 km.]

[19200 km]

10. একটি গভীর খনির তলদেশে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান এবং ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মানের অনুপাত $\frac{979}{980}$। পৃথিবীকে 6400 km ব্যাসার্ধের সমসত্ত্ব গোলক ধরিয়া খনিটির গভীরতা নির্ণয় কর।

[The ratio of the acceleration due to gravity at the bottom of a

deep mine and that on the surface of the earth is ৯৭৯/৯৮০. Assuming that the earth is a homogeneous sphere of radius 6400 km, find the depth of the mine.] [6·53 km]

11. পৃথিবীপৃষ্ঠে কোন ব্যক্তির ওজন 160 lb-wt। পৃথিবীর ভর চন্দ্রের ভরের 81 গুণ হইলে চন্দ্রপৃষ্ঠে লোকটির ওজন কত হইবে নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ = 4000 মাইল এবং চন্দ্রের ব্যাসার্ধ = 1000 মাইল।

[The weight of a man on earth's surface is 160 lb-wt. If the mass of the earth is 81 times that of the moon, culculate the weight of the man on moon's surface. Assume that the radius of earth = 4000 miles and the radius of the moon = 1000 miles.] [31·60 lb-wt]

12. পৃথিবীর ভর চন্দ্রের ভরের 80 গুণ এবং পৃথিবীর ব্যাস চন্দ্রের ব্যাসের 4 গুণ বেশি। কোন বস্তুকে চন্দ্রপৃষ্ঠে ওজন করিলে বস্তুটির ওজন কী অনুপাতে কমিবে?

[The mass of the earth is 80 times that of the moon, while its radius is four times that of the moon. By what ratio will the weight of a body be reduced on the moon? (H. S. 1979)

[1 : 5]

13. ভূপৃষ্ঠ হইতে কত উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান উহার ভূপৃষ্ঠের মানের অর্ধেক হইবে? ধরিয়া লও যে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ = 6400 km।

[At what altitude above the surface of the earth would the value of the acceleration due to gravity half that at the surface of the earth? Assume that the radius of the earth = 6400 km.]

[2651 km (প্রায়)]

14. 10 g/cm^3 গড় ঘনত্ববিশিষ্ট একটি গ্রহের চতুর্দিকে একটি ক্ষুদ্র উপগ্রহ ঘুরিতেছে। ইহার কক্ষপথের ব্যাসার্ধ গ্রহটির ব্যাসার্ধের সামান্য বেশি। উপগ্রহটির আবর্তন-কাল নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, $G = 6·66 \times 10^{-8}$ সি. জি. এস. একক।

[A small satellite moves round a planet of mean density 10 g/cm^3. The radius of its orbit is slightly greater than that of the planet. Calculate the time of revolution of the satellite. Assume that the gravitational constant is $6·66 \times 10^{-8}$ c. g. s. unit.]

[$3·76 \times 10^3$ s (প্রায়)]

15. সূর্য হইতে প্লুটো গ্রহের গড় দূরত্ব পৃথিবী হইতে সূর্যের দূরত্ব অপেক্ষা গড়ে 40 গুণ বেশি হইলে 'বৎসর' এককে প্লুটোর আবর্তন-কাল কত হইবে?

[If the distance of the planet Pluto from the sun is on an average 40 times that of the earth from the sun, find the orbital period of Pluto in 'years'] [253 বৎসর (প্রায়)]

সমাধানের ইঙ্গিত ঃ কেপলারের তৃতীয় সূত্রানুসারে, $T^2 \propto r^3$

16. মহাকর্ষীয় ধ্রুবক $G = 6·67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9·8$ m/s^2 এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km হইলে পৃথিবীর ভর নির্ণয় কর।

[If the gravitational constant, $G = 6·67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}, the acceleration due to gravity, $g = 9·8$ m/s^2 and the radius of the earth is 6400 km, calculate the value for the mass of the earth.]

[$6·0 \times 10^{24}$ kg]

17. মঙ্গল গ্রহের দুইটি উপগ্রহ—ফোবস্ উপগ্রহটি 9700 km ব্যাসার্ধের কক্ষপথে 2.75×10^4 s আবর্তন-কাল লইয়া ঘোরে এবং ডাইমস্ উপগ্রহটির আবর্তন-কাল 1.09×10^5 s। ডাইমসের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

পৃথিবীকে 6400 km ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলক এবং উহার পৃষ্ঠে g-এর মান 9.8 m/s² ধরিয়া লইয়া মঙ্গলগ্রহের সহিত পৃথিবীর ভরের তুলনা কর।

[Mars has two satellites, Phobous, which moves in an orbit of radius 9700 km with a period of 2.75×10^4 s, and Deimos, which has a period of 1.09×10^5 s. Find the radius of the orbit of Deimos.

Compare the mass of Mars with that of the earth, assuming the earth to be a sphere of radius 6400 km with g at the surface 9.8 m/s².] (University of Cambridge) [24300 km, 0.12]

18. একটি কৃত্রিম উপগ্রহকে ভূপৃষ্ঠের 2000 মাইল উচ্চে পৃথিবীকে আবর্তন করিবার জন্য নির্মাণ করা হইল। উহার আবর্তন-কাল এবং কক্ষপথে উহার বেগ কত হইবে? পৃথিবীর ব্যাসার্ধ = 4000 মাইল এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 32$ ft/s²

[An artificial satellite is designed to revolve the earth at a height of 2000 miles. What are its time of revolution and the velocity? Radius of the earth = 4000 miles and the acceleration due to gravity, $g = 32$ ft/s²] [14473 mi/h ; 156.28 মিনিট]

19. যদি পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6.4×10^3 km এবং মহাকর্ষীয় ধ্রুবক 6.67×10^{-8} সি. জি. এস. একক হয় তাহা হইলে পৃথিবীর উপাদানের গড় ঘনত্ব কত? ($g =$ 980 cm/s²)।

[If the radius of the earth is 6.4×10^3 km and the gravitational constant is 6.67×10^{-8} c.g.s. unit, what is the mean density of the earth? $g = 980$ cm/s²] [5.49 g/cm³]

20. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6.4×10^3 km এবং পৃথিবীপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 980 cm/s² হইলে পৃথিবীর ভর নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, $G = 6.67 \times 10^{-8}$ সি. জি. এস. একক।

[If the radius of the earth is 6.4×10^3 km and the acceleration due to gravity on the surface of the earth is 980 cm/s², find the mass of the earth. Assume that $G = 6.67 \times 10^{-8}$ c.g.s. units.

[6.02×10^{24} kg]

21. একটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবীর চারিদিকে ভূপৃষ্ঠ হইতে 400 km উপরে বৃত্তাকার কক্ষপথে ঘুরিতেছে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6000 km এবং ভূপৃষ্ঠে g-এর মান 980 cm/s² হইলে উপগ্রহটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

[An artificial satellite is revolving the earth in a circular orbit at a height of 400 km above the surface of the earth. If the radius of the earth is 6000 km and the value of g on the surface of the earth is 980 cm/s² calculate the velocity of the satellite.]

22. নিরক্ষীয় কক্ষপথে চন্দ্রপৃষ্ঠ ঘেঁষিয়া চন্দ্রকে প্রদক্ষিণরত উপগ্রহের (i) দ্রুতি এবং (ii) আবর্তনকাল নির্ণয় কর। চন্দ্রের ব্যাসার্ধ 1750 km এবং চন্দ্রপৃষ্ঠে অবাধে পতনশীল বস্তুর ত্বরণ 1·6 m/s²।

[Find (i) the speed and (ii) the time of revolution of a satellite which is in equatorial abit round the Moon very close to its surface. The radius of the Moon is 1750 km and the acceleration of free fall at the surface of the Moon is 1·6 m/s².]

[**সমাধানের সঙ্কেত:** অবাধে পতনশীল বস্তুর ত্বরণ এবং অভিকেন্দ্র ত্বরণ পরস্পর সমান।] [1 67 km/s, 1·83 hours]

23. একটি ক্ষুদ্র কৃত্রিম উপগ্রহ কোন গ্রহের চতুর্দিকে আবর্তিত হইতেছে। উপগ্রহটির কক্ষপথের ব্যাসার্ধ গ্রহটির ব্যাসার্ধের সামান্য বেশি হইলে দেখাও যে, উপগ্রহটির আবর্তনকাল $T = \sqrt{3\pi/\rho G}$, এখানে G হইল মহাকর্ষীয় ধ্রুবক এবং ρ = গ্রহের উপাদানের গড় ঘনত্ব।

[A small artificial satellite is revolving round a planet. If the radius of the satellite is only slightly greater than the radius of the planet, show that the period of the revolution of the satellite is $T = \sqrt{3\pi/\rho G}$, where G is the gravitational constant and ρ is the mean density of the planet.]

24. চন্দ্র $3·8 \times 10^5$ km ব্যাসার্ধের কক্ষপথে পৃথিবীকে 27 দিনে প্রদক্ষিণ করে এবং টাইটান $1·23 \times 10^6$ km ব্যাসার্ধের কক্ষপথে শনিগ্রহকে 16 দিনে প্রদক্ষিণ করে ধরিয়া লইয়া পৃথিবী ও শনিগ্রহের ভরের তুলনা কর।

[Assuming that the moon describes a circular orbit of radius $3·8 \times 10^5$ km about the earth in 27 days and that Titan describes a circular orbit of radius $1·23 \times 10^6$ km about Saturn in 16 days, compare the masses of the Earth and Saturn.] [1 : 96·6]

25. পৃথিবী হইতে সূর্যের দিকে উহাদের সংযোজী রেখা বরাবর কতটা দূরে একটি বস্তুকে রাখিলে উহার উপর সূর্যের আকর্ষণ পৃথিবীর আকর্ষণকে প্রতিসম করে? পৃথিবী হইতে সূর্যের দূরত্ব $9·3 \times 10^7$ miles এবং ইহার ভর $3·24 \times 10^5$ M_e, এখানে M_e = পৃথিবীর ভর।

[How far from the earth must a body be along a line towards the sun that the sun's gravitational pull will balance the earth's? The sun is $9·3 \times 10^7$ miles away and its mass is $3·24 \times 10^5$ M_e, where M_e is the mass of the earth.] [$1·63 \times 10^5$ miles (প্রায়)]

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ
অভিকর্ষাধীন গতি

2.1 অভিকর্ষজ ত্বরণ : পৃথিবী উহার পৃষ্ঠে অবস্থিত বিভিন্ন বস্তু বা অন্যান্য নিকটবর্তী বস্তুর উপর যে-আকর্ষণ-বল প্রয়োগ করে তাহাকে **অভিকর্ষ** (gravity) বলা হয়।

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে, কোন বস্তুর উপর বল প্রযুক্ত হইলে উহার ত্বরণ সৃষ্টি হয়। সুতরাং, পৃথিবী-কর্তৃক প্রযুক্ত অভিকর্ষ-বলের প্রভাবেও বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টি হইবে। অভিকর্ষের প্রভাবে বস্তুতে যে-ত্বরণ সৃষ্টি হয় তাহাকে **অভিকর্ষজ ত্বরণ** (acceleration due to gravity) বলা হয়। ইহাকে সাধারণত 'g'-অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

স্থান পরিবর্তনের সহিত অভিকর্ষজ ত্বরণের মান পরিবর্তিত হয়। নিরক্ষীয় অঞ্চলে ইহার মান সর্বনিম্ন এবং মেরু অঞ্চলে ইহার মান সর্বোচ্চ। অভিকর্ষজ ত্বরণের সর্বনিম্ন মান 32·091 ft/s² বা 978·10 cm/s² এবং ইহার সর্বোচ্চ মান 32·255 ft/s² বা 983·11 cm/s²। নিম্নে বিভিন্ন স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণের মানের একটা তালিকা দেওয়া হইল :

স্থান	অভিকর্ষজ ত্বরণ cm/s²	স্থান	অভিকর্ষজ ত্বরণ cm/s²
কলিকাতা	978·76	নিউইয়র্ক	980·19
বোম্বাই	978·63	প্যারিস	980·97
মাদ্রাজ	978·36	লণ্ডন	981·17
দেরাদুন	979·07	মেরু অঞ্চল	983·11
গ্রিন-উইচ	981·19	নিরক্ষীয় অঞ্চল	978·10

হিসাবের সুবিধার জন্য সাধারণভাবে অভিকর্ষজ ত্বরণ বা g-এর মান 32 ft/s² বা 980 cm/s² ধরা যায়।

2.2 স্থিরাবস্থা হইতে অভিকর্ষের প্রভাবে পতনশীল বস্তুর গতি : স্থির অবস্থা হইতে কোন অবলম্বনহীন বস্তু নিচে পাড়তে থাকিলে উহাকে কেবলমাত্র অভিকর্ষ-বলের অধীন বলিয়া গণ্য করা হয়। অবশ্য, প্রকৃতপক্ষে অভিকর্ষ-বল ছাড়াও বস্তুটির উপর বায়ুর প্লবতা-বল ও ঘর্ষণ-জনিত বল ক্রিয়া করে। কিন্তু অভিকর্ষ-বলের তুলনায় এই দুই বিরুদ্ধ বল নগণ্য বলিয়া সাধারণ হিসাব-নিকাশের সময় ইহাদের

প্রভাব উপেক্ষা করা হয়। যাহা-কিছু পড়িতেছে তাহা কেবলমাত্র অভিকর্ষ-বলের অধীন ইহা ধরিয়া লইলে বলা যায় যে, **পতনশীল বস্তুর ত্বরণ অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর সমান।**

আমরা জানি, কোন বস্তু u প্রাথমিক গতিবেগ লইয়া f সম-ত্বরণ লইয়া যাত্রা শুরু করিলে t সময়ে উহার দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$

এখানে $u=0$ এবং $f=g$

এক্ষেত্রে 's' উচ্চতা (height) সূচিত করিতেছে বলিয়া আমরা s-এর পরিবর্তে 'h' লিখিব। সুতরাং স্থিরাবস্থা হইতে মুক্তভাবে পতনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে লেখা যায়,

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \quad \ldots. \quad (2.1)$$

2.3 পতনশীল বস্তু-কর্তৃক t-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব :

(2.1) নং সমীকরণ হইতে লেখা যায়,

$$h_1=\frac{1}{2}gt^2$$

$$h_2=\frac{1}{2}g(t-1)^2$$

h_1 এবং h_2 যথাক্রমে t এবং $(t-1)$ সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব।

∴ **t-তম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব=**

$$h_1-h_2=\frac{1}{2}g[t^2-(t-1)^2]=\frac{1}{2}g(2t-1)$$

2.4 স্থির অবস্থা হইতে পড়ন্ত বস্তুর পতনকাল এবং অন্তিম গতিবেগ (Time of fall and final velocity of a body falling from rest) :

আমরা জানি, $h=\frac{1}{2}gt^2$; কাজেই h উচ্চতা নামিতে বস্তুটি মোট যে-সময় লইবে তাহার মান, $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ .... (2.2)

h উচ্চতা নামিবার ফলে বস্তুতে সঞ্চারিত গতিবেগ কত হইবে তাহা নির্ণয় করিবার জন্য $v^2=u^2+2fs$ সমীকরণটি প্রয়োগ করা যায়। স্থির অবস্থা হইতে উল্লম্বভাবে পতনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে $u=0, f=g$ এবং $s=h$ লেখা যায়। সুতরাং, এক্ষেত্রে

$$v^2=2gh \quad \text{বা,} \quad v=\sqrt{2gh} \quad \ldots \quad (2.3)$$

2.5 উল্লম্বদিকে নিম্নে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতি (Motion of a body projected vertically downwards) : মনে করি, কোন বস্তুকে u গতিবেগে নিম্নাভিমুখে নিক্ষেপ করা হইয়াছে। কাজেই, এক্ষেত্রে নিক্ষেপ-বেগকে বস্তুর প্রাথমিক বেগ ধরিয়া লওয়া যায়। 'বলবিজ্ঞান'-অংশের 15-পৃষ্ঠার গতীয় সমীকরণ হইতে লেখা যায়,

$$v=u+gt \quad \ldots \quad (2.4)$$

$$h=ut+\frac{1}{2}gt^2 \quad \ldots. \quad (2.5)$$

$$\text{এবং } v^2=u^2+2gh \quad \ldots. \quad (2.6)$$

2.6 উল্লম্বদিকে ঊর্ধ্বমুখে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর গতি (Motion of a body projected vertically upwards) : এক্ষেত্রে, উৎক্ষেপণ-বেগ এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ

পরস্পর বিপরীতমুখী ; সুতরাং ইহাদের একটিকে ধনাত্মক ধরিলে অপরটিকে ঋণাত্মক ধরিতে হইবে। এইরূপ ক্ষেত্রে উৎক্ষেপণ-বেগ u-কেই ধনাত্মক ধরা হয়। কাজেই, এখানে g-এর পরিবর্তে $-g$ লিখিতে হইবে। এক্ষেত্রে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর গতির আনুষঙ্গিক সূত্রগুলি নিম্নরূপ :

$$v = u - gt \quad \ldots \quad (2.7)$$

$$h = ut - \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \ldots \quad (2.8)$$

এবং $$v^2 = u^2 - 2gh \quad \ldots \quad (2.9)$$

2.7 উল্লম্ব অভিমুখে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর উত্থান-কাল (Time of rise) : যখন কোন বস্তু ঊর্ধ্বমুখে উঠিতে থাকে তখন অভিকর্ষ-বল উহার গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়া করে। ফলে বস্তুটি যত উপরে উঠিতে থাকে উহার গতিবেগ তত হ্রাস পাইতে থাকে এবং এক সময় বস্তুটির গতিবেগ শূন্য হয়। ইহার পরমুহূর্ত হইতেই বস্তুটি নিচের দিকে নামিতে থাকে। সুতরাং, উৎক্ষিপ্ত বস্তু যাত্রা শুরু করিবার পর হইতে উহার গতিবেগ শূন্য হওয়া পর্যন্ত সময়ই বস্তুটির উত্থান-কাল। যদি বস্তুটির প্রাথমিক বেগ বা ঊর্ধ্বাভিমুখী উৎক্ষেপণ-বেগ u হয় তাহা হইলে, $0 = u - gt$

এখানে, t = উত্থান-কাল। কাজেই, লেখা যায় যে, $t = \dfrac{u}{g}$

বা, উত্থান-কাল $(t) = \dfrac{\text{উৎক্ষেপণ-বেগ } (u)}{\text{অভিকর্ষজ ত্বরণ } (g)} \quad \ldots \quad (2.10)$

উত্থান-কালকে আমরা সর্বোচ্চ উচ্চতায় আরোহণের সময়ও বলিতে পারি।

2.8 ঊর্ধ্বমুখে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ অবস্থানের উচ্চতা (The greatest height attained by a body projected upwards) : সর্বোচ্চ অবস্থানে উঠিয়া বস্তুর গতিবেগ শূন্য হয়।

কাজেই $v^2 = u^2 - 2gh$ সমীকরণ হইতে পাই, $0 = u^2 - 2gh$

বা, $u^2 = 2gh$ বা, $h = \dfrac{u^2}{2g} \quad \ldots \quad (2.11)$

অর্থাৎ, সর্বোচ্চ উচ্চতা $= \dfrac{(\text{উৎক্ষেপণ-বেগ})^2}{2 \times \text{অভিকর্ষজ ত্বরণ}}$

2.9 মোট উড্ডয়ন-কাল (Total time of flight) : ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত বস্তু সর্বোচ্চ অবস্থানে আরোহণ করিবার পর নিচে নামিতে থাকে এবং এক সময় উৎক্ষেপণ-বিন্দুতে ফিরিয়া আসে। অর্থাৎ, ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত হইবার পর হইতে উৎক্ষেপণ-বিন্দুতে ফিরিয়া আসা পর্যন্ত বস্তুটি যে-সময় লয় সেই সময়ে বস্তুটির মোট সরণ শূন্য। সময়ের এই অবকাশকে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর মোট উড্ডয়ন-কাল বলা হয়।

উড্ডয়ন-কাল T হইলে লেখা যায়, $0 = u\text{T} - \tfrac{1}{2}g\text{T}^2$ (মোট সরণ শূন্য বলিয়া)

বা, $\text{T}(u - \tfrac{1}{2}g\text{T}) = 0$

কাজেই, $T=0$ বা, $\frac{2u}{g}$; $T=0$—এই সমাধান গ্রহণযোগ্য নহে।

ইহা প্রকৃতপক্ষে উৎক্ষিপ্ত হইবার মুহূর্তটি নির্দেশ করিতেছে।

সুতরাং $t=\frac{2u}{g}$ ... (2.12)

বা, মোট উড্ডয়ন-কাল $=\frac{2\times \text{উৎক্ষেপণ-বেগ } (u)}{\text{অভিকর্ষজ ত্বরণ } (g)}$

2.10 উত্থান-কাল ও পতন-কালের সমতা (Equality of the time of rise and the time of fall) :

সমীকরণ (2.10) হইতে পাই, বস্তুর উত্থান-কাল $=\frac{u}{g}$ ... (i)

আবার, সমীকরণ (2.12) হইতে পাই, বস্তুর উড্ডয়ন-কাল $=\frac{2u}{g}$ .... (ii)

কাজেই, বস্তুর পতন-কাল = মোট উড্ডয়ন-কাল − উত্থান-কাল

$$=\frac{2u}{g}-\frac{u}{g}=\frac{u}{g} \quad .... \text{(iii)}$$

সুতরাং (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়, **উত্থান-কাল = পতন-কাল**

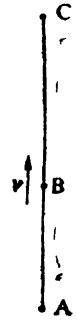
● **বিশেষ দ্রষ্টব্য :** কেবলমাত্র উৎক্ষেপণ-বিন্দু হইতে হিসাব করিলেই যে উত্থান-কাল এবং পতন-কাল সমান হইবে তাহা নহে। যে-কোন বিন্দু হইতেই উৎক্ষিপ্ত বস্তুর উত্থান-কাল ও পতন-কাল সমান। ইহা সহজেই প্রমাণ করা যায়।

ধরি, উৎক্ষেপণ-বিন্দু A হইতে h উচ্চতায় B একটি বিন্দু (চিত্র 2.1)। উৎক্ষিপ্ত বস্তুটি A-বিন্দু হইতে যাত্রা করিয়া B-বিন্দুর মধ্য দিয়া উহার সর্বোচ্চ অবস্থান C-তে গিয়া পৌঁছে এবং ইহার পর নামিয়া আসিতে থাকে। নামিবার সময় উহা পুনরায় B বিন্দুর মধ্য দিয়া যায়। এখন B বিন্দুতে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর গতিবেগ v হইলে লেখা যায়,

$$v^2=u^2-2gh$$

বা, $v=\pm\sqrt{u^2-2gh}$

লক্ষণীয় যে, এখানে v-এর দুইটি মান পাওয়া যাইতেছে। ইহাদের মধ্যে একটি মান ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক।

C
v B
A

চিত্র 2.1

এক্ষেত্রে উপরে উঠিবার সময় বস্তুর বেগ ধনাত্মক এবং নিচে নামিবার সময় বস্তুর বেগ ঋণাত্মক। এখন, উঠিবার সময়ই হউক বা নামিবার সময়ই হউক B বিন্দুতে অবস্থান-কালে বস্তুর সরণ h এর সমান। কাজেই, দিক্‌ বিচার না করিলে বলা যায় যে, উভয় ক্ষেত্রেই (উঠিবার সময় এবং নামিবার সময়) বেগ সমান। দিক্‌ বিচারে ইহারা বিপরীতমুখী। অর্থাৎ উঠিবার সময় v-এর মান $\sqrt{u^2-2gh}$ এবং নামিবার সময় ইহার মান $-\sqrt{u^2-2gh}$

এইবার মনে করি, B হইতে C বিন্দুতে উঠিতে সময় লয় t_1, C-বিন্দুতে বস্তুর গতিবেগ শূন্য বলিয়া লেখা যায়, $0=v-gt_1$

$$\text{বা, } t_1=\frac{v}{g}=\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g} \quad \dots \quad (i)$$

আবার, C বিন্দু হইতে B বিন্দুতে আসিতে বস্তুটি যদি t_2 সময় লয় তাহা হইলে লেখা যায়, $-v=0+gt_2$

$$\text{বা, } t_2=\frac{v}{g}=\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g} \quad \dots \quad (ii)$$

(i) ও (ii) হইতে দেখা যাইতেছে যে, $t_1=t_2$

অর্থাৎ, B হইতে C বিন্দু পর্যন্ত উত্থানের সময়

= C বিন্দু হইতে B বিন্দুতে পতনের সময়

2.11 কোন নির্দিষ্ট উচ্চতায় আরোহণের সময় (The time for rising to a given height) : কোন উৎক্ষিপ্ত বস্তু উৎক্ষেপণ-বিন্দু হইতে h উচ্চতায় যাইতে যদি t সময় লয় তাহা হইলে লেখা যায়, $h=ut-\frac{1}{2}gt^2 \quad \dots \quad (i)$

এখানে, u হইল উৎক্ষেপণ-বেগ।

সমীকরণ (i) হইতে পাই, $gt^2-2ut+2h=0$

$$\text{বা, } t=\frac{u\pm\sqrt{u^2-2gh}}{g}$$

অর্থাৎ, এক্ষেত্রে t-এর দুইটি মান পাওয়া যাইতেছে। ইহার কারণ এই যে, উৎক্ষিপ্ত বস্তুটি কোন নির্দিষ্ট উচ্চতায় দুইবার আসে—একবার উঠিবার সময় এবং একবার নামিবার সময়। এইরূপ কোন বিন্দু হইতে সর্বোচ্চ অবস্থানে উঠিতে সময় লয় $\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g}$; সর্বোচ্চ অবস্থান হইতে ঐ বিন্দুতে নামিয়া আসিতেও সময় লয় $\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g}$.

আবার, মোট উত্থান-কাল এবং মোট পতন-কাল—উভয়ের মানই $\frac{u}{g}$। কাজেই, উঠিবার সময় h উচ্চতায় পৌঁছিতে সময় লাগে

$$\frac{u}{g}-\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g} \quad \text{বা,} \quad \frac{u-\sqrt{u^2-2gh}}{g}$$

এবং নামিবার সময় h উচ্চতায় পৌঁছিতে সময় লাগে

$$\frac{u}{g}+\frac{\sqrt{u^2-2gh}}{g} \quad \text{বা,} \quad \frac{u+\sqrt{u^2-2gh}}{g}$$

● সমাধানসহ গাণিতিক প্রশ্নাবলী ●

উদাহরণ 2.1 উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্ব' উৎক্ষিপ্ত কোন বস্তু 144 ft পর্যন্ত উঠে; কত গতিবেগে উহা পুনরায় ভূপৃষ্ঠে নামিয়া আসিবে?

[A body is thrown vertically upwards and just reaches a height of 144 ft. With what speed will it reach the ground again ?]

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুটির উৎক্ষেপণ-বেগ $= u$

সর্বোচ্চ উচ্চতা H-এ ইহার গতিবেগ শূন্য হয় বলিয়া লেখা যায়,

$$0 = u^2 - 2gH, \quad g = \text{অভিকর্ষজ ত্বরণ}$$

$$\text{বা,} \quad u = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 32 \times 144} = 96 \text{ ft/s}$$

যদি বস্তুটি উহার সর্বোচ্চ অবস্থান হইতে u_1 গতিবেগে নিচে নামিয়া আসে তাহা হইলে লেখা যায়,

$$u_1^2 - 0 + 2gH$$

$$\text{বা,} \quad u_1 \quad \sqrt{2gH} = u = 96 \text{ ft/s}$$

উদাহরণ 2.2 ভূপৃষ্ঠ হইতে সেকেণ্ডে 40 ft বেগে একটি বস্তু ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত হইল। উহার বেগ শূন্য হইবার পূর্ব পর্যন্ত বস্তুটি কতটা উচ্চতা পর্যন্ত উঠিবে?

[A body is projected from the earth vertically upwards with a velocity of 40 ft/s; find how far it will rise before its velocity vanishes.]

সমাধান ঃ মনে করি, h উচ্চতায় উঠিয়া বস্তুটির গতিবেগ শূন্য হয়। কাজেই লেখা যায়, $0 = u^2 - 2gh$ বা, $h - \frac{u^2}{2g}$

এখানে, u — উৎক্ষেপণ-বেগ $= 40$ ft/s, g — অভিকর্ষজ ত্বরণ $- 32$ ft/s²

$$\therefore \quad h = \frac{40^2}{2 \times 32} = 25 \text{ ft}$$

উদাহরণ 2.3 একটি বালক উল্লম্বরেখা বরাবর ঊর্ধ্বমুখে 112 ft/s গতিবেগে ক্রিকেট-বল ছুঁড়িল। বলটি কতটা উচ্চতা পর্যন্ত উঠিবে এবং কত সেকেণ্ড পরে বলটি বালকের হাতে ফিরিয়া আসিবে?

[A boy throws a cricket ball vertically upwards with a velocity of 112 ft/s; how high will it rise and how many seconds will elapse before he catches it on return?

সমাধান ঃ সর্বোচ্চ উচ্চতার মান H হইলে লেখা যায় যে,

$$0 = u^2 - 2gH$$

u — ক্রিকেট-বলের উৎক্ষেপণ-বেগ 112 ft/s

g অভিকর্ষজ ত্বরণ - 32 ft/s²

$$\text{বা,} \quad H = \frac{u^2}{2g} = \frac{112^2}{2 \times 32} - 196 \text{ ft}$$

মোট উড্ডয়ন-কাল t হইলে লেখা যায়, $ut - \frac{1}{2}gt^2 = 0$

বা, $t\,(112 - 16t) = 0$

কিন্তু $t \neq 0$; কাজেই, $16t = 112$ বা, $t = \frac{112}{16} = 7$ s

উদাহরণ 2.4 কোন বস্তুকে স্থির অবস্থা হইতে নিচের দিকে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। 5 সেকেণ্ডে উহার বেগ 49·00 m/s হইলে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কত? ঐ সময়ে বস্তুটি কতটা নিচে নামিবে?

[A body is let fall under gravity from rest. If the body acquires a velocity of 49·00 m/s in 5 s, what is the value of the acceleration due to gravity ? How far will the body descend during this time ?]

সমাধান : এক্ষেত্রে প্রাথমিক গতিবেগ, $u=0$ cm/s

$v=49$ m/s $=4900$ cm/s এবং $t=5$ s

বস্তুটির গতি নিম্নাভিমুখী বলিয়া, $v=u+gt$

বা, $4900=0+g\times 5$ বা, $g=\frac{4900}{5}=980$ cm/s²

আবার, $h=ut+\frac{1}{2}gt^2$

এখানে, $u=0$ বলিয়া

$$h=\frac{1}{2}\times g\times t^2=\frac{1}{2}\times 980\times 5^2 \text{ cm}=122\cdot 5 \text{ m}$$

উদাহরণ 2.5 প্রমাণ কর যে, ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত বস্তু উহার ঊর্ধ্বাভিমুখী গতির শেষ এক সেকেণ্ডে যে-পথ যায়, তাহা বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তু প্রথম সেকেণ্ডে যে-পথ অতিক্রম করে তাহার সমান।

[Prove that the distance travelled by a body projected vertically upwards in the last second of its upward journey is equal to the distance travelled by a freely falling body in the first second of its journey.]

সমাধান : মনে করি, ঊর্ধ্বমুখে উৎক্ষিপ্ত কোন বস্তুর প্রাথমিক বেগ $=u$

ঊর্ধ্বতম অবস্থানে উঠিতে বস্তুর যদি T s সময় লাগে, তবে

$$0=u-gT \quad \text{বা,} \quad T=\frac{u}{g} \qquad \text{(i)}$$

ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত হইবার পর T s সময়ে বস্তুটি যে-উচ্চতায় উঠে তাহার মান H হইলে লেখা যায়, $H=uT-\frac{1}{2}gT^2$ ... (ii)

$(T-1)$ s সময়ে বস্তুটির উচ্চতা H′ হইলে পাই,

$$H'=u(T-1)-\frac{1}{2}g(T-1)^2 \qquad \text{(iii)}$$

ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত বস্তু উহার ঊর্ধ্বাভিমুখী গতির শেষ সেকেণ্ডে যে-পথ অতিক্রম করে তাহার মান, $H-H'=(uT-\frac{1}{2}gT^2)-\{u(T-1)-\frac{1}{2}g(T-1)^2\}$

$$=u-\frac{1}{2}g(2T-1)=u-gT+\frac{1}{2}g \quad .. \quad \text{(iv)}$$

কিন্তু, সমীকরণ (i) হইতে পাই $(u-gT)=0$

কাজেই, $H-H'=\frac{1}{2}g$ ... (v)

বিনা বাধায় পতনশীল বস্তু উহার পতন-কালের প্রথম সেকেণ্ডে যে-পথ অতিক্রম করে তাহার মান, $h=\frac{1}{2}g.1^2=\frac{1}{2}g$ .. (vi)

সমীকরণ (v) এবং (vi) হইতে, $H-H'=h$

উদাহরণ 2.6 কোন বস্তু 120 ft/s বেগে খাড়াভাবে ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত হইল, বস্তুটি কত উপরে উঠিবে ? 176 ft উপরে উঠিতে উহার কত সময় লাগিবে ? তখন উহার গতিবেগ কত হইবে ? ($g=32$ ft/s²)

[A body is projected vertically upwards with a velocity of 120 ft/s. What time will the body take to reach a height of 176 ft? What is the velocity of the body at that time? ($g=12$ ft/s^2)

সমাধান : বস্তুটির উত্থানের সময় অভিকর্ষ-বল উহার গতির বিপরীতমুখী বলিয়া ইহার গতি কমিতে থাকে। বস্তুর সর্বোচ্চ অবস্থানে উহার গতিবেগ, $v=0$। বস্তুটির প্রাথমিক গতিবেগ, $u=120$ ft/s

এখন, $v^2=u^2-2g\text{H}$ সমীকরণ হইতে পাই,

$$0=u^2-2g\text{H} \quad \text{বা,} \quad \text{H}=\frac{u^2}{2g}=\frac{120^2}{2\times 32}=225 \text{ ft}$$

মনে করি, 176 ft উপরে উঠিতে t s সময় লাগে। তাহা হইলে,

$$176=ut-\tfrac{1}{2}gt^2=120t-\tfrac{1}{2}\times 32\times t^2$$

বা, $2t^2-15t+22=0$ বা, $(t-2)(2t-11)=0$

বা, $t=2$ s বা, $\frac{11}{2}$ s

সময়ের দুইটি মান পাইবার তাৎপর্য এই যে, উপরে উৎক্ষিপ্ত বস্তু উহার অতিক্রান্ত পথে যে-কোন উচ্চতায় দুইবার আসে—একবার উঠিবার সময় এবং একবার নামিবার সময়।

$t=2$ s ধরিলে, $v=u-gt=120-32\times 2=56$ ft/s

$t=\frac{11}{2}$ s ধরিলে, $v=120-32\times\frac{11}{2}=-56$ ft/s

দেখা যাইতেছে যে, t-এর উক্ত দুই মাপের ক্ষেত্রে গতিবেগ সমান, কিন্তু পরস্পর বিপরীতমুখী।

উদাহরণ 2.7 200 ফুট উচ্চ একটি মিনার হইতে একটি পাথর ছাড়িয়া দেওয়া হইল। একই সময়ে অপর একটি পাথরকে 150 ft/s গতিবেগে উল্লম্বরেখা বরাবর ঊর্ধ্বমুখে ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। কখন ও কোথায় ইহারা পরস্পরের সহিত মিলিত হইবে? ($g=32$ ft/s^2)

[A stone is dropped from the top of a tower 200 ft high. At the same instant another stone is thrown upwards with a velocity of 150 ft/s from the bottom of the tower. When and where will the stones meet? ($g=32$ ft/s^2)

সমাধান : ধরা যাক, t সেকেণ্ড পর পাথর দুইটি পরস্পরের সহিত মিলিত হয়। উপর হইতে যে-পাথরটি ছাড়িয়া দেওয়া হইল তাহা t s সময়ে x ft নামিলে লেখা যায়,

$$x=\tfrac{1}{2}gt^2-16t^2 \quad \text{.. (i)}$$

একই সময়ে নিচ হইতে উৎক্ষিপ্ত বস্তুটি $(200-x)$ ft উঠিয়াছে।

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $200-x=ut-\tfrac{1}{2}gt^2=150t-16t^2$ .... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $200=150t$

বা, $t=\frac{200}{150}=\frac{4}{3}=1{\cdot}33$ s (প্রায়)

কাজেই, $x=16t^2=16\times(\frac{4}{3})^2=28{\cdot}44$ ft

কাজেই, ভূমি হইতে $(200-28{\cdot}44)$ বা, $171{\cdot}56$ ft উচ্চতায় পাথর দুইটি পরস্পরের সহিত মিলিত হইবে।

উদাহরণ 2.8 ভূপৃষ্ঠ হইতে 276 ft উচ্চতায় অবস্থিত একটি উত্থানরত বেলুন হইতে একটি পাথর ফেলা হইল। পাথরটি 6 s পরে ভূমি স্পর্শ করে। যে-মুহূর্তে পাথরটি ফেলা হইয়াছিল সেই মুহূর্তে বেলুনের গতিবেগ কত ছিল?

[A stone is dropped from a rising balloon at a height of 276 ft above the ground. The stone reaches the ground in 6 seconds. What was the velocity of the balloon just at the moment when the stone was dropped ?]

সমাধান: ধরি, যখন পাথরটিকে ফেলা হইয়াছিল তখন বেলুনের ঊর্ধ্বাভিমুখী বেগ $= u$ ft/s

কাজেই, পাথরটির প্রাথমিক বেগ $= u$, এই বেগও ঊর্ধ্বাভিমুখী। নিম্নাভিমুখী বেগকে ধনাত্মক ধরিলে এই বেগ ঋণাত্মক। প্রশ্নের শর্তানুসারে,

পাথরটির মোট নিম্নাভিমুখী সরণ $= 276$ ft

$s = ut + \frac{1}{2} gt^2$ সমীকরণ হইতে লেখা যায়,

$$276 = -6u + \tfrac{1}{2} \times 32 \times 6^2 \quad \text{বা,} \quad 276 = -6u + 576$$

$$\text{বা,} \quad 6u = 300 \qquad \text{বা,} \quad u = 50 \text{ ft/s}$$

উদাহরণ 2.9 একই সঙ্গে দুইটি পাথরকে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বে উৎক্ষেপ করা হইল। প্রথম পাথরটি দ্বিতীয়টি অপেক্ষা 112 ft বেশি উচ্চতা পর্যন্ত উঠিল এবং দ্বিতীয়টি অপেক্ষা 2 s পরে ভূপৃষ্ঠে নামিয়া আসিল। পাথর দুইটি কী গতিবেগে উৎক্ষিপ্ত হইয়াছিল?

[Two stones are simultaneously projected vertically upwards. The first stone rises 112 ft higher than the second stone and returns to the ground 2 seconds later. With what velocities were the stones projected ?]

সমাধান: মনে করি, পাথর দুইটিকে u_1 এবং u_2 গতিবেগে ঊর্ধ্বে উৎক্ষেপ করা হইল। পাথর দুইটি যথাক্রমে h_1 এবং h_2 উচ্চতা পর্যন্ত উঠিলে লেখা যায় যে,

$$h_1 = \frac{u_1^2}{2g} \quad \text{এবং} \quad h_2 = \frac{u_2^2}{2g}$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $h_1 - h_2 = \frac{1}{2g}(u_1^2 - u_2^2) = 112$

$$\text{বা,} \quad u_1^2 - u_2^2 = 2g \times 112 = 224 \times g \qquad \text{(i)}$$

পাথর দুইটির উড্ডয়ন-কাল যথাক্রমে τ_1 এবং τ_2 হইলে লেখা যায়,

$$\tau_1 = \frac{2u_1}{g} \quad \text{এবং} \quad \tau_2 = \frac{2u_2}{g}$$

$$\therefore \quad \tau_1 - \tau_2 = \frac{2}{g}(u_1 - u_2) = 2 \text{ s}$$

$$\therefore \quad u_1 - u_2 = g = 32 \text{ ft/s} \qquad \ldots \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $u_1 + u_2 = 224$ ft/s ... (iii)

সমীকরণ (ii) এবং (iii) হইতে পাই,

$$u_1 = 128 \text{ ft/s} \text{ এবং } u_2 = 96 \text{ ft/s}$$

উদাহরণ 2.10 একটি কুয়ার মধ্যে একখণ্ড পাথর ফেলা হইল। $2\frac{33}{56}$ s পরে উহার জলে পড়িবার শব্দ শোনা গেল। শব্দের গতিবেগ 1120 ft/s হইলে কুয়ার গভীরতা নির্ণয় কর।

[A stone is dropped into a well and the sound of its striking the water is heard in $2\frac{33}{56}$ s. If the velocity of sound be 1120 ft/s, find the depth of the well.]

সমাধান : মনে করি, পাথরটি t_1 s সময়ে জলে পড়ে এবং উৎপন্ন শব্দ t_2 s সময়ে উপরে পৌঁছে। কাজেই, শর্তানুসারে,

$$t_1+t_2=2\tfrac{33}{56}=\tfrac{145}{56}\text{ s} \qquad \text{(i)}$$

কুয়ার গভীরতা h হইলে লেখা যায়,

$$h=\frac{1}{2}gt_1{}^2 \quad \text{বা,} \quad t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

$$\text{এবং} \quad \frac{h}{v}=t_2 \quad \text{বা,} \quad t_2=\frac{h}{1120} \qquad \text{(iii)}$$

(i) নং সমীকরণে t_1 এবং t_2-এর মান বসাইয়া,

$$\sqrt{\frac{2h}{g}}+\frac{h}{1120}=\frac{145}{56} \quad \text{বা,} \quad \sqrt{\frac{2h}{32}}+\frac{h}{1120}=\frac{145}{56}$$

$$\text{বা,} \quad \sqrt{h}+\frac{h}{280}=\frac{145}{14} \quad \text{বা,} \quad h+280\sqrt{h}-2900=0$$

$$\text{বা,} \quad (\sqrt{h}-10)(\sqrt{h}+290)=0$$

$\sqrt{h}$ ঋণাত্মক হইলে সমীকরণ (ii) অনুসারে t_1-এর মান ঋণাত্মক হইবে।

কাজেই, $\sqrt{h}=10$ বা, $h=100$ ft

উদাহরণ 2.11 কোন মিনারের শীর্ষ হইতে পতনশীল একখণ্ড পাথর যখন x ft নিচে নামিয়াছে ঠিক সেই সময় মিনারের শীর্ষের y ft নিচ হইতে আর একটি পাথর ফেলা হইল। যদি দুইটি পাথরই স্থিরাবস্থা হইতে পড়ে এবং একই সঙ্গে ভূমিতে পৌঁছায় তাহা হইলে দেখাও যে, মিনারের উচ্চতা $(x+y)^2/4x$ ft।

[A stone falling from the top of a vertical tower has descended x ft when another is let fall from a point y ft below the top. If they fall from rest and reach the ground together, show that the height of the tower is $(x+y)^2/4x$ ft.] (H. S., 1971)

সমাধান : মনে করি, মিনারের উচ্চতা $=h$ ft

এখন, প্রথম পাথরটি স্থিরাবস্থা হইতে x ft নামিবার পর উহার গতিবেগ v হইলে লেখা যায়, $v^2=2gx$ বা, $v=\sqrt{2gx}$ .... (i)

প্রশ্নের শর্তানুসারে, প্রথম পাথরটি v প্রাথমিক বেগ লইয়া যে-সময়ে $(h-x)$ ft

পথ অতিক্রম করিবে, দ্বিতীয় পাথরটি সেই সময়ে স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া $(h-y)$ ft পথ যাইবে। যদি এই সময় t s হয় তাহা হইলে লেখা যায়,

$$h-x=vt+\tfrac{1}{2}gt^2 \quad \text{বা,} \quad h-x=\sqrt{2gx}\,t+\tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{(ii)}$$

$$\text{এবং} \quad h-y=\tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{(iii)}$$

∴ (ii) এবং (iii) হইতে পাই,

$$y-x=\sqrt{2gx}\,.\,t \quad \text{বা,} \quad t=\frac{y-x}{\sqrt{2gx}} \qquad \text{(iv)}$$

এখন, (iii) হইতে পাই, $h-y=\frac{1}{2}g\,.\,\frac{(y-x)^2}{2gx}=\frac{(y-x)^2}{4x}$

$$\text{বা,} \quad h=y+\frac{(y-x)^2}{4x}=\frac{(y-x)^2+4xy}{4x}=\frac{(x+y)^2}{4x} \text{ ft}$$

উদাহরণ 2.12 উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত একটি বস্তু h ft উঠিতে সময় লয় t_1 s। ইহার পর আরও t_2 s পর উহা ভূপৃষ্ঠে নামিয়া আসে। দেখাও যে, $h=\frac{1}{2}gt_1t_2$

[A particle is projected vertically upwards and takes t_1s to rise to a height h ft. If it takes t_2 more seconds to reach the ground again, show that $h=\frac{1}{2}gt_1t_2$.] (H. S. 1965, 1969)

সমাধান ঃ যদি উৎক্ষেপণ-বেগ v হয় তাহা হইলে লেখা যায়,

$$h=ut_1-\tfrac{1}{2}gt_1^2 \qquad \text{(i)}$$

আবার, (t_1+t_2) s পর বস্তুটি পুনরায় ভূমিতে নামিয়া আসে বলিয়া লেখা যায়,

$$0=u(t_1+t_2)-\tfrac{1}{2}g(t_1+t_2)^2 \qquad \text{(ii)}$$

এখন, (i) এবং (ii) হইতে যথাক্রমে পাওয়া যায়,

$$\frac{h}{t_1}=u-\tfrac{1}{2}gt_1 \qquad \text{(iii)}$$

$$\text{এবং} \quad 0=u-\tfrac{1}{2}g(t_1+t_2) \qquad \text{(iv)}$$

∴ (iii) হইতে (iv) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\frac{h}{t_1}=\tfrac{1}{2}gt_2 \quad \text{বা,} \quad h=\tfrac{1}{2}gt_1t_2$$

উদাহরণ 2.13 একই সঙ্গে দুইটি ভারী বস্তুর একটিকে 25 ft উপর হইতে এবং অপরটিকে 50 ft উপর হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হয়। যখন প্রথম বস্তুটি মাটিতে পৌঁছায় সেই মুহূর্তে দ্বিতীয়টির উচ্চতা এবং বেগ নির্ণয় কর।

[Two heavy bodies are dropped at the same time, one from a height of 25 ft and the other from a height of 50 ft. Find the height and the velocity of the second when the first reaches the ground.]

সমাধান ঃ মনে করি, প্রথম বস্তুটি t s পর মাটিতে পৌঁছায়

কাজেই, $25=\frac{1}{2}\times g\times t^2=\frac{1}{2}\times 32\times t^2$

বা, $t^2=\frac{25}{16}$ বা, $t=\frac{5}{4}$ s

$\frac{5}{4}$ s পর দ্বিতীয় বস্তুটির গতিবেগ v হইলে লেখা যায়, $v=gt$

$=32\times\frac{5}{4}=40$ ft/s

$\frac{5}{4}$ s সময়ে দ্বিতীয় বস্তুটি যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহার মান h হইলে লেখা যায়,

$$h=\frac{1}{2}\times g\times t^2=16\times(\tfrac{5}{4})^2=25 \text{ ft}$$

কাজেই, প্রথম বস্তুটি যখন মাটিতে পৌঁছায় তখন ভূমি হইতে দ্বিতীয় বস্তুটির উচ্চতা $=(50-25)=25$ ft এবং ইহার গতিবেগ $=40$ ft/s

উদাহরণ 2.14 5 ft/s গতিবেগে একটি লিফ্‌ট উপরে উঠিতেছে। হঠাৎ লিফ্‌ট হইতে একটি স্ক্রু খসিয়া পড়িল। $1\frac{1}{2}$ s পর স্ক্রুটির গতিবেগ কত হইবে এবং ঐ মুহূর্তে লিফ্‌ট এবং স্ক্রু-এর মধ্যে ব্যবধান কত হইবে ?

[A lift is ascending at 5 ft/s. A screw drops from the lift all on a sudden. What will be the velocity of the screw at the end of $1\frac{1}{2}$ s and what will be the distance between the lift and the screw at the moment ?]

সমাধান ঃ যে-মুহূর্তে স্ক্রুটি লিফ্‌ট হইতে খসিয়া পড়িল সেই মুহূর্তে উহার ঊর্ধ্বমুখী গতিবেগ, $u=5$ ft/s

$1\frac{1}{2}$ বা $\frac{3}{2}$ s সময়ে স্ক্রুটি যে-দূরত্বে নামিয়া আসিবে তাহার মান h_1 হইলে

$$h_1=-ut+\tfrac{1}{2}gt^2=-5\times\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\times 32\times(\tfrac{3}{2})^2$$

$$=-7{\cdot}5+36=28{\cdot}5 \text{ ft}$$

এই সময়ের মধ্যে লিফ্‌ট যদি h_2 উচ্চতা উঠে তাহা হইলে,

$$h_2=u\times\tfrac{3}{2}=5\times\tfrac{3}{2}=7{\cdot}5 \text{ ft}$$

কাজেই, স্ক্রু খসিয়া যাইবার $\frac{3}{2}$ s পর লিফ্‌ট এবং স্ক্রু-এর উচ্চতার ব্যবধান,

$$h=h_1+h_2=28{\cdot}5+7{\cdot}5=36 \text{ ft}$$

$\frac{3}{2}$ s পর স্ক্রু-এর গতিবেগ v হইলে লেখা যায়,

$$v=u-gt=5-32\times\tfrac{3}{2}=-43 \text{ ft/s}$$

ঊর্ধ্বাভিমুখী প্রাথমিক গতিবেগকে ধনাত্মক ধরা হইয়াছিল। v-এর মান ঋণাত্মক হইবার তাৎপর্য এই যে, এই গতিবেগ নিম্নাভিমুখী।

উদাহরণ 2.15 32 ft/s গতিবেগে উত্থানরত একটি বেলুন হইতে একটি পাথর ফেলা হইল। পাথরটি 10 s পরে ভূমিতে পৌঁছিল। পাথরটি ভূমি হইতে সর্বোচ্চ কোন্ উচ্চতায় উঠিবে এবং যখন পাথরটিকে ছাড়িয়া দেওয়া হইয়াছিল তখন বেলুনটির উচ্চতা কত ছিল ?

[A stone is let fall from a balloon ascending with a velocity of 32 ft/s. The stone takes 10 s to reach the ground. Find the greatest height above the ground attained by the stone and also the height of the balloon when the stone was released.]

সমাধান : মনে করি, পাথরটি ছাড়িয়া দিবার সময় ভূমি হইতে বেলুনটির উচ্চতা ছিল h ft ;

কাজেই, $h = -ut + \frac{1}{2}g \times t^2$

এখানে, $u = 32$ ft/s, $g = 32$ ft/s² এবং $t = 10$ s

$\therefore \quad h_2 = -32 \times 10 + \frac{1}{2} \times 32 \times 10^2 = -320 + 1600 = 1280$ ft

লিফ্‌ট হইতে যখন পাথরটিকে ছাড়িয়া দেওয়া হইল তখন উহার ঊর্ধ্বমুখী গতিবেগ, $u = 32$ ft/s

কাজেই, ইহা প্রথমে কিছুটা উঠিবে। ঊর্ধ্বমুখী গতিবেগ যখন শূন্য তখনই পাথরটি সর্বোচ্চ অবস্থানে পৌছে। বেলুন হইতে ছাড়িয়া দিবার পর পাথরটি h_1 ft পর্যন্ত উঠিলে লেখা যায়, $0 = u^2 - 2gh$

$$\text{বা,} \quad h_1 = \frac{u^2}{2g} = \frac{32 \times 32}{2 \times 32} = 16 \text{ ft}$$

কাজেই, পাথরটির সর্বোচ্চ উচ্চতা $= h + h_1 = (1280 + 16) = 1296$ ft

উদাহরণ 2.16 একটি লিফ্‌ট f সমত্বরণে উপরে উঠিতেছে। লিফ্‌টের মধ্যে এক ব্যক্তি লিফ্‌টের সাপেক্ষে v বেগে একটি বলকে উল্লম্বভাবে উপরে ছুঁড়িয়া দিল। t সময় পরে বলটি পুনরায় ব্যক্তিটির হাতে ফিরিয়া আসিল। দেখাও যে, $f + g = (2v/t)$।

[A lift is moving upwards with uniform acceleration f. A man throws a ball vertically upwards with a velocity v relative to the lift. The ball returns to the man after a time t. Show that $f + g = (2v/t)$] (H. S. 1970)

সমাধান : যখন বলটি ছোঁড়া হইল তখন লিফ্‌টের গতিবেগ u হইলে ঊর্ধ্বমুখী বলটির মোট গতিবেগ $(u + v)$ হইবে। এখন, উপরের দিকে লিফ্‌টের ত্বরণ f

t সময়ে লিফ্‌ট-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব $= ut + \frac{1}{2}gt^2$

অনুরূপভাবে, t সময়ে বল-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব $= (u + v)\, t - \frac{1}{2}\, gt^2$

t সময় পরে বলটি উৎক্ষেপকের হাতে ফিরিয়া আসে বলিয়া লেখা যায়,

t সময়ে লিফ্‌টের উত্থান $= t$ সময়ে বলটির উত্থান

$\therefore \quad ut + \frac{1}{2}ft^2 = (u + v\, t - \frac{1}{2}gt^2 \quad$ বা, $\quad vt = \frac{1}{2}(g + f)\, t^2$

$$\text{বা,} \quad f + g = \frac{2v}{t} \quad [\because \quad t \neq 0\,]$$

উদাহরণ 2.17 P এবং Q একটি উল্লম্ব রেখার উপর অবস্থিত দুইটি বিন্দু। P বিন্দুটি Q বিন্দুর উপর অবস্থিত। একটি ভারী বস্তুকণাকে Q হইতে এমন গতিবেগে ঊর্ধ্বমুখে ছোঁড়া হইল যাহাতে কণাটি ঠিক P বিন্দু পর্যন্ত উঠে। একই সময়ে অপর একটি ভারী কণাকে P বিন্দু হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। দেখাও যে, কণা দুইটির মিলনকালে তাহাদের বেগ সমান এবং বিপরীতমুখী এবং উহাদের দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্বের অনুপাত 3 : 1।

[P and Q are two points in the same vertical line, P being above Q. A heavy particle is projected vertically upwards from Q with a velocity which will just carry it to P and at the same time a heavy particle is dropped from rest at P. Show that when the particles meet, their velocities will be equal and opposite, and the spaces, passed over by the particles will be 3 : 1]

(C. U., I. Sc., 1939)

সমাধান ঃ মনে করি, P বিন্দু হইতে পতনশীল বস্তুকণা এবং Q বিন্দু হইতে ঊর্ধ্ব উৎক্ষিপ্ত বস্তুকণা পরস্পর R বিন্দুতে মিলিত হয় (চিত্র 2.2)।

$QR=y$ এবং $PQ=x$ হইলে লেখা যায়,

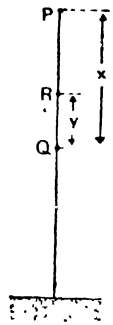
$$y=ut_1-\tfrac{1}{2}gt_1^2 \quad .... \quad \text{(i)}$$

$$x-y=\tfrac{1}{2}gt_1^2 \quad .... \quad \text{(ii)}$$

$t_1=$ যে-সময়ে Q বিন্দু হইতে উৎক্ষিপ্ত বস্তুকণা R বিন্দুতে পৌঁছিয়াছে এবং P বিন্দু হইতে পতনশীল বস্তুকণা R বিন্দুতে নামিয়াছে। $u=$ Q হইতে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর উৎক্ষেপণ-বেগ।

এখন, (i) ও (ii) হইতে পাই, $x=ut_1$ বা, $t_1=\dfrac{x}{u}$ .. (iii)

R বিন্দুতে আসিয়া P বিন্দু হইতে পতনশীল বস্তুকণার গতিবেগ v_1 হইলে লেখা যায়, $v_1=gt_1=g\dfrac{x}{u}$ .... (iv)

এই গতিবেগ নিম্নমুখী।

চিত্র 2.2

কিন্তু প্রশ্নের শর্তানুসারে, Q বিন্দু হইতে u গতিবেগে ঊর্ধ্ব উৎক্ষিপ্ত বস্তু ঠিক P বিন্দু পর্যন্ত উঠে। কাজেই,

$$0=u^2-2gx \quad \text{বা,} \quad x=\frac{u^2}{2g} \quad .... \quad \text{(v)}$$

এখন, Q বিন্দু হইতে u গতিবেগে উৎক্ষিপ্ত বস্তুটি R বিন্দুতে আসিয়া v_2 গতিবেগ লাভ করিলে লেখা যায়,

$$v_2=u-gt_1=u-g\times\frac{x}{u}=\frac{u^2-gx}{u}$$

কিন্তু $u^2=2gx$ [সমীকরণ (v) হইতে]

$$\therefore \quad v_2=\frac{2gx-gx}{u}=\frac{gx}{u} \quad .... \quad \text{(vi)}$$

এই গতিবেগ ঊর্ধ্বমুখী কাজেই, সমীকরণ (iv) এবং (vi) হইতে দেখা যাইতেছে যে,

$$v_1=v_2 \quad .... \quad \text{(vii)}$$

P বিন্দু হইতে পতনশীল বস্তুকণা-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$x-y=\tfrac{1}{2}gt_1^2=\tfrac{1}{2}g\times\frac{x^2}{u^2}=\frac{gx^2}{2u^2} \quad .... \quad \text{(viii)}$$

Q বিন্দু হইতে উৎক্ষিপ্ত কণা-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$y = ut_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = u \times \frac{x}{u} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2}$$

$$= x - \frac{gx^2}{2u^2} = \frac{2u^2x - gx^2}{2u^2} = \frac{2x.2gx - gx^2}{2u^2} = \frac{3gx^2}{2u^2} \quad \text{.... (ix)}$$

সমীকরণ (viii) এবং (ix) হইতে পাই, $\frac{y}{x-y} = \frac{3}{1}$

উদাহরণ 2.18 20 ft/s গতিবেগে নিম্নগামী একটি বেলুন হইতে একটি বস্তুকে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। বস্তুটি 10 s সময়ে ভূপৃষ্ঠে নামিয়া আসে। বস্তুটি কত গতিবেগে ভূমি স্পর্শ করিবে? বস্তুটি খসিয়া পড়িবার সময় বেলুনটি কত উচ্চে অবস্থিত ছিল?

[A body is released from a balloon which is descending with a velocity of 20 ft/s and it reaches the ground in 10 s. With what velocity does it strike the ground? How high was the balloon when the body was released?] (B. H. U. 1955)

সমাধান : ভূমি স্পর্শ করিবার মুহূর্তে বস্তুটির গতিবেগ v হইলে লেখা যায়,

$$v = u + gt = 20 + 32 \times 10 = 340 \text{ ft/s}$$

যে-মুহূর্তে বস্তুটিকে বেলুন হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হইল সেই মুহূর্তে ভূপৃষ্ঠ হইতে বেলুনের উচ্চতা h ft হইলে,

$$h = ut + \frac{1}{2}gt^2 = 20 \times 10 + \frac{1}{2} \times 32 \times 10^2 = 200 + 1600 = 1800 \text{ ft}$$

উদাহরণ 2.19 উচ্চে অবস্থিত কোন বিন্দু A হইতে একটি পাথরকে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বে উৎক্ষেপ করা হইল। বস্তুটি যখন A বিন্দু হইতে h দূরত্ব নিচে পৌঁছায় বস্তুটির তৎকালীন গতিবেগ বস্তুটি যখন A হইতে h দূরত্ব উপরে আছে তৎকালীন গতিবেগ অপেক্ষা দ্বিগুণ। দেখাও যে, বস্তুটি A বিন্দু হইতে সর্বোচ্চ যে উচ্চতা পর্যন্ত উঠে তাহার মান $\frac{5}{3}h$।

[From an elevated point A, a stone is projected vertically upwards. When the stone reaches a distance h below A, its velocity is double, when it was at a height h above A. Show that the greatest height attained by the stone above A is $\frac{5}{3}h$.]

সমাধান : মনে করি বস্তুটি u বেগে উপরের দিকে উৎক্ষিপ্ত হইয়াছে।

A বিন্দু হইতে h উচ্চতায় বস্তুটির গতিবেগ v_1 হইলে লেখা যায়,

$$v_1^2 = u^2 - 2gh$$

A বিন্দু হইতে h দূরত্ব নিচে বস্তুটির গতিবেগ $= v_2$ হইলে লেখা যায়,

$$v_2^2 = u^2 - 2g(-h) = u^2 + 2gh$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $v_2 = 2v_1$

বা, $v_2^2 = 4v_1^2$ বা, $u^2 + 2gx = 4(u^2 - 2gh)$ বা, $3u^2 = 10\,gh$

বা, $u^2 = \frac{10}{3}gh$ .... (i)

উৎক্ষিপ্ত বস্তুটি A হইতে x উচ্চতা পর্যন্ত উঠিলে $u^2 - 2gx = 0$

বা, $x = \frac{u^2}{2g}$ .... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে $x = \frac{10}{3}gh/2g = \frac{5}{3}h$

উদাহরণ 2.20 একটি মিনার হইতে এক ব্যক্তি উল্লম্বরেখা বরাবর ঊর্ধ্বমুখে 96·6 ft/s গতিবেগে একটি পাথর ছুঁড়িল। 4 s পর সে আর একটি পাথর নিচের দিকে ফেলিল। দুইটি পাথর একসঙ্গে ভূমিতে পৌছিল। মিনারটির উচ্চতা এবং দ্বিতীয় পাথরটির পতন-কাল নির্ণয় কর। ($g=32·2$ ft/s²)

[A man projects a stone vertically upwards from the top of a tower with a velocity of 96·6 ft/s. After 4 s he lets drop another stone. Both of the stones reach the ground simultaneously. Find the height of tower and the time during which the second body was falling. ($g=32·2$ ft/s²)]

সমাধান : 96·6 ft/s গতিবেগে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত বস্তু 4 s সময়ে h ft দূরত্ব অতিক্রম করিলে লেখা যায়,

$$h=ut-\tfrac{1}{2}gt^2=96·6\times4-\tfrac{1}{2}\times32·2\times4^2=128·8 \text{ ft}$$

এই সময় বস্তুটির গতিবেগ, $v=u-gt=96·6-32·2\times4=-32·2$ ft/s

ঋণাত্মক চিহ্নের তাৎপর্য এই যে, এই গতিবেগ নিম্নাভিমুখী

মনে করি, মিনারের উচ্চতা $=h$ ft

যদি ধরিয়া লওয়া যায় যে, দ্বিতীয় পাথরটি ছাড়িবার t s পর পাথর দুইটি (একই সঙ্গে) ভূমি স্পর্শ করে তাহা হইলে লেখা যায় যে,

$$128·8+h=vt+\tfrac{1}{2}gt^2=32·2\ t+\tfrac{1}{2}\times32·2\times t^2 \quad \ldots \quad (1)$$

[প্রথম পাথরটির গতি বিবেচনা করিয়া]

আবার, $h=\tfrac{1}{2}\times g\times t^2=\tfrac{1}{2}\times32·2\times t^2 \quad \ldots. \quad (ii)$

[দ্বিতীয় পাথরটির গতি বিবেচনা করিয়া]

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $128·8=32·2\times t$ বা, $t=4$ s

$\therefore$ মিনারের উচ্চতা $=\tfrac{1}{2}\times g\times t^2=\tfrac{1}{2}\times32·2\times4^2=257·6$ ft

উদাহরণ 2.21 একটি বস্তুকে u গতিবেগে উল্লম্বভাবে উপরের দিকে ছোঁড়া হইল এবং t s পর একই স্থান হইতে অপর একটি বস্তুকে একই গতিবেগে একইভাবে ছোঁড়া হইল। দেখাও যে, উহারা উৎক্ষেপণ-বিন্দু হইতে $(4u^2-g^2t^2)/8g$ দূরত্বে দ্বিতীয় বস্তুটি ছুঁড়িবার $\left(\frac{u}{g}-\frac{t}{2}\right)$ s পর পরস্পর মিলিত হয়।

[A body is projected vertically upwards with a velocity u and t s afterwards another body is similarly projected from the same velocity. Show that they meet at a distance $(4u^2-g^2t^2)/8g$ from the point of projection after $\left(\frac{u}{g}-\frac{t}{2}\right)$ s from the instant of projection of the second body.]

সমাধান : মনে করি, দ্বিতীয় বস্তুটিকে ছুঁড়িয়া দিবার t_1 s পর প্রথম ও দ্বিতীয় বস্তু পরস্পর মিলিত হয়। কাজেই প্রশ্নের শর্তানুসারে, প্রথম বস্তুটিকে ছুঁড়িয়া দিবার $(t+t_1)$ s পর প্রথম বস্তু যে-উচ্চতায় থাকে, দ্বিতীয় বস্তুটি ছুঁড়িবার t_1 s পর দ্বিতীয় বস্তুটি সেই উচ্চতায় উঠে। মনে করি, বস্তুদ্বয় উহাদের উৎক্ষেপণ-বিন্দু হইতে h উচ্চতায় পরস্পর মিলিত হয়। কাজেই লেখা যায়,

$$h=u(t+t_1)-\frac{1}{2}g(t+t_1)^2 \quad \ldots. \quad \text{(i)}$$

(প্রথম বস্তুর গতি বিবেচনা করিয়া)

এবং $h=ut_1-\frac{1}{2}gt_1{}^2 \quad \ldots. \quad \text{(ii)}$

(দ্বিতীয় বস্তুর গতি বিবেচনা করিয়া)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$0=ut-\frac{1}{2}g[(t+t_1)^2-t_1{}^2)]$$

বা, $0=ut-\frac{1}{2}g(t+2t_1)t$

কিন্তু যেহেতু $t\neq 0$, আমরা লিখিতে পারি যে, $u-\frac{1}{2}g(t+2t_1)=0$

বা, $u=\frac{1}{2}gt+gt_1$ বা, $t_1=\left(\frac{u}{g}-\frac{t}{2}\right) \quad \ldots. \quad \text{(iii)}$

এখন, (iii) হইতে t_1-এর মান বসাইয়া সমীকরণ (ii) হইতে পাই,

$$h=u\left[\frac{u}{g}-\frac{t}{2}\right]-\frac{1}{2}g\left[\frac{u}{g}-\frac{t}{2}\right]^2$$

$$=\frac{2u^2-gtu}{2g}-\frac{(2u-gt)^2}{8g}=\frac{4u^2-g^2t^2}{8g}$$

উদাহরণ 2.22 57600 ফুট উচ্চতায় একটি উল্কা ফাটিয়া গেল এবং বিস্ফোরণে উৎপন্ন উল্কাখণ্ডগুলির একটি বিস্ফোরণের ফলে সঙ্গে সঙ্গে স্থির অবস্থায় আসিল। ইহার পর ঐ উল্কাখণ্ডটি 32 ft/s² (অভিকর্ষজ ত্বরণ) লইয়া নিচে নামিতে লাগিল। বিস্ফোরণের শব্দ 1100 ft/s গতিবেগে চলিতে লাগিল। কোন্‌টি আগে ভূমিতে পৌঁছিবে—উল্কাখণ্ডটি, নাকি শব্দ? কোন্‌টি কত সময় লইবে?

[A meteorite burst at a height of 57600 ft and one of the fragments was brought instantaneously to rest by the explosion. It then descended with an acceleration of 32 ft/s², while the sound of explosion travelled with a velocity of 1100 ft/s. Which reached the ground first, the fragment or the sound, and what time did each take ?]

সমাধান : মনে করি, উল্কাখণ্ডটি t_1 সেকেণ্ডে ভূমিতে নামিয়া আসে। শর্তানুসারে লেখা যায়, $57600=\frac{1}{2}\times 32\times t_1{}^2$

$$t_1{}^2=\frac{57600}{16}=3600$$

$$\therefore \quad t_1=60 \text{ s}$$

শব্দ 1100 ft/s গতিবেগে চলে। কাজেই, বিস্ফোরণের শব্দ ভূমিতে নামিতে সময় নেয়,

$$t_2=\frac{57600}{1100}\text{ s}=52{\cdot}36 \text{ s}$$

সুতরাং, দেখা যাইতেছে যে, $t_1>t_2$; অর্থাৎ, উল্কাখণ্ড অপেক্ষা বিস্ফোরণের শব্দ আগে ভূমিতে পৌঁছিবে।

উদাহরণ 2.23 10 m/s² লব্ধি ত্বরণে একটি রকেটকে ঊর্ধ্বমুখে উৎক্ষেপ করা হইল। এক মিনিট পর জ্বালানি নিঃশেষিত হইল এবং রকেটটি উহার ঊর্ধ্বগতি বজায় রাখিল। রকেটটি সর্বোচ্চ কত উচ্চতা পর্যন্ত উঠিবে?

[A rocket is fired vertically from the ground with a resultant vertical acceleration of 10 m/s². The fuel is finished in one minute and it continues to move up What is the maximum height reached ?]

সমাধান : এক মিনিট বা 60 s-এর রকেটটি যে-উর্ধ্বমুখী গতিবেগ লাভ করে তাহার মান

$$v = u + ft = 0 + 10 \times 60 = 600 \text{ m/s}$$

জ্বালানি শেষ হইবার পূর্ব পর্যন্ত রকেট যে-উচ্চতায় উঠিবে তাহার মান

$$h_1 = ut + \tfrac{1}{2}ft^2 = 0 \times 60 + \tfrac{1}{2} \times 10 \times 60^2 = 18000 \text{ m}$$

এই উচ্চতায় উঠার পর রকেটের ত্বরণ থাকে না। যদি রকেটটি আরও h_2 উচ্চতা উঠে তাহা হইলে লেখা যায়, $0 = v^2 - 2gh_2$

$$\text{বা,} \quad h_2 = \frac{v^2}{2g} = \frac{600 \times 600}{2 \times 9{\cdot}8} = 18367{\cdot}35 \text{ m}$$

কাজেই, রকেটের সর্বোচ্চ উচ্চতা

$$= h_1 + h_2 = 18000 + 18367{\cdot}35 = 36367{\cdot}35 \text{ m}$$

উদাহরণ 2.24 একটি বস্তু একটি মসৃণ নততল বরাবর নিচের দিকে নামিতে লাগিল। একই মুহূর্তে একই উচ্চতা হইতে অপর একটি বস্তুকে মুক্তভাবে পড়িতে দেওয়া হইল। উহাদের মধ্যে (i) কোন্‌টি আগে ভূমি স্পর্শ করিবে এবং (ii) কোন্‌টি অপেক্ষাকৃত বেশি গতিবেগে ভূমি স্পর্শ করিবে ?

[A body starts sliding down a smooth inclined plane. Another body is allowed to fall from the same height at the same time. Which one of them will strike the ground (i) earlier, (ii) with greater velocity ?]

সমাধান : মনে করি, AB নততলটি অনুভূমিক তলের সহিত θ কোণে আনত (চিত্র 2·3)।

নততল বরাবর A হইতে B পর্যন্ত আসিতে সময় লাগে t_1 s

কাজেই, $AB = ut_1 + \tfrac{1}{2}ft_1^2 = 0 \times t + \tfrac{1}{2}g \sin\theta \times t_1^2$ ... (i)

কেননা, নততল বরাবর বস্তুটির ত্বরণ $= g \sin\theta$

ভূমি হইতে A বিন্দুটির উচ্চতা h হইলে লেখা যায়,

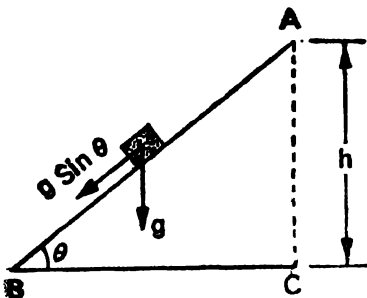
চিত্র 2.3

$$AB = \frac{h}{\sin\theta} \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\frac{h}{\sin\theta} = \tfrac{1}{2}g \sin\theta \times t_1^2$$

$$\therefore \quad t_1^2 = \frac{2h}{g} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\text{বা,} \quad t_1 = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{(iii)}$$

অভিকর্ষের টানে মুক্তভাবে পতনশীল বস্তুর h উচ্চতা নামিতে যদি t_2 s সময় লাগে, তাহা হইলে লেখা যায়,

$$h = \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$\text{বা, } t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \dots \quad \text{(iv)}$$

সমীকরণ (iii) এবং (iv) হইতে দেখা যাইতেছে যে, $t_1 > t$, কেননা, $\frac{1}{\sin\theta} > 1$; কাজেই বুঝা যাইতেছে যে, যে- বস্তুটি মুক্তভাবে উল্লম্ব রেখা বরাবর পড়িতেছে সেই বস্তুটিই আগে ভূমি স্পর্শ করিবে।

প্রথম ক্ষেত্রে ভূমি স্পর্শ করিবার সময় বস্তুটির গতিবেগ, $v_1 = u + ft_1$

$$= 0 + g \sin\theta \times t_1$$

$$= g \sin\theta \times \frac{1}{\sin\theta} \times \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ বা, } v_1 = \sqrt{2gh} \quad \dots \quad \text{(v)}$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ভূমি স্পর্শ করিবার সময় বস্তুটির গতিবেগ $v_2 = gt_2$

$$= g \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

কাজেই, $v_1 \quad v_2$

অর্থাৎ, বস্তুদ্বয় একই গতিবেগে ভূমি স্পর্শ করিবে।

প্রশ্নমালা 2

1. উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত কোন বস্তু 640 ft পর্যন্ত উঠে। কত গতিবেগে উহা পুনরায় ভূপৃষ্ঠে নামিয়া আসিবে ?

[A body is thrown vertically upwards and just reaches a height of 640 ft. With what speed will it reach the ground ?]

[202·4 f· (প্রায়)]

2. ভূপৃষ্ঠ হইতে 48 ft s² গতিবেগে একটি বস্তু উল্লম্বরেখা বরাবর ঊর্ধ্বে উৎক্ষিপ্ত হইল। বস্তুটি কতটা উচ্চতা পর্যন্ত উঠিবে ?

[A body is projected vertically upwards with a velocity of 48 ft/s. How high will it rise ?] [36 ft]

3. একটি বালক 256 ft/s গতিবেগে একটি ক্রিকেট বলকে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বমুখে ছুঁড়িল। বলটি কতটা উচ্চতা পর্যন্ত উঠিবে এবং কতক্ষণ পর বলটি বালকটির হাতে ফিরিয়া আসিবে ?

[A boy throws a cricket ball vertically upward with a velocity of 256 ft/s. How high will it rise and how many seconds will elapse before he catches it on return ? [1024 ft, 16 s]

4. একটি বস্তুকে স্থির অবস্থা হইতে অভিকর্ষের প্রভাবে নিচে পড়িতে দেওয়া হইল। 2·5 s পর বস্তুটির গতিবেগ 24·5 m/s হইলে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কত ? এই সময়ে বস্তুটি কতটা নিচে নামিবে ?

[A body is let fall under gravity. If the body acquires a velocity of 24·5 m/s in 2·5 seconds, what is the value of the acceleration due to gravity ? How far will the body describe during this time ?]
[9·8 m/s^2, 30·625 m]

5 কোন বস্তুকে 400 ft/s^2 বেগে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বে উৎক্ষেপ করা হইল। 1600 ft উপরে উঠিতে উহার কত সময় লাগিবে ? তখন উহার গতিবেগ কত হইবে ?
($g=32$ ft/s^2)

[A body is projected vertically upwards with a velocity of 400 ft/s. What time will the body take to reach a height of 1600 ft ? What is the velocity of the body at that time ? ($g=32$ ft/s^2)]
[5 s, 240 ft/s]

6. 400 ft উচ্চ একটি মিনার হইতে একটি পাথর ছাড়িয়া দেওয়া হইল। একই সময়ে মিনারের তলদেশ হইতে অপর একটি পাথরকে 300 ft/s গতিবেগে ঊর্ধ্বমুখে উৎক্ষেপ করা হইল। কখন ও কোথায় ইহারা পরস্পরের সহিত মিলিত হইবে ? ($g=32$ ft/s^2)

[A stone is dropped from the top of a tower 400 ft high. At the same instant another stone is thrown upwards with a velocity of 300 ft/s from the bottom of the tower. When and where will the stones meet ? ($g=32$ ft/s^2)] [1·33 s, ভূপৃষ্ঠ হইতে 371·56 ft ঊর্ধ্বে]

7. ভূপৃষ্ঠ হইতে 1500 ft উচ্চতায় অবস্থিত একটি উত্থানরত বেলুন হইতে একটি পাথর ফেলা হইল। পাথরটি 16 s পরে ভূমি স্পর্শ করে। যে-মুহূর্তে পাথরটি ফেলা হইয়াছিল সে মুহূর্তে বেলুনটির গতিবেগ কত ছিল ?

[A stone is dropped from a rising balloon at a height of 1500 ft above the ground. The stone reaches the ground in 16 seconds. What was the velocity of the balloon just at the moment when the stone was dropped ?]
[162·25 ft/s]

8. একটি স্থির বেলুন হইতে ফেলা একটি বস্তু উহার পতনকালের শেষ $\frac{1}{4}$ s সময়ে 81 ft উচ্চতাবিশিষ্ট একটি মিনার অতিক্রম করে। বেলুনটির উচ্চতা এবং বস্তুটি যখন ভূমি স্পর্শ করে তখন উহার গতিবেগ কত নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g=32$ ft/s^2।

[A body dropped from a balloon at rest clears a tower 81 ft high during the last quarter second of its motion. Find the height of the balloon and the velocity of the body when it reaches the ground. Assume that the acceleration due of gravity, $g=32$ ft/s^2.]
[1681 ft, 328 ft/s]

9. একই সঙ্গে দুইটি পাথরকে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বে উৎক্ষেপ করা হইল। প্রথম পাথরটি 880 ft বেশি উচ্চতা পর্যন্ত উঠিল এবং দ্বিতীয়টি অপেক্ষা 10 s পরে ভূমিতে নামিয়া আসিল। পাথর দুইটি কী গতিবেগে উৎক্ষিপ্ত হইয়াছিল ?

[Two stones are simultaneously projected vertically upwards. The first stone rises 880 ft higher than the second stone and returns to the ground 10 s later. With what velocities were the stones projected ?]
[$u_1=256$ ft/s, $u_2=96$ ft/s]

10. একটি গভীর কুয়ার মধ্যে একখণ্ড পাথর ফেলা হইল এবং 7·7 s পরে উহার জলে পড়িবার শব্দ শোনা গেল। শব্দের গতিবেগ 1120 ft/s হইলে কুয়ার গভীরতা নির্ণয় কর।

[A stone is dropped into a well and the sound of its striking the water is heard in 7·7 s. If the velocity of sound be 1120 ft/s,. find the depth of the well.] [784 ft]

11. কোন মিনারের শীর্ষ হইতে একখণ্ড পাথর যখন 25 ft নামিয়াছে ঠিক সেই সময় মিনারের শীর্ষে 100 ft নিচ হইতে অপর একটি পাথর ফেলা হইল। যদি পাথর দুইটি স্থির অবস্থা হইতে পড়ে এবং একই সঙ্গে ভূমি স্পর্শ করে তাহা হইলে মিনারের উচ্চতা কত হইবে ?

[A stone falling from the top of a tower has descended 25 ft when another is let fall from a point 100 ft below the top. If the stones fall from rest and reach the ground together what is the height of the tower ?] [156·25 ft]

12. একই সঙ্গে দুইটি বস্তুর একটিকে 100 ft উপর হইতে এবং অপরটিকে 200 ft উপর হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। যখন প্রথম বস্তুটি মাটিতে পৌঁছায় সেই মুহূর্তে দ্বিতীয়টির উচ্চতা ও গতিবেগ নির্ণয় কর।

[Two heavy bodies are dropped at the same time, one from a height of 100 ft and the other from a height of 200 ft. Find the height and velocity of the second when the first reaches the ground.) [100 ft, 80 ft/s]

13. 4 ft/s গতিবেগে একটি লিফ্‌ট উপরে উঠিতেছে। হঠাৎ লিফ্‌টটি হইতে একটি স্ক্রু খসিয়া পড়িল। 2 s পর স্ক্রুটির গতিবেগ কত হইবে এবং ঐ মুহূর্তে লিফ্‌ট এবং স্ক্রু-এর মধ্যে ব্যবধান কত হইবে ?

[A lift is ascending at 4 ft/s. A screw drops from the lift all on a sudden. What will be the velocity of the screw at the end of 2 s, and what will be the distance between the lift and the screw at the moment ?] [– 60 ft/s, 64 ft]

14. 16 ft/s গতিবেগে উত্থানরত একটি বেলুন হইতে একটি পাথর ফেলা হইল। পাথরটি 10 s পরে ভূমিতে পৌঁছিল। পাথরটি ভূমি হইতে সর্বোচ্চ কোন্‌ উচ্চতায় উঠিবে এবং যখন পাথরটিকে ছাড়িয়া দেওয়া হইয়াছিল তখন বেলুনটির উচ্চতা কত ছিল তাহা নির্ণয় কর।

[A stone is let fall from a balloon ascending with a velocity of 16 ft/s. The stone takes 10 s to reach the ground. Find the greatest height above the ground attained by the stone and also the height of the balloon when the stone was released.] [1444 ft, 1440 ft]

15. একটি পাথরকে 100 m উঁচু মিনারের চূড়া হইতে উল্লম্বভাবে 30 m/s প্রারম্ভিক বেগে নিম্নাভিমুখী ছোঁড়া হইল। 2 s পর ইহার গতিবেগ কী হইবে ? পাথরটির মাটিতে পৌঁছিতে কত সময় লাগিবে ? কোন্‌ গতিবেগে উহা ভূমি স্পর্শ করিবে ?

[A stone is thrown vertically downward from the top of a tower 100 m high with an initial velocity of 30 m/s. What is its velocity at the end of 2 s? How long will it take to reach the ground? With what velocity does it strike the ground?]

[49·6 m/s, 2·4 s, 53·5 m/s]

16. একটি বেলুন 12 m/s গতিবেগে উপরের দিকে উঠিতেছে। ইহা যখন ভূমি হইতে 80 m উচ্চতায় বিদ্যমান তখন উহা হইতে একটি পাথর ফেলা হইল। পাথরটি কতক্ষণ পর ভূমি স্পর্শ করিবে? ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ $=10$ m/s^2।

[A balloon which is ascending at the rate of 12 m/s is 80 m above the ground when a stone is dropped from it. How long will it take to reach the ground? Assume that the acceleration due to gravity $=10$ m/s^2]

[5·38 s (প্রায়)]

17. একটি পাথরকে কোন উচ্চ স্থান হইতে ফেলা হইল এবং 3 s পর অপর একটিকে 150 ft/s গতিবেগে নিম্নাভিমুখে ছোঁড়া হইল। দ্বিতীয় পাথরটি প্রথমটিকে কখন এবং কোথায় অতিক্রম করিবে?

[A stone is dropped from a high altitude and 3 s later another stone is projected vertically downward with a velocity of 150 ft/s. When and where will the second stone overtake the first?]

[প্রথম পাথরটি ফেলার 5·67 s পর, 514 ft নিচে]

18. একটি পাহাড়ের ধার হইতে একটি পাথর ফেলা হইল। পাহাড়ের ধারে দণ্ডায়মান এক ব্যক্তি 6 s পরে পাথরটির মাটিতে পড়ার শব্দ শুনিল। পাহাড়টির উচ্চতা কত? ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ 10 m/s^2 এবং বায়ুতে শব্দের গতিবেগ 300 m/s।

[A stone was allowed to fall from the edge of a cliff. A man standing on the edge heard the sound of its striking the ground 6 s later. How high was the cliff? Assume that the acceleration due to gravity is 10 m/s^2 and the velocity of sound in air is 300 m/s.]

[151 m (প্রায়)]

19. A বস্তুকে u প্রাথমিক বেগে উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বাভিমুখে ছোঁড়া হইল এবং B বস্তুটি H উচ্চতা হইতে শূন্য প্রাথমিক গতিবেগ পড়িল। উভয় বস্তু যদি একই সঙ্গে চলিতে শুরু করে তাহা হইলে সময় t-এর সহিত A এবং B বস্তুর দূরত্ব s কীরূপে পরিবর্তিত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

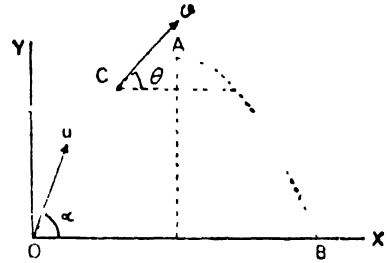
[A body A is thrown vertically upward with an initial velocity u and a body B falls from a height H with zero initial velocity. Find how the distance s between the bodies A and B depend on time t, if the bodies began to move simultaneously.] [$s=H-ut$]

20. একটি পাথরকে একটি পাহাড়ের শীর্ষ হইতে নিচে ফেলা হইল এবং ইহা t সেকেণ্ডে শেষ h ft দূরত্ব অতিক্রম করিল। দেখাও যে, বস্তুটির মোট পতনকাল $\left(\frac{t}{2}+\frac{h}{gt}\right)$ s, এখানে g ft/s^2 হইল অভিকর্ষজ ত্বরণ।

[A stone is allowed to fall from rest from the top of a cliff and takes t s to fall the last h ft. Show that the total time of fall is $\left(\frac{t}{2}+\frac{h}{gt}\right)$ s, where g ft/s^2 is the acceleration due to gravity.]

তৃতীয় পরিচ্ছেদ
প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতি

3.1 সূচনা : কোন বস্তুকণা উল্লম্ব রেখা বরাবর ঊর্ধ্বমুখে উৎক্ষিপ্ত হইলে উহা কিছুদূর উঠিয়া পুনরায় পূর্বের সরলরৈখিক পথে ফিরিয়া আসে। ইহার কারণ এই যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তুর উপর উল্লম্ব অভিমুখে ক্রিয়া করে। যখন কোন বস্তুকে অনুভূমিক রেখা এবং উল্লম্ব রেখার সহিত তির্যকভাবে প্রক্ষেপ করা হয় তখন উল্লম্বতলে উহার গতিপথ বক্রাকার হয় এবং বস্তুটি এই বক্রাকার পথ ধরিয়া ভূপৃষ্ঠে নামিয়া আসে। যদি বায়ুজনিত বাধা উপেক্ষণীয় হয় এবং যদি প্রক্ষিপ্ত বস্তুটির সঞ্চারপথ (trajectory)-এর সর্বত্র অভিকর্ষজ ত্বরণের মান সমান হয়, তাহা হইলে ইহার সঞ্চারপথটি অধিবৃত্তাকার (parabolic) হইবে।

3.2 সর্বোচ্চ উচ্চতা, উত্থানকাল এবং প্রক্ষেপ কোণ : মনে করি, কোন বস্তুকে অনুভূমিক রেখার সহিত α কোণ করিয়া u বেগে ছোঁড়া হইয়াছে (চিত্র 3.1)। যে-বিন্দু হইতে বস্তুটি প্রক্ষিপ্ত হইল সেই বিন্দুকে মূলবিন্দু, অনুভূমিক রেখাকে x-অক্ষ এবং উল্লম্ব রেখাকে y-অক্ষ ধরিয়া একটি নির্দেশতন্ত্র কল্পনা করা হইল। প্রক্ষিপ্ত বস্তুটির গতিবেগের উল্লম্ব উপাংশ $u \sin \alpha$ এবং অনুভূমিক উপাংশ $u \cos \alpha$। অভিকর্ষের প্রভাবে কেবল প্রক্ষিপ্ত বস্তুটির গতিবেগের উল্লম্ব উপাংশ প্রভাবিত হয়, কেননা অভিকর্ষজ বল বস্তুটির উপর উল্লম্বভাবে নিম্নাভিমুখী ক্রিয়া করে। বস্তুটি যখন উপরে উঠিতে থাকে তখন অভিকর্ষ বলের বিরোধিতার ফলে ইহার গতিবেগের উল্লম্ব উপাংশ হ্রাস পাইতে থাকে এবং একসময় গতিবেগের এই উপাংশের মান শূন্য হয়। এই সময়ই বস্তু উহার সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠে; ইহার পর অভিকর্ষজ ত্বরণের প্রভাবে বস্তুটি নিম্নাভিমুখে আসিতে থাকে। লক্ষণীয় যে, বস্তুর গতিবেগের অনুভূমিক উপাংশের উপর অভিকর্ষের কোন প্রভাব নাই। গতিবেগের এই উপাংশের ক্রিয়ায় বস্তুটি অনুভূমিক অভিমুখে সমবেগে চলিতে থাকে।

চিত্র 3.1

(i) বস্তুটি যখন উহার সর্বোচ্চ অবস্থানে পৌঁছিবে তখন উহার গতিবেগের উল্লম্ব উপাংশের মান শূন্য। কাজেই, যদি সর্বোচ্চ উচ্চতা H হয় তাহা হইলে, $v^2=u^2-2fs$ সমীকরণ হইতে পাই,

$$0=(u \sin \alpha)^2-2gH$$

$$\text{বা, } H=\frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} \quad \dots \quad (3.1)$$

(ii) সর্বোচ্চ বেগের অবস্থান A বিন্দুতে বস্তুটির গতির উল্লম্ব উপাংশ শূন্য হয়। কাজেই O বিন্দু হইতে A বিন্দুতে উঠিবার সময় বা উত্থানকাল T_1 হইলে লেখা যায়,

$$0 = u \sin\alpha - gT_1 \quad \text{বা,} \quad T_1 = \frac{u \sin\alpha}{g} \quad .... \quad (3.2)$$

সর্বোচ্চ বিন্দুতে উঠিবার পর বস্তুটি পুনরায় নিচের দিকে নামিতে থাকে এবং কিছু সময় পরে বস্তুটি পুনরায় O বিন্দুগামী অনুভূমিক তলে নামিয়া আসে। O বিন্দু হইতে যাত্রা করিয়া OAB পথে অনুভূমিক তল OB-তে নামিয়া আসিতে বস্তুটি T সময় লইলে দেখা যায়, $0 = u \sin\alpha . T - \frac{1}{2} gT^2$

কেননা, T সময়ে উল্লম্ব অভিমুখে বস্তুর মোট সরণ শূন্য। কাজেই, মোট উড্ডয়ন-কাল,

$$T = \frac{2u \sin\alpha}{g} \quad .... \quad (3.3)$$

ধরি, সর্বোচ্চ অবস্থান A হইতে OB অনুভূমিক তলে নামিয়া আসিতে বস্তুটির সময় লাগে T_2। কাজেই, লেখা যায়,

$$H = \frac{1}{2} g T_2^2 \quad \text{বা,} \quad T_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad .... \quad (3.4)$$

সমীকরণ (3.1) হইতে H-এর মান বসাইয়া পাই,

$$T_2 = \sqrt{\frac{2u^2 \sin^2\alpha}{2g^2}} = \frac{u \sin\alpha}{g} \quad .... \quad (3.5)$$

সুতরাং, সমীকরণ (3.2) এবং (3.5) হইতে সিদ্ধান্তে আসা যায় যে,

$$\text{উত্থানকাল, } T_1 = \text{পতনকাল, } T_2 \quad .... \quad (3.6)$$

(iii) প্রক্ষিপ্ত বস্তুটি উহার মোট চলনকাল T সময়ে অনুভূমিক অভিমুখে যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহাকে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর পাল্লা (range) বলা হয়। ইহাকে R দ্বারা সূচিত করিলে লেখা যায়,

$$R = OB = u \cos\alpha . T$$

সমীকরণ (3 3) হইতে T-এর মান বসাইয়া পাই,

$$R = u \cos\alpha . \frac{2u \sin\alpha}{g} = \frac{2u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

$$\text{বা,} \quad R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \quad .... \quad (3.7)$$

(iv) প্রক্ষিপ্ত বস্তুটি যখন h উচ্চতায় C বিন্দুতে পৌঁছে তখন যদি উহার গতিবেগ v হয় এবং যদি অনুভূমিক রেখার সহিত বস্তুর গতিমুখ θ কোণ করে তাহা হইলে

$$v \cos\theta = u \cos\alpha = \text{অনুভূমিক গতিবেগ}$$

আবার, $v^2 - u^2 - 2fs$—এই সমীকরণ হইতে পাই,

$$v^2 \sin^2\theta = u^2 \sin^2\alpha - 2gh$$

$$\therefore \quad v^2 = v^2 \cos^2\theta + v^2 \sin^2\theta$$

$$= u^2 \cos^2\alpha + u^2 \sin^2\alpha - 2gh = u^2 - 2gh$$

$$\text{বা,} \quad v = \sqrt{u^2 - 2gh} \quad .... \quad (3.8)$$

লব্ধি গতিবেগ v অনুভূমিক রেখার সহিত θ কোণ করিলে লেখা যায়,

$$\tan\theta = \frac{v\ \sin\theta}{v\ \cos\theta} = \frac{\sqrt{u^2\ \sin^2\alpha - 2gh}}{u\ \cos\alpha}$$

অনুসিদ্ধান্ত : (*i*) সমীকরণ (3.7) হইতে দেখা যাইতেছে যে, কোন নির্দিষ্ট গতিবেগে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর পাল্লা (অনুভূমিক অভিমুখ অতিক্রান্ত দূরত্ব) OB-এর মান

$$R = \frac{u^2\ \sin 2\alpha}{g} \qquad \dots \qquad (3.9)$$

যখন $\sin 2\alpha = 1$ তখন R-এর মান সর্বোচ্চ। অর্থাৎ, পাল্লা সর্বোচ্চ হইবার শর্ত হইল, $2\alpha = 90°$

$$\text{বা,}\quad \alpha = 45°$$

কাজেই, সিদ্ধান্তে আসা যায় যে, **প্রক্ষেপ কোণের মান 45° হইলে বস্তুটি অনুভূমিক অভিমুখে সর্বোচ্চ দূরত্ব অতিক্রম করিবে।** অনুভূমিক দূরত্বের সর্বোচ্চ মান $R_{max} = \frac{u^2}{g}$ .... (3.10)

(v) বস্তুটি যখন B বিন্দুতে অর্থাৎ O বিন্দুগামী অনুভূমিক তলে নামিয়া আসে তখন $h = 0$; কাজেই, সমীকরণ (3.8) এবং (3.9) হইতে লেখা যায়,

$$v^2 = u^2 \text{ এবং } \tan^2\theta = \tan^2\alpha$$

কাজেই, B বিন্দুতে বস্তুটির গতিবেগ হইল u এবং ইহা x-অক্ষের সহিত $(\pi - \alpha)$ কোণ উৎপন্ন করে।

3.3 প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথ : বায়ুর প্লবতা এবং ঘর্ষণজনিত বাধা উপেক্ষা করিলে দেখান যায় যে, অনুভূমিক রেখার সহিত তির্যক্-ভাবে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথ অধিবৃত্তাকার।

একটি বস্তুকণা O বিন্দু হইতে অনুভূমিক রেখার সহিত α কোণে u বেগে প্রক্ষিপ্ত হইল। O বিন্দুগামী অনুভূমিক রেখাকে x-অক্ষ এবং O বিন্দুগামী উলম্ব রেখাকে y-অক্ষ ধরা হইল। মনে করি, প্রক্ষেপের t সময় পর বস্তুটি P বিন্দুতে পৌঁছিয়াছে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে লেখা যায়,

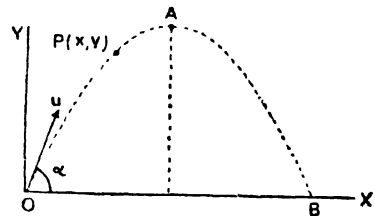
$$x = u\ \cos\alpha . t \qquad \dots \qquad (i)$$

$$\text{এবং } y = u\ \sin\alpha . t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \dots \qquad (ii)$$

(i) এবং (ii) হইতে t অপনয়ন করিয়া প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের সমীকরণ পাওয়া যাইবে। সমীকরণ (i) হইতে পাই,

$$t = \frac{x}{u\ \cos\alpha} \qquad \dots \qquad (iii)$$

চিত্র 3.2

(ii) নং সমীকরণে t-এর এই মান বসাইয়া পাই,

$$y = u\ \sin\alpha . \frac{x}{u\ \cos\alpha} - \tfrac{1}{2}g\ \frac{x^2}{u^2\ \cos^2\alpha}$$

বা, $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ .... (3.11)

উপরের সমীকরণটি $y = Ax + Bx^2$-এর অনুরূপ আকারের বলিয়া ইহা একটি অধিবৃত্ত সূচিত করে।

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 3.1 একটি বস্তুকে অনুভূমিক তলের সহিত 60° কোণে 88 ft/s গতিবেগে প্রক্ষেপ করা হইল। বস্তুটি সর্বোচ্চ কত উচ্চতায় উঠিবে এবং ঐ উচ্চতায় পৌঁছিতে কত সময় লাগিবে নির্ণয় কর।

[A body is projected at an angle 60° with the horizontal plane with a velocity of 88 ft/s. Find the maximum height attained by the body and the time taken to reach that height.]

সমাধান : এখানে, প্রক্ষেপ বেগ, $u = 88$ ft/s
এবং প্রক্ষেপ কোণ, $\alpha = 60°$

কাজেই, বস্তুটির চরম উচ্চতা, $H = \dfrac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$

$$= \frac{88^2 \times \sin^2 60°}{2 \times 32} = \frac{88^2 \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{2 \times 32} = 90\tfrac{3}{4} \text{ ft}$$

বস্তুটির উত্থানকাল অর্থাৎ চরম উচ্চতায় পৌঁছিবার সময়,

$$T = \frac{u \sin\alpha}{g} = \frac{88 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{32} = \frac{11\sqrt{3}}{8} = 2\cdot 38 \text{ s (প্রায়)}$$

উদাহরণ 3.2 একটি বালক উল্লম্ব অভিমুখে ছুঁড়িয়া একটি বলকে 150 ft উচ্চে তুলিতে পারে। ঐ বালক বলটিকে অনুভূমিক অভিমুখে সর্বোচ্চ কোন্ দূরত্বে ছুঁড়িতে পারিবে? দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বলটি কতক্ষণ বায়ুতে থাকিবে? ($g = 32$ ft/s²)

[A boy can throw a ball 150 ft vertically upwards. Find the greatest horizontal distance he can throw the ball. How long will the ball be in the air in the second case ? ($g = 32$ ft/s²)]

সমাধান : মনে করি, বালকটি u বেগে বলটিকে উৎক্ষেপ করে। উল্লম্ব অভিমুখে বলটি h উচ্চতা পর্যন্ত উঠিলে লেখা যায়,

$$h = \frac{u^2}{2g} = 150 \text{ ft (শর্তানুসারে)} \quad .... \quad (i)$$

বলটিকে অনুভূমিক রেখার সহিত 45° কোণে ছুঁড়িলে উহা অনুভূমিক অভিমুখে সর্বোচ্চ দূরত্ব অতিক্রম করে। এই সর্বোচ্চ দূরত্বের মান,

$$R_{max} = \frac{u^2}{g} \quad .... \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $R_{max} = 300$ ft

আমরা জানি যে, কোন বস্তুকে u বেগে অনুভূমিক রেখার সহিত α কোণে ছুঁড়িলে মোট উড্ডয়ন-কাল (time of flight)

$$T=\frac{2u\sin\alpha}{g} \qquad \text{এখানে, } \frac{u^2}{g}=300$$

বা, $u=\sqrt{32\times300}$ ft/s $=40\sqrt{6}$ ft/s

$$\sin\alpha=\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ T=\frac{2\times40\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{32}=\frac{5\sqrt{3}}{2}=4{\cdot}33 \text{ s}$$

উদাহরণ 3.3 1600 ft উচ্চতায় ঘণ্টায় 200 মাইল গতিবেগে অনুভূমিকভাবে উড়ন্ত উড়োজাহাজ হইতে একটি বোমা ফেলা হইল। (i) ভূমি স্পর্শ করিবার পূর্বে বোমাটি অনুভূমিক অভিমুখে কতটা যাইবে? (ii) ভূমি স্পর্শ করিবার পূর্বে ইহার গতিবেগ কত হইবে? (iii) বোমাটি কতক্ষণ বায়ুতে থাকিবে?

[A bomb is released from an aeroplane flying horizontally at an elevation of 1600 ft with a velocity of 200 miles/hr. (i) How far does the bomb travel horizontally before striking the earth? (ii) What will be its velocity just before striking? (iii) How long will it remain in air?]

সমাধান : অনুভূমিক রেখা বরাবর বোমার গতিবেগ, $u=200$ miles/hr

$$=\frac{200\times1760\times3}{60\times60}=\frac{880}{3} \text{ ft/s}$$

উল্লম্ব রেখা বরাবর এই গতিবেগের কোন উপাংশ নাই। কাজেই, উল্লম্ব অভিমুখে বোমার প্রাথমিক গতিবেগ শূন্য। বোমাটি যদি t s পর ভূমিতে পৌঁছে তাহা হইলে,

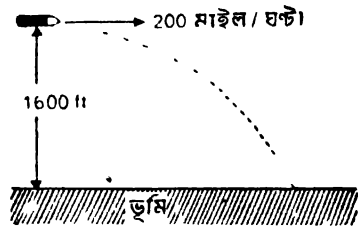
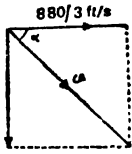
$$1600=\tfrac{1}{2}gt^2=\tfrac{1}{2}\times32\times t^2$$

বা, $t^2=100$ বা, $t=10$ s

এই সময়ের মধ্যে অনুভূমিক অভিমুখে বোমাটি যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহার মান

চিত্র 3.3

$$x=ut=\frac{880}{3}\times10 \text{ ft}=\frac{880\times10}{3\times3\times1760}=\frac{5}{9} \text{ miles}$$

বস্তুটি যখন ভূমি স্পর্শ করে তখন উহার গতিবেগের অনুভূমিক উপাংশ, $V_H=\frac{880}{3}$ ft/s এবং উল্লম্ব উপাংশ, $V_V=gt=32\times10=320$ ft/s

ভূমি স্পর্শ করিবার সময় বোমার লব্ধি গতিবেগ (চিত্র 3.4)

চিত্র 3.4

$$V = \sqrt{V_H^2 + V_V^2} = \sqrt{(\tfrac{880}{3})^2 + (320)^2}$$

$$= 434 \cdot 10 \text{ ft/s} = \frac{434 \cdot 1}{3 \times 1760} \times 60 \times 60 \text{ miles/hour}$$

$$= 295 \cdot 98 \text{ miles/hour}$$

বোমার লব্ধি গতিবেগের অভিমুখ অনুভূমিক রেখার সহিত ∝-কোণ করিলে লেখা যায়.

$$\tan \alpha = \frac{320}{\frac{880}{3}} = \frac{320 \times 3}{880} = \frac{12}{11} = 1 \cdot 09 \quad \therefore \ \alpha \simeq 47 \cdot 47^\circ \text{ (প্রায়)}$$

উদাহরণ 3.4 একটি বন্দুক হইতে বাহির হইয়া একটি বুলেট একটি দুর্গের দেওয়ালকে কোনক্রমে অনুভূমিকভাবে অতিক্রম করিল। দেওয়ালটির উচ্চতা 64 ft এবং বন্দুক হইতে দেওয়ালের দূরত্ব 128 $\sqrt{3}$ ft হইলে বুলেটটির উৎক্ষেপণ বেগ এবং অভিমুখ নির্ণয় কর। ($g = 32$ ft/s²)

[A bullet after leaving a gun just passes over a wall of a fort horizontally. If the wall is 64 ft high and is 128 $\sqrt{3}$ ft away from the gun, find the velocity and direction of projection of the bullet. ($g = 32$ ft/s²)]

সমাধান : মনে করি, বুলেটটির উৎক্ষেপণ-বেগ u এবং এই গতিবেগ অনুভূমিক রেখার সহিত ∝ কোণে আনত (চিত্র 3.5)। ধরা যাক, উৎক্ষেপণের t s পর বুলেটটি দেওয়াল অতিক্রম করিল।

বুলেটটি কোনক্রমে দেওয়ালটিকে অতিক্রম করে। t s পর বুলেটটি যখন দেওয়ালের ঠিক উপরে আসে তখন ইহার গতিবেগের উল্লম্ব উপাংশের মান শূন্য।

$$\therefore \quad u \sin \alpha - gt = 0 \qquad \text{.... (i)}$$

এই সময়ের মধ্যে বুলেটের অনুভূমিক এবং উল্লম্ব সরণ বিবেচনা করিয়া লেখা যায়,

$u \cos\alpha . \ t = 128 \sqrt{3}$ ... (ii)

$u \sin \alpha . \ t - \frac{1}{2} gt^2 = 64$ ... (iii)

(ii) এবং (iii) নং সমীকরণ ব্যবহার করিয়া পাই,

$\frac{1}{2} gt^2 = 64$ বা, $t^2 = 4$

$(\because \ g = 32 \text{ ft/s}^2)$

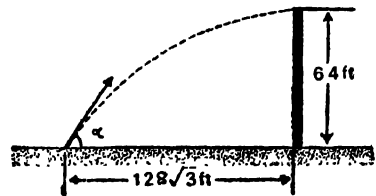
বা, $t = 2$s

চিত্র 3.5

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $u \sin \alpha = gt = 32 \times 2 = 64$ .... (iv)

$$u \cos \alpha = \frac{128\sqrt{3}}{2} = 64\sqrt{3} \text{ ft/s} \qquad \text{.... (v)}$$

(iv) এবং (v)-এর বর্গ করিয়া উহাদের যোগফল লইলে পাই,

$$u^2 = (64)^2 + (64\sqrt{3})^2 \quad \text{বা,} \quad u = \sqrt{(64)^2 + (64\sqrt{3})^2} = 128 \text{ ft/s}$$

(iv) এবং (v) হইতে পাই,

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{64}{64\sqrt{3}} \quad \text{বা,} \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$$

উদাহরণ 3.5 যদি 320 ফুট উচ্চ স্তম্ভের শীর্ষ হইতে একটি পাথরকে অনুভূমিক রেখার সহিত 30° কোণে 256 ft/s বেগে প্রক্ষেপ করা যায় তাহা হইলে উহা কত দূরে গিয়া ভূমি স্পর্শ করিবে ?

[If a stone is projected with a velocity of 256 ft/s from the top of a pillar 320 ft high at an angle of 30° with the horizontal, at what distance will it strike the ground ?]

সমাধান : মনে করি, পাথরটি প্রক্ষিপ্ত হইবার t s পর স্তম্ভের গোড়া হইতে x দূরত্বে ভূমি স্পর্শ করে (চিত্র 3.6)।

পাথরটির উলম্ব গতি বিবেচনা করিয়া লেখা যায়,

$$-320 = 256 \sin 30^\circ . t - \tfrac{1}{2} gt^2$$

এখানে, g = অভিকর্ষজ ত্বরণ = 32 ft/s²

$$\therefore \quad -320 = 256 \times \tfrac{1}{2} \times t - \tfrac{1}{2} \times 32 \times t^2$$

বা, $-320 = 128t - 16t^2$

বা, $16t^2 - 128t - 320 = 0$

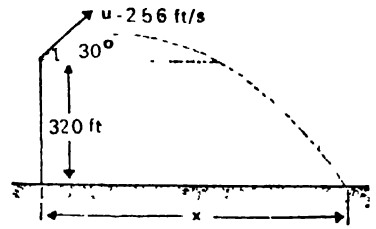
বা, $t^2 - 8t - 20 = 0$

বা, $(t-10)(t+2) = 0$

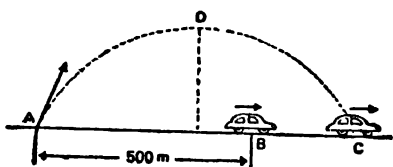
চিত্র 3.6

কিন্তু, t ঋণাত্মক হইতে পারে না। কাজেই, $t = 10$

সুতরাং, 10 s সময়ে অনুভূমিক অভিমুখে পাথরটির সরণ, x

$$= 256 \cos 30^\circ \times 10 = 256 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 1280\sqrt{3} = 2217 \text{ ft}$$

উদাহরণ 3.6 অনুভূমিক রাস্তার উপর স্থাপিত একটি বন্দুককে রাস্তা দিয়া ঘণ্টায় 72 km বেগে চলমান একটি গাড়িকে আঘাত করিবার জন্য ব্যবহৃত হইতেছে। বন্দুকটি হইতে যখন অনুভূমিক তলের সহিত 45° কোণে গুলি ছোঁড়া হইল তখন গাড়িটি বন্দুকটি হইতে 500 m দূরে ছিল। (i) যখন গুলিটি গাড়িতে আঘাত করিবে তখন বন্দুক হইতে গাড়ির দূরত্ব কত এবং (ii) গুলিটির উৎক্ষেপণ-বেগ কত নির্ণয় কর।

[A gun, kept on a straight horizontal road, is used to hit a car, travelling along the same road away from the gun with a uniform speed of 72 km/hr. The car is at a distance 500 m from the gun when the gun is fired at an angle 45° with the horizontal. Find (i) the distance of the car from the gun when the shell hits it and (ii) the speed of projection of the shell from the gun.]

সমাধান : মনে করি, A বিন্দু হইতে গুলি ছোঁড়া হইয়াছে (চিত্র 3·7)। এই সময় গাড়িটি B অবস্থানে ছিল। প্রশ্নের শর্তানুসারে, AB=500 m ; যখন গাড়িটি C অবস্থানে আসিল তখন উহা গুলিবিদ্ধ হইল।

চিত্র 3 7

$$AC=\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g},$$

এখানে $\alpha=45^\circ$

$$\therefore \quad AC=\frac{u^2 \sin 2\times 45^\circ}{g}=\frac{u^2}{g} \quad \ldots\ldots \quad (i)$$

এই দূরত্ব আসিতে গুলিটি যে-সময় লইল তাহাকে T ধরিলে লেখা যায়,

$$T=\frac{2u \sin \alpha}{g}=\frac{2u \sin 45^\circ}{g}=\frac{\sqrt{2}u}{g} \quad \ldots \quad (ii)$$

এখন, $AC=AB+BC$ বা, $\frac{u^2}{g}=500+BC$ ... (iii)

গাড়ির গতিবেগ $=72 \text{ km/h}=\frac{72\times 10^3}{60\times 60} \text{ m/s}=20 \text{ m/s}$

কাজেই, BC=T সময়ে গাড়ি-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$=20\, T=20\times\frac{\sqrt{2}u}{g} \text{ m} \quad \ldots\ldots \quad (iv)$$

(iii) এবং (iv) হইতে পাই, $\frac{u^2}{g}=500+\frac{20\sqrt{2}u}{g}$

বা, $u^2-20\sqrt{2}u-500\, g=0$

বা, $u^2-20\sqrt{2}u-500\times 9{\cdot}8=0$ $[\because \; g=9{\cdot}8 \text{ m/s}^2]$

সুতরাং, $u=\frac{20\sqrt{2}\pm\sqrt{800+19600}}{2}$

u-এর মান ঋণাত্মক হইতে পারে না, কাজেই u-এর গ্রহণযোগ্য মান

$$u=\frac{20\sqrt{2}+\sqrt{800+19600}}{2}=85{\cdot}55 \text{ m/s}$$

যখন গাড়িটি গুলিবিদ্ধ হইল তখন বন্দুক হইতে উহার দূরত্ব

$$=\frac{u^2}{g}=\frac{(85{\cdot}55)^2}{9\,8}=747{\cdot}1 \text{ m}$$

উদাহরণ 3.7 অনুভূমিক রেখার সহিত $\tan^{-1}\frac{1}{20}$ কোণে এক ব্যক্তির দিকে বন্দুক হইতে গুলি ছোঁড়া হইল। বন্দুকটি যে-অনুভূমিক তলে আছে ব্যক্তিটিও সেই তলে আছে। যদি গুলি এবং গুলির শব্দ একই মুহূর্তে ঐ ব্যক্তির নিকট পৌঁছায় তাহা হইলে বন্দুক হইতে তাহার দূরত্ব কত ? শব্দের গতিবেগ 1120 ft/s।

[A gun is fired at an elevation $\tan^{-1} \frac{1}{20}$ towards a person on the same horizontal plane as the gun. If the shot and the sound of the gun reach him at the same instant, find the distance of the person from the gun, the velocity of sound being 1120 ft/s.]

সমাধান : বন্দুকটির অবস্থানকে A দ্বারা এবং ব্যক্তিটির অবস্থানকে B দ্বারা সূচিত করা হইল। A হইতে অনুভূমিক রেখার সহিত $\propto$ কোণে বন্দুকের গুলি ছোঁড়া হইল।

শর্তানুসারে, $\tan \propto = \frac{1}{20}$ .... (i)

আমরা জানি, গুলির অনুভূমিক পাল্লা (range) $= \frac{u^2 \sin 2\propto}{g}$ ... (ii)

এখানে, u = নিক্ষিপ্ত গুলির গতিবেগ, g = অভিকর্ষজ ত্বরণ

A হইতে B-তে আসিতে গুলির T সময় লাগিলে লেখা যায়,

$$V = \frac{2u \sin \propto}{g} \quad \text{... (iii)}$$

চিত্র 3.8

(ii) এবং (iii) হইতে পাই,

$$\frac{T^2}{R} = \frac{4u^2 \sin^2 \propto}{g^2} \times \frac{g}{u^2 \sin^2 \propto}$$

বা, $$\frac{T^2}{R} = \frac{2 \tan \propto}{g} \quad \text{... (iv)}$$

গুলি এবং গুলির শব্দ একই সময়ে B বিন্দুতে পৌঁছায় বলিয়া লেখা যায়,

$$R = 1120 \times T \quad \text{বা,} \quad T^2 = \frac{R^2}{1120^2} \quad \text{.... (v)}$$

(iv) এবং (v) হইতে পাই, $\frac{R^2}{1120^2 \times R} = \frac{2 \tan \propto}{g}$

বা, $R = \frac{u \tan \propto}{g} \times 1120^2 = \frac{2 \times \frac{1}{20}}{32} \times 1120 \times 1120 = 3920$ ft

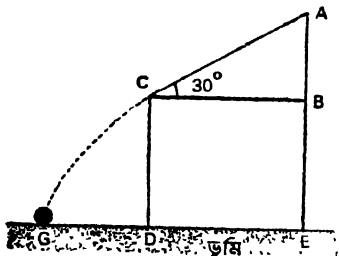
উদাহরণ 3.8 কোন বাড়ির হেলান ছাদ হইতে একটি বরফের ব্লক সর্বোচ্চ নতিসম্পন্ন রেখা বরাবর নিচে পড়িতেছে (অনুভূমিক তলের সহিত ছাদের নতি = 30°)। ভূমি হইতে ছাদের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন বিন্দুর উচ্চতা যথাক্রমে 8·1 m এবং 5·6 m। প্রারম্ভিক বিন্দু হইতে কতটা অনুভূমিক দূরত্বে ব্লকটি ভূমি স্পর্শ করিবে? ঘর্ষণ উপেক্ষা কর।

[A block of ice starts sliding down from the top of the inclined roof of a house (angle of inclination of roof = 30° with the horizontal) along a line of maximum slope. The highest and the lowest points of the roof are at height 8·1 m and 5·6 m respectively from the ground. At what horizontal distance from the starting point will the block hit the ground? Neglect friction.]

সমাধান ঃ 3.9 নং চিত্রে A ছাদের সর্বোচ্চ বিন্দু এবং C ছাদের সর্বনিম্ন বিন্দু এবং DE ভূমি। কাজেই, AE = 8·1 m এবং CD = 5·6 m

কাজেই, AB = (8·1 − 5·6) = 2·5 m

এখন, $\frac{AB}{CB} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $CB = AB\sqrt{3} = 2·5\sqrt{3}$ m

যে-সময়ে বরফের ব্লকটি C বিন্দুতে পৌঁছে সেই সময়ের মধ্যে ব্লকটি যে-উল্লম্ব উচ্চতা নামে তাহার মান, $h = AB = 2·5$ m

চিত্র 3.9

C বিন্দুতে ব্লকটির গতিশক্তি,

$\frac{1}{2}mv^2$ = ব্লকটির স্থিতিশক্তির হ্রাস

বা, $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ ∴ $v = \sqrt{2gh}$

$= \sqrt{2 \times 9·8 \times 2·5} = 7$ m/s

এই গতিবেগ AC অভিমুখে। কাজেই এই গতিবেগের অনুভূমিক উপাংশ,

$v_H = 7 \cos 30° = 7 . \frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s

এবং উল্লম্ব উপাংশ $= 7 \sin 30° = \frac{7}{2}$ m/s

C-বিন্দু হইতে ভূমিতে পৌঁছিতে ব্লকটির যদি t সময় লাগে তাহা হইলে লিখিতে পারি,

$5·6 = \frac{7}{2}t + \frac{1}{2} \times 9·8 \times t^2$

বা, $4·9t^2 + 3·5t - 5·6 = 0$

বা, $7t^2 + 5t - 8 = 0$

উপরের সমীকরণ হইতে t-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে। কিন্তু t-এর মান ঋণাত্মক হইতে পারে না। কাজেই t-এর একটি মানই গ্রহণযোগ্য। এই মান

$$t = \frac{-5 + \sqrt{25 + 224}}{14} = \frac{5·4}{7} \text{ s}$$

ব্লকটি যে-বিন্দুতে ভূমি স্পর্শ করে তাহাকে G দ্বারা সূচিত করিলে লেখা যায়,

$GD = v_H \times t = 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{5·4}{7} = 2·7 \times \sqrt{3}$ m

কাজেই, প্রারম্ভিক বিন্দু হইতে G বিন্দুর অনুভূমিক দূরত্ব,

$GE = GD + DE = GD + BC$

$= 2·7 \times \sqrt{3} + 2·5 \times \sqrt{3} = 5·2\sqrt{3} = 9$ m (প্রায়)

প্রশ্নমালা 3

1. কোন পাহাড়ের শীর্ষ হইতে অনুভূমিক অভিমুখে প্রক্ষিপ্ত কোন বস্তু ভূমিতে পৌঁছিতে 5 s সময় নেয়। অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 9·8 m/s² হইলে পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর। বায়ুজনিত বাধা উপেক্ষা কর।

[A body thrown horizontally from the top of a hill takes 5 s to reach the ground. Determine the height of the hill, if the acceleration due to gravity is 9·8 m/s². Neglect the resistance due to air]

[122·5 m]

2. এক ব্যক্তি একটি পাথরকে অনুভূমিক দিকে সর্বাধিক 392 ft পর্যন্ত ছুঁড়িতে পারে। এক্ষেত্রে সে কী বেগে পাথরটি ছোঁড়ে এবং উহা কতটা উচ্চতা পর্যন্ত উঠে ?

[A man can throw a stone to a maximum horizontal distance of 392 ft. With what velocity does he throw the stone and what is the maximum height attained by the stone in this case ?]

[112 ft/s, 98 ft]

3. একটি বন্দুক হইতে বাহির হইয়া একটি বুলেট কোনক্রমে একটি দুর্গের দেওয়ালকে অনুভূমিকভাবে অতিক্রম করিল। যদি দেওয়ালের উচ্চতা 64 ft হয় এবং বন্দুক হইতে ইহার দূরত্ব 192 ft হয় তাহা হইলে বুলেটটির প্রক্ষেপণ-বেগ এবং অভিমুখ নির্ণয় কর।

[A bullet after leaving a gun just passes over a wall of a fort horizontally. If the wall is 64 ft high and is 192 ft away from the gun, find the velocity and direction of projection of bullet.]

[115·38 ft/s (প্রায়), অনুভূমিক রেখার সহিত 33·7° কোণে আনত]

4. কোন প্রক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ অনুভূমিক পাল্লা 100 km হইলে দেখাও যে, ইহার মোট উড্ডয়ন-কাল প্রায় 143 s।

[If the maximum horizontal range of a projectile is 100 km, show that its time of flight is about 143 s.]

5. কতকগুলি কণাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একই সময়ে v দ্রুতিতে একই উল্লম্বতলে বিভিন্ন দিকে প্রক্ষিপ্ত হইলে দেখাও যে, t সময় পর কণাগুলি একটি বৃত্তের উপর থাকিবে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[If some particles are projected simultaneously from a fixed point at different directions in the same vertical plane with the same velocity v, show that after time t the particle lies on a circle. Find the equation of the circle.]

(অনুভূমিক অভিমুখে x-অক্ষ এবং উল্লম্ব অভিমুখে y-অক্ষ ধরিলে বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+(y+\frac{1}{2}gt^2)^2=(vt)^2$)

6. একটি বস্তুকে অনুভূমিক রেখার সহিত 45° নতিতে ছুঁড়িলে সর্বোচ্চ 109 m উচ্চতায় উঠিতে পারে। বস্তুটির প্রক্ষেপণ-বেগ কত ?

[A body projected at an inclination of 45° with the horizontal attains a maximum height to 109 m. What is the volocity of projection of the body ?]

[65·4 m/s]

7. 160 m/s গতিবেগে একটি গুলি ছোঁড়া হইল। উহা সর্বোচ্চ কতটা দূরে যাইতে পারে এবং ঐ সময় উহা কতটা উচ্চ পর্যন্ত উঠে ?

[A shot is projected at a velocity of 160 m/s. What is the maximum distance it can cover and what is the height attained by it at that time ?]

[2609·6 m (প্রায়), 652·4 m (প্রায়)]

8. একটি বালক একটি বলকে উল্লম্ব অভিমুখে ছুঁড়িয়া উহাকে 40 গজ উচ্চে তুলিতে পারে। দেখাও যে, তাহার পক্ষে অনুভূমিক দিকে 80 গজের বেশি দূরে বলটি পাঠান সম্ভব নয়।

[A boy can raise a ball to a height of 40 yards by throwing it verticaliy upwards. Show that it is not possible for him to made the ball cover a distance more than 80 yards along horizontal direction.]

9. ভূমি হইতে 4 ft উচ্চতায় বিদ্যমান একটি বন্দুক হইতে অনুভূমিক রেখা বরাবর 0·1 lb ভরবিশিষ্ট একটি বুলেট ছোঁড়া হইল এবং বুলেটটি বন্দুক হইতে 100 ft দূরে গিয়া ভূমি স্পর্শ করিল। (i) বুলেটটি যে-সময় ধরিয়া বায়ুতে ছিল, (ii) বুলেটটির অনুভূমিক দ্রুতি, (iii) বন্দুকের ব্যারেলে বুলেটটির ত্বরণ (ব্যারেলের দৈর্ঘ্য = 5 inch) এবং (iv) ব্যারেলে অবস্থানকালে বুলেটটির উপর ক্রিয়াশীল গড় বল নির্ণয় কর।

[A bullet of mass 0·1 lb is shot horizontally from a gun mounted 4 ft above the ground level and strikes the ground 100 ft away from the gun. Calculate (i) the time the bullet was in air, (ii) the horizontal speed of the bullet, (iii) the average acceleration in the gun barrel (length of the barrel = 5 inches), (iv) the average force on the bullet while in the barrel.]

[(i) $\frac{1}{2}$ s, (ii) 200 ft/s, (iii) 40,000 ft/s^2 (iv) 4000 poundals]

10. একটি বস্তুকে অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে 120 ft/s গতিবেগে উৎক্ষেপ করা হইল। (i) বস্তুটির উড্ডয়ন-কাল এবং অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। (ii) বস্তুটি সর্বোচ্চ কোন্ উচ্চতা পর্যন্ত উঠে এবং ঐ উচ্চতায় পৌঁছিতে বস্তুটির কত সময় লাগে?

[A body is projected at an angle 30° the horizontal with a velocity of 120 ft/s. (i) Find the time of flight and the horizontal range. (ii) What maximum height does the body attain and how long does it take to reach it ?]

[(i) 3·75 s, 390 ft (প্রায়), (ii) 56·25 ft, 1·875 s]

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

সরল দোলক

4.1 সরল দোলকের সমীকরণ : কোন নির্দিষ্ট স্থানে একটি সরল দোলক ক্ষুদ্র কৌণিক বিস্তার লইয়া দুলিতে থাকিলে উহার দোলনকাল (T) নিম্নের সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots \quad (4.1)$$

এখানে g হইল স্থানীয় অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং l হইল দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য।

4.2 অভিকর্ষজ ত্বরণ নির্ণয়ের সমীকরণ : সরল দোলকের সাহায্যে অতি

সহজেই কোন স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় করা যায়। এই উদ্দেশ্যে সমীকরণ (4.1)-কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়

$$g=4\pi^2 \cdot \frac{l}{T^2} \qquad \ldots \quad (4.2)$$

কাজেই, সরল দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য l এবং উহার দোলনকাল T জানা থাকিলে (4.2) নং সমীকরণ হইতে g-এর মান নির্ধারণ করা যায়।

4.3 সেকেণ্ড দোলক : যে-সরল দোলকের দোলনকাল দুই সেকেণ্ড বা অর্ধ দোলনকাল এক সেকেণ্ড তাহাকে সেকেণ্ড-দোলক বলা হয়। (4.1) নং সমীকরণ হইতে সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায়। সেকেণ্ড-দোলকের সংজ্ঞানুসারে, ইহার দোলনকাল, T=2 s

কাজেই, $2=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

এখন, $g=981$ cm/s² ধরিয়া পাই, $l=\frac{981}{\pi^2}=99{\cdot}49$ cm

4.4 দোলকের সাহায্যে পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় : মনে করি, ভূ-পৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের দোলনকাল T s এবং কোন পাহাড়ের চূড়ায় ইহার দোলনকাল T′ s। ভূ-পৃষ্ঠে এবং কোন পাহাড়ের উপর অভিকর্ষজ ত্বরণের মান যথাক্রমে g এবং g' হইলে লেখা যায়,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{এবং} \quad T'=2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$$

$$\therefore \quad T'/T=\sqrt{g/g'} \qquad \ldots\ldots \quad (i)$$

মনে করি, পৃথিবীর ভর=M, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ=R

কাজেই, $g=\frac{GM}{R^2}$ এবং $g'=\frac{GM}{(R+h)^2}$ (h=পাহাড়ের উচ্চতা)

$$\therefore \quad \frac{g}{g'}=\left(\frac{R+h}{R}\right)^2 \qquad (ii)$$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{g}{g'}}=\frac{R+h}{R} \qquad \ldots\ldots \quad (iii)$$

(i) এবং (iii) হইতে পাই, $\frac{T}{T'}=\sqrt{\frac{g}{g'}}=\frac{R+h}{R}$

$$\therefore \quad h=R\left(\frac{T'}{T}-1\right) \qquad \ldots \quad (4.3)$$

সরল দোলকের দোলনকাল T এবং T′ নির্ণয় করিয়া পাহাড়ের উচ্চতা h-এর মান পাওয়া যায়।

4.5 দোলকের সাহায্যে কোন খনিগর্ভের গভীরতা নির্ণয় : মনে করি,

ভূ-পৃষ্ঠে কোন সরল দোলকের দোলনকাল T এবং খনিগর্ভে ইহার দোলনকাল T'। ভূ-পৃষ্ঠে এবং খনিগর্ভে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান যথাক্রমে g এবং g' হইলে লেখা যায়,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{এবং} \quad T'=2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$$

এখানে l হইল দোলকের দৈর্ঘ্য।

কাজেই, $\frac{T}{T'}=\sqrt{\frac{g'}{g}}$ (i)

সমীকরণ (4.3) হইতে পাই, $\frac{g'}{g}=1-\frac{h}{R}$ ... (ii)

এখানে h=খনিগর্ভের গভীরতা

$\therefore \quad \frac{T}{T'}=\sqrt{1-\frac{h}{R}}$ [সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে]

বা, $\frac{h}{R}=1-\frac{T^2}{T'^2}$ বা, $h=R\left(1-\frac{T^2}{T'^2}\right)$ ... (4.4)

কাজেই পরীক্ষার সাহায্যে T এবং T'-এর মান নির্ণয় করিয়া খনিগর্ভের গভীরতার মান পাওয়া যায়।

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 4.1 কোন স্থানে একটি সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য 1·28 m এবং অপর একটি স্থানে সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য 0·80 m। কোন বস্তুকে দ্বিতীয় স্থান হইতে প্রথম স্থানে লইয়া গেলে উহার ওজন কতটা বৃদ্ধি পায়?

[The length of a seconds pendulum at a place is 1·28 m and that at another place is 0·80 m. What is the increase in the weight of a body if it is brought from the second place to the first ?]

সমাধান: মনে করি, প্রথম এবং দ্বিতীয় স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান যথাক্রমে g_1 এবং g_2।

প্রথম স্থানে সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য 1·28 m বা 128 cm বলিয়া লেখা যায়,

$$2=2\pi\sqrt{\frac{128}{g_1}} \qquad \text{....} \quad (i)$$

অনুরূপভাবে, দ্বিতীয় স্থানে সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য 0·80 m বা 80 cm বলিয়া লেখা যায়,

$$2=2\pi\sqrt{\frac{80}{g_2}} \qquad \text{...} \quad (ii)$$

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $\frac{g_1}{g_2}=\frac{128}{80}=1{\cdot}6$ ... (iii)

কোন বস্তুর ভর m হইলে প্রথম স্থানে উহার ওজন $W_1=mg_1$ এবং দ্বিতীয় স্থানে উহার ওজন $W_2=mg_2$

কাজেই, $\frac{W_1}{W_2}=\frac{g_1}{g_2}=1\cdot6$ বা, $W_1=1\cdot6\ W_2$

কাজেই, কোন বস্তুকে দ্বিতীয় স্থান হইতে প্রথম স্থানে আনিলে বস্তুটির ওজন বৃদ্ধি পাইয়া উহার পূর্ববর্তী ওজনের 1·6 গুণ হয়।

উদাহরণ 4.2 কোন স্থানে সেকেণ্ড-দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য 98 cm হইলে যে-দোলক ঐ স্থানে প্রতি মিনিটে 20টি পূর্ণ দোলন নিষ্পন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[If the effective length of the seconds pendulum is 98 cm at a place, then find the effective length of a simple pendulum which will make 20 complete oscillations per minute at that place.]

সমাধান : সেকেণ্ড-দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য 98 cm বলিয়া লেখা যায়,

$$2=2\pi\sqrt{\frac{98}{g}} \text{ বা, } 4=4\pi^2\times\frac{98}{g} \quad .... \quad \text{(i)}$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, 20টি পূর্ণ দোলকের জন্য প্রয়োজনীয় সময় = 60 s

কাজেই, দোলনটির দোলনকাল $=\frac{60}{20}=3$ s

এক্ষেত্রে দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য l হইলে লেখা যায়,

$$3=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{বা, } 9=4\pi^2.\frac{l}{g} \quad .... \quad \text{(ii)}$$

কাজেই, সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\frac{l}{98}=\frac{9}{4} \quad \text{বা, } l=\frac{9}{4}\times98=220\cdot5 \text{ cm}$$

উদাহরণ 4.3 যে-স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 980 cm/s² সে-স্থানে একটি সেকেণ্ড-দোলক সঠিক সময় রাখে। যে-স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 978 cm/s² সে-স্থানে দোলকটি দিনে কত সেকেণ্ড স্লো যাইবে ?

[A seconds pendulum keeps correct time at a place where the acceleration due to gravity is 980 cm/s². How many second will it lose per day at a place where the acceleration due to gravity is 978 cm/s² ?]

সমাধান : দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য l হইলে লেখা যায়,

$$2=2\pi\sqrt{\frac{l}{980}} \quad .... \quad \text{(i)}$$

যে-স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান $g=978$ cm/s² সে-স্থানে দোলকটির দোলন-কাল T হইলে লেখা যায়,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{978}} \quad .... \quad \text{(ii}$$

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $\frac{T}{2}=\sqrt{\frac{980}{978}}$ .... (iii)

এখন, 1 দিন $=24\times60\times60=86400$ s

কাজেই, একদিনে দোলকটির পূর্ণ দোলনসংখ্যা

$$N = \frac{86400}{T} = \frac{86400}{2}\sqrt{\frac{978}{980}} \qquad [\text{(iii) হইতে}]$$

বা, $N = \frac{86400}{2}\left(1+\frac{2}{978}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{86400}{2}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{978}\right)$

[দ্বিপদ বিস্তারের অন্যান্য পদ উপেক্ষা করিয়া]

প্রতি অর্ধদোলনে সেকেণ্ড ঘড়ি এক সেকেণ্ড নির্দেশ করে। অর্থাৎ, একদিনে ঘড়িটি যে-সময় নির্দেশ করে তাহার মান

$$N \times 2\text{ s} = 86400\left(1-\frac{1}{978}\right)\text{ s}$$

$\therefore$ ঘড়িটি প্রতিদিন স্লো যায় $86400 \times \frac{1}{978}$ s বা 88 s (প্রায়)।

উদাহরণ 4.4 একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য 100 cm এবং ইহার 20টি পূর্ণ দোলকের জন্য সময় লাগে 40 1 s। অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

[The length of a simple pendulum is 100 cm and it executes 20 complete oscillations in 40·1 s. Find the value of g at that place.]

সমাধান : 20টি দোলনে 40·1 s লাগে বলিয়া সরল দোলকটির দোলনকাল

$$T = \frac{40\cdot1}{20} = 2\cdot005\text{ s} \qquad \text{(i)}$$

আমরা জানি, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ... (ii)

এখানে, l = দোলকের দৈর্ঘ্য = 100 cm এবং g = অভিকর্ষজ ত্বরণ

$$\therefore \quad 2\cdot005 = 2\pi\sqrt{\frac{100}{g}}$$

$$\therefore \quad g = \frac{400\pi^2}{(2\cdot005)^2} = 982\text{ cm/s}^2$$

উদাহরণ 4 5 কোন স্থানে একটি সরল দোলকের দোলনকাল 1·5 s। ঐ স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 980 cm/s² হইলে দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য কত?

[The time period of a simple pedulum at a place is 1·5 s. If the acceleration due to gravity at that place is 980 cm/s², what is the effective length of the pendulum ?]

সমাধান : সরল দোলকের দোলনকাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

এখানে, l = কার্যকর দৈর্ঘ্য এবং g = অভিকর্ষজ ত্বরণ

শর্তানুসারে, T = 1 5 s এবং g = 980 cm/s²

$$\therefore \quad l = \frac{T^2}{4\pi^2}\cdot g = \frac{(1\cdot5)^2 \times 980}{4 \times (3\ 14)^2} = 55\cdot9\text{ cm}$$

উদাহরণ 4.6 একটি ত্রুটিপূর্ণ সেকেণ্ড দোলক দিনে 10 s স্লো যায়। ইহার দৈর্ঘ্য কতটা হ্রাস বা বৃদ্ধি করিলে উহা সঠিক সময় দিবে? (g = 980 cm/s²)

[A faulty seconds pendulum loses 10 seconds a day. But how much should its length be increased or decreased so that it may keep correct time ?) ($g = 980$ cm/s²]

সমাধান : 1 দিন = $24 \times 60 \times 60 = 86400$ সেকেণ্ড ; ত্রুটিহীন সেকেণ্ড দোলকের দোলনকাল = 2 s। সুতরাং, দিনে উহা 86400/2 বা 43200 বার আন্দোলিত হয়। যে-ঘড়ি দিনে 10 s স্লো যায় সেই ঘড়ির দোলক দিনে আন্দোলিত হয় $\frac{86400-10}{2}$ বার বা 43195 বার।

সুতরাং, ত্রুটিপূর্ণ দোলকের দোলনকাল, T = $\frac{86400}{43195}$ s

$$\therefore \quad 2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \dots \qquad (i)$$

ত্রুটিপূর্ণ দোলকের দোলনকাল ত্রুটিহীন সেকেণ্ড-দোলকের দোলনকাল অপেক্ষা কম বলিয়া উহার কার্যকর দৈর্ঘ্যও l অপেক্ষা বেশি হইবে। মনে করি, ইহার দৈর্ঘ্য $= l + x$

$$\therefore \quad \frac{86400}{43195} = 2\pi\sqrt{\frac{l+x}{g}} \qquad \dots \qquad (ii)$$

(i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\frac{86400}{86390} = \sqrt{\frac{l+x}{l}} = \left(1 + \frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$$

বা, $1 + \frac{10}{86390} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{l}$, (দ্বিপদ বিস্তারের অন্যান্য পদ উপেক্ষা করিয়া)

$$\therefore \quad x = \frac{2}{86390} \cdot l$$

(i) নং সমীকরণ হইতে পাই,

$$l = \frac{g}{\pi^2} = \frac{980}{\pi^2} = 99 \cdot 26 \text{ cm}$$

সুতরাং, $x = \frac{2}{86390} \times 99 \cdot 26 = 0.023$ cm

কাজেই, দোলকটির দৈর্ঘ্য 0·023 cm কমাইতে হইবে।

উদাহরণ 4.7 কোন সরল দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য অপর একটি দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্যের তিনগুণ। যদি দ্বিতীয় দোলকটির দোলনকাল 3 s হয় তাহা হইলে প্রথম দোলকটির দোলনকাল কত হইবে ?

[The effective length of a simple-pendulum is three times that of another. If the time period of the second pendulum is 3 s, what is the time period of the first ?]

সমাধান : মনে করি, দ্বিতীয় দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য = l

$\therefore$ প্রথম দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য = $3l$

প্রথম দোলকের দোলনকাল T হইলে লেখা যায়,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3l}{g}} \qquad \dots \qquad (i)$$

দ্বিতীয় দোলকটির দোলনকাল 3 s বলিয়া লেখা যায়,

$$3=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{.. (ii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $\frac{T}{3}=\sqrt{3}$

বা, $T=\sqrt{3}=5{\cdot}2$ s (প্রায়)

উদাহরণ 4.8 একটি সেকেণ্ড দোলককে কোন পর্বতের উপর লইয়া গেলে উহা দিনে 20 s স্লো চলে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km হইলে পর্বতটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

[A seconds pendulum loses 20 seconds a day when taken to the top of a mountain. If the radius of the earth is 6400 km, find the height of the mountain.]

সমাধান : পর্বতের তলদেশে সেকেণ্ড-দোলকের দোলনকাল 2 s বলিয়া লেখা যায়,

$$2=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},\ [\ g=\text{অভিকর্ষজ ত্বরণ}\ ] \qquad \text{(i)}$$

পর্বতের উপর অভিকর্ষজ ত্বরণের মান g' হইলে এবং দোলকটির দোলনকাল T′ হইলে লেখা যায়,

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} \qquad \text{.. (ii)}$$

এখন, 1 দিন $=24\times60\times60=86400$ s

সুতরাং, দিনে দোলকটি 86400/2 বা 43200 বার পূর্ণ দোলন নিষ্পন্ন করে। পর্বতের উপরে সেকেণ্ড-দোলকটি দিনে 20 s স্লো যায়। কাজেই, ঐ অবস্থানে দোলকটি দিনে $\frac{86400-20}{2}$ বা 43190 s বার পূর্ণ দোলন নিষ্পন্ন করে। অর্থাৎ পর্বতের উপরে সেকেণ্ড-দোলকটির দোলনকাল

$$T'=\frac{86400}{43190}\ s=2\left[1+\frac{10}{43190}\right]\ s \qquad \text{.... (iii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\sqrt{\frac{g}{g'}}=\frac{T_1'}{2}=\left[1+\frac{10}{43190}\right] \quad [\ \text{(iii) হইতে}\ ] \qquad \text{.... (iv)}$$

$$\text{আবার,}\quad \sqrt{\frac{g}{g'}}=\left(1+\frac{h}{R}\right) \qquad \text{... (v)}$$

এখানে, h = পর্বতের উচ্চতা এবং R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ = 6400 km

∴ (iv) এবং (v) নং সমীকরণ হইতে পাই, $\frac{h}{R}=\frac{10}{43190}$

বা $h=\frac{10}{43190}\times6400$ km $=1{\cdot}48$ km (প্রায়)

উদাহরণ 4.9 1·5 s এবং 1·6 s দোলনকালসম্পন্ন দুইটি দোলককে একই সঙ্গে আন্দোলিত করা হইল। কতক্ষণ পর একটি দোলক অপরটি অপেক্ষা একটি পূর্ণ দোলন নিষ্পন্ন করিবে? ঐ সময়ের মধ্যে দ্রুততর দোলকটি কয়টি পূর্ণ দোলন নিষ্পন্ন করিবে?

[Two simple pendulums having time-periods 1·5 s and 1·6 s

respectively are started at the same time. How many seconds later will one gain complete oscillation over the other? How many oscillations does the faster pendulum execute in the mean time?]

সমাধান : মনে করি, t s পর একটি দোলক অপর একটি দোলক অপেক্ষা একটি বেশি পূর্ণ দোলন নিষ্পন্ন করে।

t s সময়ে প্রথম দোলকটির পূর্ণ দোলনসংখ্যা $=\frac{t}{1\cdot5}$ এবং t s সময়ে দ্বিতীয় দোলকটির পূর্ণ দোলনসংখ্যা $=\frac{t}{1\cdot6}$

শর্তানুসারে, $\frac{t}{1\cdot5}-\frac{t}{1\cdot6}=1$

কাজেই, $t\left(\frac{1\cdot6-1\cdot5}{1\cdot5\times1\cdot6}\right)=1$ বা, $t=\frac{1\cdot5\times1\cdot6}{0\cdot1}=24$ s

এই সময়ের মধ্যে দ্রুততর দোলকটির (অর্থাৎ, প্রথম দোলকটির) পূর্ণ দোলনসংখ্যা,

$n=\frac{24}{1\cdot5}=16$

উদাহরণ 4.10 একটি সেকেণ্ড-দোলক একটি নির্দিষ্ট স্থানে সঠিক সময় রাখে। কিন্তু অপর একটি স্থানে লইয়া গেলে দিনে 25 s ফাস্ট যায়। যদি প্রথম স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 980 cm/s² হয় তাহা হইলে উক্ত দুই স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের অন্তর নির্ণয় কর।

[A seconds pendulum keeps correct time at a certain place. But it gains 25 seconds a day when it is taken to another place. If the acceleration due to gravity at the first place is 980 cm/s², find the difference between the values of acceleration due to gravity at these two places.]

সমাধান : আমরা জানি, 1 দিন $=86400$ s

প্রথম স্থানে দোলকটির দোলন-কাল $T_1=2$ s ;

দ্বিতীয় স্থানে ঘড়িটি দৈনিক 25 s ফাস্ট যায় বলিয়া 86400 s সময়ে দোলকটির মোট অর্ধ-দোলন সংখ্যা $=(86400+25)=86425$

কাজেই, দোলকটির পূর্ণ দোলনকাল, $T_2=2\times\frac{86400}{86425}$ s

প্রথম স্থানে এবং দ্বিতীয় স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান যথাক্রমে g_1 এবং g_2 ধরিয়া লেখা যায়,

$$2=2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

এবং $$2\times\frac{86400}{86425}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g_2}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

কাজেই, $$\sqrt{\frac{g_2}{g_1}}=\frac{86425}{86400} \quad \ldots\ldots \quad \text{(iii)}$$

মনে করি, $g_2 - g_1 = x$ $\therefore$ $g_2 = g_1 + x$ .... (iv)

(iii) এবং (iv) হইতে পাই,

$$\left(1+\frac{x}{g_1}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{25}{86400}$$

বা, $1+\frac{1}{2}\frac{x}{g_1} = 1+\frac{25}{86400}$ [বাম পার্শ্বের দ্বিপদ বিস্তারের অন্যান্য পদ উপেক্ষা করিয়া]

বা, $x = \frac{2\times 25}{86400}\times g_1$

কিন্তু, $g_1 = 980$ cm/s²

$\therefore$ $x = \frac{50}{86400}\times 980 = 0{\cdot}567$ cm/s² (প্রায়)

উদাহরণ 4.11 একটি গ্রহের ভর এবং ব্যাস পৃথিবীর ভর এবং ব্যাসের দ্বিগুণ। পৃথিবীর পৃষ্ঠে যে-সরল দোলকটি একটি সেকেণ্ড-দোলক উক্ত গ্রহটিতে উহার দোলন-কাল কত হইবে ?

[The mass and diameter of a planet are twice those of the earth. What will be the period of oscillation of a pendulum on this planet if it is a seconds pendulum on the earth ?]

সমাধান : মনে করি, পৃথিবীর ভর = M এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ = R

কাজেই, আলোচ্য গ্রহের ভর = 2M এবং আলোচ্য গ্রহের ব্যাসার্ধ = 2R

পৃথিবী-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান, $g = G\frac{M}{R^2}$ .... (i)

আলোচ্য গ্রহপৃষ্ঠে মহাকর্ষ ত্বরণের মান, $g' = G\frac{2M}{(2R)^2} = \frac{GM}{2R^2}$ .... (ii)

কাজেই, $\frac{g}{g_1} = 2$ [(i) এবং (ii) হইতে] .. (iii)

দোলকটি পৃথিবী-পৃষ্ঠে একটি সেকেণ্ড-দোলক বলিয়া লেখা যায়,

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ .... (iv)

আলোচ্য গ্রহপৃষ্ঠে দোলকটির দোলনকাল T হইলে,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$$ .... (v)

(iv) এবং (v) হইতে পাই, $\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{g}{g'}}$ .... (vi)

বা, $\frac{T}{2} = \sqrt{2}$ [(iii) এবং (vi) হইতে]

বা, $T = 2\sqrt{2}$ s $= 2{\cdot}83$ s (প্রায়)

উদাহরণ 4.12 চন্দ্রপৃষ্ঠে মহাকর্ষজ ত্বরণ g-এর মান 150 cm/s^2 হইলে ঐ স্থানে একটি সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Find the length of the seconds pendulum on the moon where $g = 150\ cm/s^2$.]

সমাধান : সেকেণ্ড-দোলকের দোলনকাল $T = 2\ s$

আমরা জানি, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

এখানে, $T = 2\ s$, $g = 150\ cm/s^2$

$$\therefore\quad 2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{150}}$$

বা, $l = \frac{150}{\pi^2} = 15{\cdot}2\ cm$ (প্রায়)

উদাহরণ 4.13 যদি কোন সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য 1% বৃদ্ধি করা যায় তাহা হইলে উহা দিনে কত সেকেণ্ড স্লো যাইবে ?

[If a seconds pendulum is increased by 1% in length, how many seconds will it lose per day ?]

সমাধান : মনে করি, সেকেণ্ড-দোলকটির দৈর্ঘ্য $= l$

1% বৃদ্ধি করিলে ইহার দৈর্ঘ্য হইবে $l + 0{\cdot}01\ l$ বা, $1{\cdot}01\ l$

সেকেণ্ড-দোলকের দোলনকাল 2 s বলিয়া

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

দৈর্ঘ্য 1% বৃদ্ধি করিবার পর দোলনকাল T s হইলে লেখা যায়,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1{\cdot}01\ l}{g}} \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $T = 2\sqrt{1{\cdot}01}\ s$

এখন, 1 দিন = 86400 সেকেণ্ড,

কাজেই, দৈর্ঘ্য-বৃদ্ধির পর প্রতিদিন ইহার দোলনসংখ্যা হইবে

$$N = \frac{86400}{2\sqrt{1{\cdot}01}} = 43200 \times (1 + 0{\cdot}1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\simeq 43200(1 - \tfrac{1}{2} \times 0{\cdot}01) = 43200\ (1 - 0{\cdot}005)\ \text{(প্রায়)}$$

কাজেই, একদিনের অর্ধদোলন সংখ্যা $= 2 \times N = 86400\ (1 - 0{\cdot}005)$ (প্রায়)

কাজেই, দোলক-ঘড়ি প্রতিদিন স্লো যায়,

$(86400 - 2N)\ s = 86400 - 86400\ (1 - 0{\cdot}005)\ s$

$= 86400 \times 0{\cdot}005 = 432\ s$ (প্রায়)

উদাহরণ 4.14 পৃথিবী-পৃষ্ঠে ঠিক সময় রাখে এইরূপ একটি দোলক-ঘড়িকে 8 ft/s^2 সমত্বরণে ঊর্ধ্বে আরোহণরত বিমানে লইয়া যাওয়া হইল। ঘড়িটি মিনিটে কত সেকেণ্ড 'স্লো' বা 'ফাস্ট' চলিবে ? (অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 32\ ft/s^2$)

[A pendulum clock that keeps correct time on the surface of the earth is carried on an aeroplane ascending with a constant acceleration of 8 ft/s². How much will the clock lose or gain per minute ? (The acceleration due to gravity, $g=32$ ft/s²))

সমাধান ঃ বিমান যখন f ত্বরণে উপরের দিকে উঠিতে থাকে তখন উহাতে অবস্থিত m ভরবিশিষ্ট কোন দোলকপিণ্ডের উপর ক্রিয়াশীল নিম্নাভিমুখী 'অলীক বল' $=mf$

অভিকর্ষজ ত্বরণের মান g হইলে এইরূপভাবে আরোহণরত বিমানে দোলক পিণ্ডের উপর ক্রিয়াশীল মোট নিম্নাভিমুখী বল $=m(g+f)$

কাজেই, দোলকপিণ্ডের নিম্নমুখী ত্বরণের কার্যকর মান, $g'=g+f$

এখানে, $g=32$ ft/s² এবং $f=8$ ft/s²

সুতরাং, $g'=32+8=40$ ft/s²

ভূপৃষ্ঠে গাড়িটি সঠিক সময় রাখে বলিয়া এই স্থানে ঘড়িটির দোলনকাল $=2$ s

$$\therefore \quad 2=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{.... (ii)}$$

ঊর্ধ্বমুখী ত্বরণসহ আরোহণরত বিমানে দোলকটির দোলনকাল T হইলে লেখা যায়,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} \qquad \text{.... (iii)}$$

সমীকরণ (ii) এবং (iii) হইতে পাই, $\frac{T}{2}=\sqrt{\frac{g}{g'}}$,

$$\text{বা,} \quad T=2\sqrt{\frac{g}{g'}}=2\sqrt{\frac{32}{40}}\text{ s} \quad \text{বা,} \quad T=1{\cdot}79\text{ s}$$

কাজেই, মিনিটে দোলন-ঘড়ির দোলন-সংখ্যা $=\frac{60}{1{\cdot}79}=33{\cdot}5$

∴ মিনিটে ঘড়িটির স্পন্দন-সংখ্যা (beats) বা অর্ধদোলন সংখ্যা (number of half oscillations) $=33{\cdot}5\times2=67$

কাজেই, ত্বরণসহ আরোহণরত বিমানে দোলক-ঘড়িটি মিনিটে (67 - 60) বা, 7 s ফাস্ট চলিবে।

উদাহরণ 4.15 কোন গ্রহে একটি বস্তু স্থির অবস্থা হইতে 3 s সময়ে 162 ft অতিক্রম করিয়া মাটিতে পড়ে। যে-দোলকের দৈর্ঘ্য 1 ft উক্ত গ্রহে উহার দোলনকাল কত হইবে ?

[On a planet, a body falls 162 ft from rest on the ground in 3 s. What will be the time period of a simple pendulum 1 ft long on that planet ?]

সমাধান ঃ আলোচ্য গ্রহে মহাকর্ষ-জনিত ত্বরণ g হইলে লেখা যায়,

$$h=\tfrac{1}{2}gt^2$$

এখানে h হইল স্থির অবস্থা হইতে পড়ন্ত বস্তু-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং t হইল সময়। শর্তানুসারে, $h=162$ এবং $t=3$ s

$$\therefore \quad 162=\tfrac{1}{2}\times g\times3^2 \quad \text{বা,} \quad g=\frac{2\times162}{9}=36\text{ ft/s}^2$$

এখন দোলকটির দোলনকাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{36}}$ s বা, $T = 1.047$ s

উদাহরণ 4.16 একটি সরল দোলকের দোলনকাল 2·85 s। ইহার দৈর্ঘ্যকে 200 mm বৃদ্ধি করা হইলে ইহার দোলনকাল হয় 2·99 s। এই পর্যবেক্ষণ হইতে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

[A simple pendulum has a period of 2·85 s. When the length was increased by 200 mm, the period became 2·99 s. Calculate the value of the acceleration due to gravity from these observations.)

সমাধান : মনে করি, দোলকটির প্রাথমিক কার্যকর দৈর্ঘ্য l m

কাজেই প্রশ্নের শর্তানুসারে লেখা যায় যে,

$$2.85 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (g \text{ অভিকর্ষজ ত্বরণ}) \qquad \dots \quad \text{(i)}$$

$$\text{এবং } 2.99 = 2\pi\sqrt{\frac{l+0.2}{g}} \qquad \dots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $\sqrt{\frac{l+0.2}{l}} = \frac{2.99}{2.85}$

বা, $1+\frac{0.2}{l} = \left(\frac{2.99}{2.85}\right)^2 = \left(1+\frac{0.14}{2.85}\right)^2$ বা, $1+\frac{0.2}{l} = 1+2.\frac{0.14}{2.85}$

[যেহেতু, $x \ll 1$ হইলে $(1+x)^2$ কে $(1+2x)$ লেখা যায়]

বা, $\frac{0.2}{l} = \frac{2\times0.14}{2.85}$ বা, $l = \frac{2.85\times0.2}{2\times0.14} = \frac{2.85}{1.4}$ m

(i) হইতে লেখা যায়, $4\pi^2.\frac{l}{g} = (2.85)^2$

বা, $g = \frac{4\pi^2 l}{(2.85)^2} = \frac{4\pi^2\times2.85}{(2.85)^2\times1.4} = 9.70$ m/s² (প্রায়)

উদাহরণ 4.17 ভূপৃষ্ঠে এবং ভূপৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় একটি সেকেণ্ড দোলকের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে L এবং l। দেখাও যে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ

$$R = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{L}-\sqrt{l}}.h$$

[The length of a seconds pendulum at the earth's surface and at a height of h from the earth's surface is L and l respectively. Show that the radius of the earth is

$$R = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{L}-\sqrt{l}}.h \,]$$

সমাধান : সেকেণ্ড দোলকের দোলনকাল 2 s

ভূপৃষ্ঠে এবং ভূপৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান যথাক্রমে g এবং g' হইলে প্রশ্নানুসারে লেখা যায়,

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2 \text{ s} \qquad \dots \quad \text{(i)}$$

এবং $2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}=2$ s .... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\sqrt{\frac{L}{g}}=\sqrt{\frac{l}{g'}}$$

বা, $\sqrt{\frac{g}{g'}}=\sqrt{\frac{L}{l}}$ .... (iii)

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R ধরিলে লেখা যায়,

$$g=G\frac{M}{R^2} \qquad \text{.... (iv)}$$

এবং $g'=G\frac{M}{(R+h)^2}$ .... (v)

এখানে G = মহাকর্ষীয় ধ্রুবক এবং M = পৃথিবীর ভর।

সমীকরণ (iv) এবং (v) হইতে পাই,

$$\frac{g}{g'}=\left(\frac{R+h}{R}\right)^2$$

বা, $\sqrt{\frac{g}{g'}}=1+\frac{h}{R}$ ... (vi)

সমীকরণ (iii) এবং (vi) হইতে পাই,

$$1+\frac{h}{R}=\sqrt{\frac{L}{l}}$$

বা, $\frac{h}{R}=\frac{\sqrt{L}-\sqrt{l}}{\sqrt{l}}$

বা, $R=\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{L}-\sqrt{l}}\cdot h$

● বিশেষ দ্রষ্টব্য ●

অভিকর্ষজ ত্বরণ g এবং দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য l-এর মান পরিবর্তিত হইলে দোলক-ঘড়ি কতটা 'স্লো' বা 'ফাস্ট' যাইবে কলনবিদ্যার (calculus-এর) সাহায্যে তাহা অপেক্ষাকৃত সহজে হিসাব করা যায়। নিম্নে তাহা দেখান হইল।

আমরা জানি যে, সরল দোলকের দোলনকাল

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

উভয় পার্শ্বের লগারিদ্‌ম লইয়া পাই,

$$\log_e T = \log_e 2\pi + \frac{1}{2}(\log_e l - \log_e g)$$

অবকলন করিয়া (differentiating) পাই,

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{dl}{l} - \frac{dg}{g}\right) \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

মনে করি, দোলকটি প্রতিদিন N সংখ্যক পূর্ণ দোলন নিষ্পন্ন করিতেছে। দোলনকাল T s বলিয়া লেখা যায়,

$$N \times T\ s = 24 \times 60 \times 60\ s = 86400\ s$$

$$\text{বা,} \quad N \times T = 86400$$

উভয় পার্শ্বের লগারিদ্‌ম লইয়া পাই,

$$\log_e N + \log_e T = \log_e 86400$$

অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dN}{N} + \frac{dT}{T} = 0$$

$$\text{বা,} \quad \frac{dN}{N} = -\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg}{g} - \frac{dl}{l}\right) \qquad \text{[সমীকরণ (i) হইতে]}$$

$$\text{বা,} \quad dN = \frac{N}{2}\left(\frac{dg}{g} - \frac{dl}{l}\right) \qquad \ldots \quad \text{(ii)}$$

এক্ষেত্রে dN হইল দোলকটির প্রতি দিনের দোলনসংখ্যার বৃদ্ধি।

দোলকটি যদি সেকেণ্ড-দোলক হয় তাহা হইলে উহার এক পূর্ণ দোলনকাল 2 s।

সুতরাং, উহা দিনে যে-কয়টি পূর্ণদোলন সম্পাদন করে উহার মান

$$N = \frac{86400}{2} = 43200$$

দোলনকাল 2 s বলিয়া দৈনিক dN দোলনসংখ্যা বৃদ্ধি পাইলে ঘড়ি যতটা সময় ফাস্ট যাইবে উহার মান

$$\delta t = 2 \times dN\ s \qquad \ldots . \quad \text{(iii)}$$

$$\text{বা,} \quad \delta t = 2 . \frac{N}{2}\left(\frac{dg}{g} - \frac{dl}{l}\right) \qquad \text{[সমীকরণ (iv) হইতে]}$$

$$\text{বা,} \quad \delta t = N\left(\frac{dg}{g} - \frac{dl}{l}\right) s$$

(i) যখন অভিকর্ষজ ত্বরণ g স্থির থাকে এবং কেবলমাত্র দৈর্ঘ্য l পরিবর্তিত হয়, তখন $dg = 0$; সেক্ষেত্রে

$$\delta t = -43200\frac{\delta l}{l} \qquad \ldots . \quad (4.5)$$

ঋণাত্মক চিহ্ন হইতে বুঝা যাইতেছে যে, l বৃদ্ধি পাইলে δt ঋণাত্মক হইবে, অর্থাৎ ঘড়ি 'স্লো' চলিবে।

(iii) যখন দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য l অপরিবর্তিত থাকে এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর মান বদলায় তখন $dl=0$; সেক্ষেত্রে

$$\delta t = 43200 \times \frac{dg}{g} \qquad \ldots \qquad (4.6)$$

কাজেই বুঝা যাইতেছে যে, অভিকর্ষজ ত্বরণের মান বৃদ্ধি পাইলে δt ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ ঘড়ি 'ফাস্ট' চলিবে। g-এর মান কমিলে dg ঋণাত্মক হইবে δt ঋণাত্মক হইবে। অর্থাৎ অভিকর্ষজ ত্বরণ হ্রাস পাইলে ঘড়ি 'স্লো' চলিবে।

নিম্নের দুইটি উদাহরণে সমীকরণ (4.5) এবং (4.6) এর প্রয়োগ দেখান হইয়াছে।

উদাহরণ 4.18 কোন সেকেণ্ড দোলকের দৈর্ঘ্য 1% বৃদ্ধি পাইলে উহা দিনে কত সেকেণ্ড স্লো বা ফাস্ট চলিবে ?

[If the length of a seconds pendulum is increased by 1%, how many seconds will it lose or gain per day ?]

সমাধান : আমরা জানি যে,

$$dt = -43200 \times \frac{dl}{l}$$

এক্ষেত্রে, $\frac{dl}{l} = 0{\cdot}01$ বলিয়া

$$dt = -43200 \times 0{\cdot}01 = -432 \text{ s}$$

ঋণাত্মক চিহ্ন হইতে বুঝা যাইতেছে যে, এক্ষেত্রে ঘড়ি 'স্লো' যাইবে।

(4.13 নং উদাহরণ দেখ)

উদাহরণ 4.19 যে-স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 980 cm/s² সে-স্থানে একটি সেকেণ্ড-দোলক সঠিক সময় রাখে। যে-স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 978 cm/s² সেই স্থানে দোলকটি দিনে কত সেকেণ্ড স্লো যাইবে ?

[A seconds pendulum keeps correct time at a place where the acceleration due to gravity is 980 cm/s². How many seconds will it lose per day at a place where the acceleration due to gravity is 978 cm/s².]

সমাধান : আমরা জানি যে, $\delta t = 43200 \times \frac{dg}{g}$

এখানে, $g = 980$ cm/s² এবং $dg = (978-980) = -2$ cm/s²

$$\therefore \frac{dg}{g} = -\frac{2}{980} \text{ বা, } \delta t = -43200 \times \frac{2}{980}$$

$$= -\frac{4320}{49} = -88 \text{ s (প্রায়)}$$

(উদাহরণ 4.3 দেখ)

প্রশ্নমালা 4

1. কোন স্থানে একটি সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য 1·5 মিটার এবং অপর একটি স্থানে সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য 0·6 মিটার। কোন বস্তুকে দ্বিতীয় স্থান হইতে প্রথম স্থানে লইয়া গেলে উহার ওজন কতটা বৃদ্ধি পাইবে ?

[The length of a seconds pendulum at a place is 1·5 m and that at another place is 0 6 m. What is the increase in the weight of a body if it is brought from the second place to the first ?] [2·5 গুণ]

2. কোন স্থানে সেকেণ্ড-দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য 100 cm হইলে যে-দোলক ঐ স্থানে প্রতি মিনিটে 20টি পূর্ণ দোলন নিষ্পন্ন করে তাহার কার্যকর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[If the effective length of the seconds pendulum is 100 cm at a place, then find the effective length of a simple pendulum which will make 20 complete o cillations per minute at that place.]

[225 cm]

3. একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য 400 cm এবং কোন স্থানে ইহার 20টি পূর্ণ দোলনের জন্য সময় লাগে 80·2 s। ঐ স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর

[The length of a simple pendulum is 400 cm and it executes 20 complete oscillations in 80·2 s. Find the value of g at that place]
[982 cm/s² (প্রায়]

4. ভূ-পৃষ্ঠে ঠিক সময় রাখে এইরূপ একটি সেকেণ্ড-দোলককে চন্দ্রপৃষ্ঠে লইয়া যাওয়া হইল। সেখানে ইহার দোলনকাল কত হইবে তাহা নির্ণয় কর। পৃথিবীর ভর চন্দ্রের ভরের 81 গুণ বেশি এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ চন্দ্রের ব্যাসার্ধের 4 গুণ ধরিয়া লও।

[A seconds pendulum which keeps correct time on the earth is taken to the surface of the moon. Find the time period there, taking the mass of the earth to be 81 times that of the moon and the radius of the earth to be 4 times that of the moon.] [4·5 s]

5. একটি বেলুন অভিযানে একটি সেকেণ্ড-দোলককে বেলুনে করিয়া উপরে তোলা হইল। সর্বোচ্চ অবস্থানে দোলকটিকে দিনে 400 s স্লো যাইতে দেখা গেল। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6450 km-এর সমান ধরিয়া বেলুনটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

[In a balloon expedition, a seconds pendulum carried on the balloon, on reaching the topmost position is found to lose 400 s a day. Estimate the height of ascent, assuming the earth s radius to be 6450 km.] **(Jt. Entrance, '78) [30 km]**

6. যে-স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 980 cm/s² সেই স্থানে একটি সেকেণ্ড-দোলক সঠিক সময় রাখে। যে-স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 979 cm/s² সেই স্থানে দোলকটি দিনে কত সেকেণ্ড স্লো যাইবে ?

[A seconds pendulum keeps correct time at a place where the acceleration due to gravity is 980 cm/s². How many seconds will it lose per day at a place where the acceleration due to gravity is 979 cm/s² ?] **[44 s (প্রায়)]**

7. একটি ত্রুটিপূর্ণ সেকেণ্ড-দোলক দিনে 20 s স্লো যায়। ইহার দৈর্ঘ্য কতটা হ্রাস বা বৃদ্ধি করিলে উহা সঠিক সময় দিবে? ($g=980$ cm/s^2)

[A faulty seconds pendulum loses 20 seconds a day. By how much should its length be increased or decreased so that it may keep correct time? ($g=980$ cm/s^2)]

[0·0046 cm (প্রায়) কমাইতে হইবে]

8. কোন সরল দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য অপর একটি দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্যের 5 গুণ। যদি দ্বিতীয় দোলকটির দোলনকাল 2·5 s হয়, তাহা হইলে প্রথম দোলকটির দোলনকাল কত হইবে?

[The effective length of a simple pendulum is five times that of another. If the time period of the second is 2·5 s, what is the time period of the first?] [5·59 s]

9. একটি সেকেণ্ড-দোলককে কোন পর্বতের উপর লইয়া গেলে উহা দিনে 15 s স্লো চলে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km হইলে পর্বতটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

[A seconds pendulum loses 15 seconds a day when taken at the top of a mountain. If the radius of the earth is 6400 km, find the height of the mountain.] [2·22 km (প্রায়)]

10. কোন স্থানে সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য 100 cm হইলে যে-দোলক মিনিটে 25টি পূর্ণদোলন নিষ্পন্ন করে তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[If the length of a seconds pendulum at a certain place be 100 cm, find the length of the pendulum which makes 25 oscillations per minute at that place.] (H. S., (Comp.) 1961) [144 cm]

11. যে-স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 980 cm/s^2 সেইস্থানে একটি সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। যদি দৈর্ঘ্যকে 2·25 গুণ করা যায় তাহা হইলে উহার দোলনকাল কত হইবে?

[Find the length of a seconds pendulum at a place where $g=980$ cm/s^2. What will be its periodic time if the length is increased 2·25 times?] [99·21 cm (প্রায়), 3 s]

12. যে-স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 980 cm/s^2 সেই স্থানে একটি দোলকের দোলন-কম্পাঙ্ক প্রতি মিনিটে 980 হইলে দোলকটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[If the frequency of oscillation of a pendulum is 980 per minute at a place where the acceleration due to gravity is 980 cm/s^2, find the length of the pendulum.] [9·29 cm (প্রায়)]

13. সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্য 1 মিটার হইলে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কত?

[What is the value of the acceleration due to gravity if the length of the seconds pendulum is 1 m?] [987 cm/s^2 (প্রায়)]

14. একটি সেকেণ্ড-দোলক একটি নির্দিষ্ট স্থানে সঠিক সময় রাখে। কিন্তু অপর একটি স্থানে লইয়া গেলে উহা দিনে 20 s ফাস্ট যায়। যদি প্রথম স্থানে অভিকর্ষজ

ত্বরণের মান 981 cm/s² হয় তাহা হইলে উক্ত দুই স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের অন্তর নির্ণয় কর।

[A seconds pendulum keeps correct time at a certain place. But it gains 20 seconds a day when it is taken to another place. If the acceleration due to gravity at the first place is 981 cm/s², find the difference between the values of the acceleration due to gravity at these two places.] [0·454 cm/s²]

15. যে-স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 981 cm/s² সেই স্থানে যে-দোলক সঠিক সময় দেয় সেই দোলককে যে-স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 980 32 cm s² সেই স্থানে লইয়া যাওয়া হইল। ইহা দিনে কতটা স্লো বা ফাস্ট যাইবে ? এই সময় উহার দৈর্ঘ্যকে কতটা পরিবর্তন করিলে উহা সঠিক সময় রাখিবে ?

[A pendulum that keeps correct time at the place where the acceleration due to gravity is 981 cm/s² is taken to a place where the acceleration due to gravity is 980·32 cm/s². How many seconds will it lose or gain per day ? By how much must its length be altered now so that it may keep correct time ?]

[দিনে 30 s স্লো যায়, 0·07 cm কমাইতে হইবে]

16. যদি কোন সেকেণ্ড-দোলকের দৈর্ঘ্যকে 0·25% বৃদ্ধি করা যায় তাহা হইলে উহা দিনে কত সেকেণ্ড 'স্লো' চলিবে ?

[If a seconds pendulum is increased by 0·25% in length, how many seconds will it lose per day ?] [116 s (প্রায়)]

17. 2·4 s এবং 2·5 s দোলনকাল-সম্পন্ন দুইটি সরল দোলককে একই সঙ্গে আন্দোলিত করা হইল। কতক্ষণ পর একটি দোলক অপরটি অপেক্ষা একটি পূর্ণ দোলন বেশি নিষ্পন্ন করিবে ? ঐ সময়ের মধ্যে দ্রুততর দোলকটি কয়টি পূর্ণ দোলন নিষ্পন্ন করিবে ?

[Two simple pendulums having time-periods 2·4 s and 2·5 s respectively are started at the same time. How many seconds later will one gain one complete oscillation over the other ? How many oscillations does the faster pendulum execute in the mean time ?] [60 s, 25]

18. পৃথিবী-পৃষ্ঠে সঠিক সময় রাখে এইরূপ একটি দোলক-ঘড়িকে 10 ft/s² সমত্বরণে ঊর্ধ্বে আরোহণরত বিমানে লইয়া যাওয়া হইল। ঘড়িটি মিনিটে কত সেকেণ্ড 'স্লো' বা 'ফাস্ট' চলিবে ? (অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g=32$ ft s²)

[A pendulum clock that keeps correct time on the surface of the earth is carried on an aeroplane ascending with a constant acceleration of 10 ft/s². How much will the clock lose or gain per minute ?] (The acceleration due to gravity, $g=32$ ft/s²)

[মিনিটে 8·73 s ফাস্ট চলিবে]

19. পৃথিবী-পৃষ্ঠে ঠিক সময় দেয় এইরূপ একটি দোলক-ঘড়িকে 4 ft/s² সমত্বরণে

নিম্নাভিমুখে অবতরণরত লিফ্‌টে লইয়া যাওয়া হইল। ঘড়িটি মিনিটে কত সেকেণ্ড 'স্লো' বা 'ফাস্ট' চলিবে ? (অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g=32$ ft/s²)

[A pendulum clock that keeps correct time on the surface of the earth is carried on a lift descending with a constant acceleration of 4 ft/s². How much will the clock lose or gain per minute ?] (The acceleration due to gravity, $g=32$ ft/s²)

[মিনিটে 3·8 s স্লো চলিবে]

20. একটি সেকেণ্ড-দোলককে একটি খনিগর্ভের তলদেশে লইয়া গেলে উহা দিনে 10 s 'স্লো' চলে। খনিটির গভীরতা নির্ণয় কর।

[A seconds pendulum loses 10 s a day when taken at the bottom of a mine. Find the depth of the mine. [1·48 km (প্রায়)]

21. কোন গ্রহে একটি বস্তু স্থির অবস্থা হইতে 4 s সময়ে 360 ft অতিক্রম করিয়া মাটিতে পড়ে। যে-দোলকের দৈর্ঘ্য 2 ft, উক্ত গ্রহে ঐ দোলকের দোলনকাল কত হইবে ?

[A body falls 360 ft from rest in 4 s in a planet. What will be the time period of a simple pendulum, whose length is 2 ft, in that planet ?] [1·23 s (প্রায়)]

22. একটি দোলকের পিণ্ডকে একটি স্ক্রু-এর সাহায্যে উপরে তোলা যায়, স্ক্রুটির প্রতি ইঞ্চিতে ত্রিশটি প্যাঁচ আছে যদি দোলকটি প্রতিদিন 5 মিনিট স্লো যায় তবে ঐ স্ক্রু-এর কত ঘর প্যাঁচ ঘুরাইলে উহা সঠিক সময় নির্দেশ করিবে ? ধরিয়া লও যে, দোলকটির দৈর্ঘ্য যখন 39 ইঞ্চি তখন উহা সঠিক সময় দেয়।

[The bob of a pendulum can be raised by means of a screw which has thirty threads to the inch. If the pendulum loses 5 minutes a day, how many turns of the head of the screw must be made in order to correct it ? Assume that the pendulum keeps correct time when its length is 39 inches.]

[**সমাধানের ইঙ্গিত ঃ** $2=2\pi\sqrt{\dfrac{39}{g\times12}}$ ... (i)

এবং $2\times\dfrac{86400}{86400-300}=2\pi\sqrt{\dfrac{39+x}{g\times12}}$ ... (ii)

এই দুই সমীকরণ হইতে পাই যে, $x=0{\cdot}2718$ ইঞ্চি

সুতরাং স্ক্রুটিতে 8·15 বার পাক দিলে দোলক-ঘড়ি সঠিক সময় নির্দেশ করিবে।]

23. কোন স্থানে একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য 49 cm এবং কোন স্থানে উহার দোলনকাল 1 4 s। যদি উষ্ণতা-বৃদ্ধির ফলে দোলকটির দৈর্ঘ্য 0 284 cm বৃদ্ধি পায় তাহা হইলে ইহার দোলনকাল কী হইবে ?

[The length of a simple pendulum is 49 cm and its period is 1·4 s at a certain place. If the length of the pendulum is increased by 0·284 cm due to the rise of temperature, what will be its time period ?] [1·404 s]

24. l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরল দোলক কোন নির্দিষ্ট সময়ে n পূর্ণ দোলন সম্পাদন করে। দেখাও যে, (i) g পরিবর্তিত হইয়া $g+\Delta g$ হইলে ($\Delta g \ll g$) ঐ সময়ের অবকাশে দোলকটির পূর্ণ দোলন-সংখ্যার বৃদ্ধি $\frac{n}{2}\cdot\frac{\Delta g}{g}$ এবং (ii) l পরিবর্তিত হইয়া $l+\Delta l$ হইলে ($\Delta l \ll l$) ঐ সময়ের অবকাশে দোলকটির পূর্ণ দোলন-সংখ্যার হ্রাস $\frac{n}{2}\cdot\frac{\Delta l}{l}$।

[If a simple pendulum of length l makes a complete oscillation in a given time, show that (i) if g be changed into $g+\Delta g$ ($\Delta g \ll g$) the number of oscillations gained during the time is $\frac{n}{2}\cdot\frac{\Delta g}{g}$ and (ii) if l be changed $l+\Delta l$ ($\Delta l \ll l$) of the number of oscillations lost during the time is $\frac{n}{2}\cdot\frac{\Delta l}{l}$]

25. দেখাও যে, বিস্তার θ_m ক্ষুদ্র হইলে দোলকের সূতার সর্বোচ্চ টান $mg(1+\theta_m^2)$। দোলকের কোন্ অবস্থানে সূতার টান সর্বোচ্চ হয় ?

[Show that when the amplitude θ_m is small the maximum tension in the string of a simple pendulum is $mg(1+\theta_m^2)$. At what position of the pendulum is the tension a maximum ?]

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

স্থিতিস্থাপকতা

5.1 ইয়ং গুণাঙ্ক (Young's modulus of elasticity) : কোন বস্তুর উপর টান প্রয়োগ করিলে উহা টানের দিকে দৈর্ঘ্যে বাড়ে এবং অভিলম্বে (প্রস্থে) কিছুটা সঙ্কুচিত হয়। এই সঙ্কোচনে কোন বাধা না থাকিলে টানের পীড়ন এবং অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাতকে ইয়ং গুণাঙ্ক বলে। টানের বদলে চাপ প্রয়োগ করিলে চাপের দিকে বস্তুর দৈর্ঘ্য কমে এবং উহার অভিলম্বের দিকে (প্রস্থে) কিছুটা বাড়ে। অভিলম্বের দিকে (প্রস্থে) বৃদ্ধির কোন বাধা না থাকিলে চাপের পীড়ন এবং অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাতকে ইয়ং গুণাঙ্ক বলা হয়।

কোন তারের প্রাথমিক দৈর্ঘ্য L, প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসার্ধ r এবং F টান প্রয়োগের ফলে ইহার দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি l হইলে,

$$\text{তারের অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন} = \frac{F}{\pi r^2} \text{ এবং অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি} = \frac{l}{L}$$

$$\text{কাজেই, তারটির উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক, } Y = \frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \frac{F}{\pi r^2} \Big/ \frac{l}{L}$$

বা, $Y = \frac{FL}{\pi r^2 l}$ ... (5.1)

সি. জি. এস. পদ্ধতিতে ইহার একক dyn/cm² এবং এম. কে. এস. পদ্ধতিতে ইহার একক N/m²।

5.2 আয়তন বিকার গুণাঙ্ক (Bulk modulus of elasticity) :

$$\text{আয়তন বিকার গুণাঙ্ক} = \frac{\text{পীড়ন}}{\text{আয়তন বিকৃতি}}$$

মনে করি, প্রতি একক ক্ষেত্রফলে কোন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বল p; সংজ্ঞানুসারে, ইহা আয়তন পীড়নের সমান। যদি বস্তুর আয়তন V হয় এবং চাপের প্রভাবে বস্তুর আয়তনের হ্রাস v হয়, তাহা হইলে

$$\text{আয়তন বিকৃতি} = \frac{v}{V}$$

$$\text{সংজ্ঞানুসারে, আয়তন বিকার গুণাঙ্ক} = \frac{p}{v/V} = \frac{pV}{v} \quad \ldots \quad (5.2)$$

ইয়ং গুণাঙ্কের ন্যায় আয়তন বিকার গুণাঙ্কের এককও সি. জি. এস. পদ্ধতিতে dyn/cm² এবং এম. কে. এস. পদ্ধতিতে N/m²।

5.3 কৃন্তন গুণাঙ্ক (Modulus of rigidity) :

$$\text{কৃন্তন গুণাঙ্ক} = \frac{\text{কৃন্তন পীড়ন}}{\text{কৃন্তন বিকৃতি}} = \frac{F/\alpha}{\theta} \quad \ldots \quad (5.3)$$

এখানে, F হইল α ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট তলে প্রযুক্ত স্পার্শক বল এবং θ হইল কৃন্তন কোণ।

5.4 পোয়াসোঁর অনুপাত (Poisson's ratio) :

$$\text{পোয়াসোঁর অনুপাত, } \sigma = \frac{\text{পার্শ্বীয় পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$$

মনে করি, বস্তুর প্রাথমিক দৈর্ঘ্য L এবং প্রস্থ $=$ D ; প্রযুক্ত বলের প্রভাবে দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধি $= l$ এবং প্রস্থের হ্রাস $= d$ হইলে লেখা যায়,

$$\text{পার্শ্বীয় বিকৃতি} = \frac{d}{D} \text{ এবং অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি} = \frac{l}{L}$$

$$\text{সুতরাং পোয়াসোঁর অনুপাত, } \sigma = \frac{d/D}{l/L} = \frac{d}{l}\frac{L}{D} \quad \ldots \quad (5.4)$$

5.5 তাপীয় পীড়ন (Thermal stress) : কোন দণ্ডের দুইপ্রান্ত দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ অবস্থায় রাখিয়া উহার উষ্ণতার পরিবর্তন করিলে উহার দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন ঘটিতে পারে না বলিয়া উক্ত দণ্ডে একটি পীড়নের উদ্ভব হয়। ইহাকে তাপীয় পীড়ন বলা হয়। নিম্নে ইহার মান নির্ণয় করা হইল।

মনে করি, θ_1°C উষ্ণতায় কোন দণ্ডের দৈর্ঘ্য L ; এই উষ্ণতায় দুই প্রান্ত দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ করা হইল। এই অবস্থায় দণ্ডটির উষ্ণতা কমাইয়া θ_2°C ($\theta_2<\theta_1$) করা হইল। কাজেই, দণ্ডের উষ্ণতা হ্রাস= $\theta_2-\theta_1$)°C

যদি দণ্ডটি অবাধে সঙ্কুচিত হইতে পারিত তাহা হইলে দণ্ডটির দৈর্ঘ্যের যে-হ্রাস ঘটিত তাহার মান

$$l=L\times\alpha\times(\theta_1-\theta_2)=L\alpha\theta \qquad \text{(i)}$$

দণ্ডটি সঙ্কুচিত হইতে পারিবে না বলিয়া উহাতে একটি টান সৃষ্ট হইবে। এই টানের প্রভাবেই দণ্ডটির দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকে। কাজেই বলা যায়, এই টানের ফলে দণ্ডটির দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি উষ্ণতা হ্রাসজনিত দৈর্ঘ্য-হ্রাসের সমান।

যদি দণ্ডে F টান ক্রিয়া করে তাহা হইলে ইয়ং গুণাঙ্ক Y-এর সংজ্ঞা হইতে লেখা যায়,

$$Y=\frac{F/A}{l/L}, \text{ এখানে A হইল দণ্ডটির প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল,}$$

$$\text{সুতরাং, } F=AY\frac{l}{L}$$

সমীকরণ (i) হইতে দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি l এর মান বসাইয়া পাই,

$$F=A\ Y\ \frac{L\alpha\theta}{L}=A\ Y\alpha\ \theta$$

$$\text{কাজেই, তাপীয় পীড়ন } \frac{F}{A}=Y\theta\alpha \qquad \dots \qquad (5.5)$$

বা, তাপীয় পীড়ন=ইয়ং গুণাঙ্ক×রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক×উষ্ণতার পরিবর্তন

5.6 বিকৃতিজনিত স্থিতিশক্তি : বাহ্যিক বল প্রয়োগ করিয়া কোন বস্তুর আকার বা আয়তনের বিকৃতি ঘটাইতে বস্তুর আভ্যন্তরীণ প্রতিক্রিয়া বলের (পীড়নের) বিরুদ্ধে কার্য করিতে হয়। এই কার্য করিতে যে শক্তি ব্যয়িত হয় তাহা স্থিতিশক্তিরূপে বলাধীন বস্তুতে সঞ্চিত থাকে।

(ii) **অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতিজনিত স্থিতিশক্তি :** মনে করি, l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোন তারের উপর F বল প্রযুক্ত হইয়াছে এবং ইহার ফলে তারটির Δl দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি হইয়াছে। তাহা হইলে তারে সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমাণ

$$W=\tfrac{1}{2}F\times\Delta l \qquad (5.6)$$

তারটির প্রস্থচ্ছেদ α হইলে এবং ইয়ং গুণাঙ্ক Y হইলে W-কে নিম্নের সমীকরণের সাহায্যেও প্রকাশ করা যায় :

$$W=\tfrac{1}{2}\left(Y\alpha.\frac{\Delta l}{l}\right)\times\Delta l \qquad (5.7)$$

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 5.1 0·4 cm ব্যাসবিশিষ্ট একটি তার হইতে 10 kg-wt ওজন ঝুলান হইল। ইহাতে ঐ তারের 100 cm দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাইয়া 100·1 cm হইল। তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A load of 10 kg-wt is suspended from a wire of diameter 0·4 cm. A length of 100 cm of the wire is found to elongate to 100·1 cm. Find the Young's modulus of the material of the wire.]

সমাধান : তারটির প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসার্ধ, $r=\frac{0\cdot4}{2}=0\cdot2$ cm

কাজেই, ইহার প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, $A=\pi r^2=\pi\times(0\cdot2)^2$ cm²

তারটির উপর ক্রিয়াশীল টান, $T=10$ kg-wt $=10\times10^3\times980$ dyn

$\therefore$ অনুদৈর্ঘ্য পীডন $=\frac{T}{A}=\frac{10\times10^3\times980}{\pi\times(0\cdot2)^2}$ dyn/cm² ... (i)

100 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট তারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি, $l=100\cdot1-100=0\cdot1$ cm

কাজেই, অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি $=\frac{l}{L}=\frac{0\cdot1}{100}=0\cdot001$ ... (ii)

সংজ্ঞানুসারে, তারের ইযং গুণাঙ্ক, $Y=\frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীডন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$

(i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$Y=\frac{10\times10^3\times980}{\pi\times0\cdot04\times0\cdot001}=7\cdot8\times10^{10}\text{dyn/cm}^2$$

উদাহরণ 5.2 50 μm ব্যাসবিশিষ্ট একটি চুল 0·20 N ওজনকে বিধৃত রাখিয়াছে। এই চুলের পীডন নির্ণয় কর।

[A hair of 50 μm diameter is supporting a weight of 0·20 N. Calculate the stress in the hair.]

সমাধান : চুলের ব্যাস $=50\ \mu\text{m}=50\times10^{-6}$ m

কাজেই, ইহার ক্ষেত্রফল, $A=\pi\times(25\times10^{-6})^2=6\cdot25\pi\times10^{-10}$ m²

চুলের উপর প্রযুক্ত ভার, $W=0\cdot20$ N

সংজ্ঞানুসারে, চুলের উপর ক্রিয়াশীল পীড়ন,

$$=\frac{W}{A}=\frac{0\cdot20}{6\cdot25\,\pi\times10^{-10}}\text{N/m}^2=1\cdot02\times10^8\text{ N/m}^2$$

উদাহরণ 5.3 0·5 mm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি তার হইতে একটি ভার ঝুলাইয়া উহাকে টান-টান অবস্থায় রাখা হইয়াছে। উষ্ণতা 10°C কমিলে তারের দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত রাখিতে উহা হইতে কী পরিমাণ অতিরিক্ত ভার ঝুলাইতে হইবে? তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক $=2\times10^{12}$ dyn/cm² এবং ইহার দৈর্ঘ্য প্রসারণ গুণাঙ্ক $=20\times10^{-6}$/°C।

[A wire of radius 0·5 mm is kept taut by suspending a load. If the temperature now reduces by 10°C, what additional load is required to keep the length of the wire unaltered ? The Young's modulus of the material of the wire $=2\times10^{12}$ dyn/cm^2 and the coefficient of linear expansion $=20\times10^{-6}$/°C.]

সমাধান ঃ মনে করি, টান-টান অবস্থায় তারটির দৈর্ঘ্য $=l$ cm

উষ্ণতা 10°C কমিলে ইহার দৈর্ঘ্য-হ্রাস

$$=l\times\alpha\times10 \text{ cm}=l\times20\times10^{-6}\times10 \text{ cm}=2l\times10^{-4} \text{ cm}$$

অতিরিক্ত ভার ঝুলাইয়া তারের দৈর্ঘ্যকে অপরিবর্তিত রাখিতে হইলে ইহার প্রভাবে তারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি উষ্ণতা-হ্রাসজনিত দৈর্ঘ্যহ্রাসের সমান হইতে হইবে।

মনে করি, প্রয়োজনীয় অতিরিক্ত ভার $=W$ kg-wt

$$=W\times10^{3}\times981 \text{ dyn}$$

$$\text{তারের পীড়ন}=\frac{W\times10^{3}\times981}{\pi\times(0\cdot05)^{2}}\text{dyn/cm}^{2}$$

$$\text{তারের বিকৃতি}=\frac{\text{দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি}}{\text{প্রাথমিক দৈর্ঘ্য}}=\frac{2l\times10^{-4}}{l}=2\times10^{-4}$$

$$\text{ইয়ং গুণাঙ্ক, } Y=\frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}}$$

$$\therefore\quad 2\times10^{12}=\frac{W\times10^{3}\times981}{\pi\times0\cdot0025}\times\frac{10^{4}}{2}$$

$$\text{বা, } W=\frac{2\times10^{12}\times\pi\times2\times\cdot0025}{10^{7}\times981}=3\cdot2 \text{ kg-wt (প্রায়)}$$

উদাহরণ 5.4 যখন একটি তার হইতে 10 kg-wt ভার ঝুলান আছে তখন উহার দৈর্ঘ্য 600·10 cm। তারটির প্রস্থচ্ছেদ 0·04 cm^2। ভার অপসারিত হইলে তারটির দৈর্ঘ্য হ্রাস পাইয়া 600 cm হয়। তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The length of a wire is 600·10 cm, when a load of 10 kg-wt is suspended from it. The area of cross-section of the wire is 0·04 cm^2. The length of the wire reduces to 600 cm when the load is removed. Find the Young's modulus of the material of the wire.]

সমাধান ঃ তারের উপর প্রযুক্ত বল $=Mg=10\times10^{3}\times981$ dyn

তারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি, $l=600\cdot10-600=0\cdot10$ cm

$$\text{এখন, অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}=\frac{\text{প্রযুক্ত বল}}{\text{তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল}}$$

$$=\frac{10\times10^{3}\times981}{0\cdot04}\text{ dyn/cm}^{2}$$

$$\text{এবং অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}=\frac{l}{L}=\frac{0\cdot10}{600}$$

সংজ্ঞানুসারে, ইয়ং গুণাঙ্ক, $Y = \frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$

$$= \frac{10 \times 10^3 \times 981 \times 600}{0.04 \times 0.10} \text{dyn/cm}^2 = 1.47 \times 10^{12} \text{ dyn/cm}^2$$

উদাহরণ 5.5 2 m লম্বা এবং 2 mm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের তারের দুই প্রান্তকে দৃঢ় অবলম্বনের সহিত বাঁধিয়া তারটিকে অনুভূমিক অবস্থায় রাখা হইল। তারটির মধ্যবিন্দুতে কী পরিমাণ ওজন ঝুলাইলে ঐ বিন্দুটি 0·5 cm নীচে নামিবে ? ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক $= 2 \times 10^{12}$ dyn/cm² ।

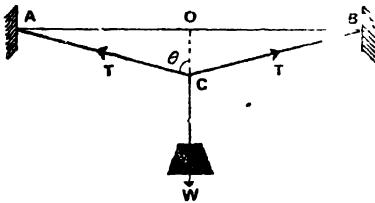
[A steel wire of length 2 m and radius 2 mm is made horizontal by fixing its ends to rigid supports. What load must be suspended from the midpoint of the wire so that the depression of the point is 0·5 cm. The Young's modulus of steel $= 2 \times 10^{12}$ dyn/cm².]

সমাধান : মনে করি, AB তারের মধ্যবিন্দু O হইতে W ওজন ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে এবং ইহাতে তারটির মধ্যবিন্দু C বিন্দুতে নামিয়া গিয়াছে।

তারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি $= AC - AO$

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 = AO^2 + OC^2$

প্রশ্নানুসারে, $AO = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$

$OC = 0.5$ cm ; কাজেই, AC

$$= [100^2 + (0.5)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 100\left[1 + \left(\frac{0.5}{100}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 100\left[1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{0.0025}{100}\right)\right]$$

$$= (100 + 0.00125) \text{ cm}$$

সুতরাং, তারটির প্রতি অর্ধাংশের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি $= 0.00125$ cm

চিত্র 5.1

তারের দুই অর্ধাংশের টানের উল্লম্ব উপাংশের যোগফল ওজন W-কে প্রতিমিত করিয়া আছে বলিয়া লেখা যায়,

$$2\, T \cos \theta = W \quad \text{বা,} \quad T = \frac{W}{2 \cos \theta}$$

এখন, $\cos \theta = \frac{OC}{AC} = \frac{0.5}{100} = \frac{1}{200}$

সুতরাং, $T = 100\, W$

কাজেই, তারের পীড়ন $= \frac{T}{\text{প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল}}$

$$= \frac{100\, W}{\pi \times (0.2)^2} = \frac{100\, W}{\pi \times 0.04} \text{ এবং বিকৃতি} = \frac{0.00125}{100}$$

আমরা জানি যে, ইয়ং গুণাঙ্ক, $Y=\frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}}$

$$\therefore\ 2\times10^{12}=\frac{100\,W}{\pi\times0{\cdot}04}\times\frac{100}{0{\cdot}00125}$$

$$\therefore\quad W=\frac{2\times10^{12}\times\pi\times4\times125\times10^{-7}}{100\times100}$$

$$=2\times100\times\pi\times4\times12{\cdot}5\ \text{dyn}=32\ \text{g-wt (প্রায়)}$$

উদাহরণ 5.6 30 মিটার লম্বা এবং 2 mm² প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি তারকে 5 kg-wt ওজনের সাহায্যে টানিয়া উহার 0·49 cm দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করা হইল। তারটির (i) অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি, (ii) অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন এবং (iii) ইহার উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A wire 30 metre long and of 2 mm² cross-section is stretched with an weight of 5 kg-wt by 0·49 cm. Find (i) the longitudinal strain, (ii) the longitudinal stress and (iii) Young's modulus of the material of the wire.]

সমাধান ঃ (i) তারটির প্রাথমিক দৈর্ঘ্য, $L=30\ m=30\times10^2$ cm

তারটির দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি, $l=0{\cdot}49$ cm

কাজেই, অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি$=\frac{l}{L}=\frac{0{\cdot}49}{30\times10^2}=1{\cdot}633\times10^{-4}$

(ii) তারের উপর প্রযুক্ত বল, $F=Mg=5\times10^3\times980$ dyn

তারটির প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, $a=2\ mm^2=2\times10^{-2}\ cm^2$

কাজেই, অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি$=\frac{F}{a}=\frac{5\times10^3\times980}{2\times10^{-2}}=2{\cdot}45\times10^8\ dyn/cm^2$

(iii) তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক$=\frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$

$$=\frac{2{\cdot}45\times10^8}{1{\cdot}633\times10^{-4}}=1{\cdot}5\times10^{12}\ dyn/cm^2$$

উদাহরণ 5.7 একটি পিতলের তারের ব্যাসার্ধ 0·5 mm। তারটির দৈর্ঘ্যকে উহার প্রাথমিক দৈর্ঘ্যের শতকরা 0·1% বৃদ্ধি করিতে কী পরিমাণ বল প্রয়োগ করিতে হইবে? ধরিয়া লও যে, পিতলের ইয়ং গুণাঙ্ক, $Y=9\times10^{11}$ dyn/cm²।

[The radius of a brass wire is 0·5 mm. What force is necessary to stretch it by 0·1 per cent of its original length? Given Y for brass$=9\times10^{11}$ dyn/cm².]

সমাধান ঃ প্রশ্নের শর্তানুসারে, অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি$=\frac{0{\cdot}1}{100}=10^{-3}$

মনে করি, প্রয়োজনীয় বল$=F$ dyn

তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, $a=\pi\times(0{\cdot}05)^2=0{\cdot}00025\pi\ cm^2$

আমরা জানি, অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন=ইয়ং গুণাঙ্ক × অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি

$$\therefore \frac{F}{a}=9\times10^{11}\times10^{-3}\ \text{dyn/cm}^2$$

বা, $F=9\times10^{11}\times10^{-3}\times a=9\times10^{8}\times0{\cdot}0025\pi$ dyn

বা, $F=7{\cdot}065\times10^{6}$ dyn

উদাহরণ 5.8 একটি ধাতব দণ্ডের উপাদানের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $1{\cdot}2\times10^{-5}/^{\circ}C$; ইহার উষ্ণতা $10^{\circ}C$ বৃদ্ধি পাইল। ইয়ং গুণাঙ্কের মান 2×10^{12} dyn/cm² হইলে দণ্ডটির উষ্ণতা-বৃদ্ধিজনিত প্রসারণ রোধ করিতে কী পরিমাণ চাপের পীড়ন প্রয়োজন হইবে ?

[A metal rod having coefficient of linear expansion equal to $1{\cdot}2\times10^{-5}/^{\circ}C$ has its temperature raised by 10°C. If Young's modulus of the material of the rod is 2×10^{12} dyn/cm², calculate the compressive stress required to prevent the expansion of the rod.]

সমাধান ঃ মনে করি, দণ্ডটির প্রাথমিক দৈর্ঘ্য=L cm

10°C উষ্ণতা বৃদ্ধির ফলে ইহার দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি$=l=L\alpha\theta$

$$=L\times1{\cdot}2\times10^{-5}\times10\ \text{cm}$$

কাজেই, অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন$=\frac{l}{L}=1{\cdot}2\times10^{-4}$ cm

আমরা জানি, ইয়ং গুণাঙ্ক$=\frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$

কাজেই, উষ্ণতা বৃদ্ধিজনিত প্রসারণ রোধ কবিতে যে-চাপেব পীডন প্রয়োজন উহার মান$=Y\times$ বিকৃতি$=2{\cdot}0\times10^{12}\times1{\cdot}2\times10^{-4}$

$$=24\times10^{7}\ \text{dyn/cm}^2=240\ \text{Mdyn/cm}^2$$

উদাহরণ 5.9 যখন একটি রবারেব দড়িকে টানা হয় তখন দৈর্ঘ্যেব পরিবর্তনের ফলে ইহার আয়তনের যে-পরিবর্তন হয় তাহা উপেক্ষণীয়। রবারেব পোযার্সোব অনুপাত নির্ণয় কর।

[When a cord of rubber is stretched, the change in its volume due to the change in its length is negligible. Obtain the value of the Poisson's ratio of rubber.]

সমাধান ঃ মনে করি, রবারের দড়িটির প্রাথমিক দৈর্ঘ্য l এবং ইহার প্রাথমিক ব্যাসার্ধ r (তারটির প্রস্থচ্ছেদ বৃত্তাকার ধরিয়া)।

কাজেই, রবারের দড়িটির প্রাথমিক আয়তন$=\pi r^2 l$ ... (i)

যখন তারটিকে টানা হইল তখন প্রতি একক দৈর্ঘ্যে দড়িটির দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি α হইলে ইহার অন্তিম দৈর্ঘ্য$=l+l\alpha=l(1+\alpha)$

এই সময় প্রতি একক দৈর্ঘ্য ব্যাসার্ধের হ্রাস β হইলে টান-খাওয়া অবস্থায় দড়িটির প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসার্ধ$=r-r\beta=r(1-\beta)$

কাজেই, টান-খাওয়া অবস্থায় দড়িটির আয়তন $=\pi r^2(1-\beta)^2 \times l(1+\alpha) \cdots$ (ii)

প্রশ্নের শর্তানুসারে, টান-খাওয়ার ফলে দড়ির আয়তনের পরিবর্তন উপেক্ষণীয় বলিয়া সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$\pi r^2 l (1-\beta)^2 (1+\alpha) = \pi r^2 l$ বা, $1+\alpha = \frac{1}{(1-\beta)^2} = (1-\beta)^{-2}$

বা, $1+\alpha = 1+2\beta$ [β-এর উচ্চতর ঘাতবিশিষ্ট পদগুলি উপেক্ষা করিয়া]

$\therefore \quad \alpha = 2\beta$ ... (iii)

সংজ্ঞানুসারে, পোয়াসোঁর অনুপাত, $\sigma = \frac{\beta}{\alpha}$ ... (iv

$\therefore$ সমীকরণ (iii) এবং (iv) হইতে পাই, $\sigma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} = 0{\cdot}5$

উদাহরণ 5.10 একটি সোনার তারের দৈর্ঘ্য 12·6 cm এবং ব্যাসার্ধ 1 mm ; ইহার দৈর্ঘ্য বরাবর একটি বল প্রয়োগ করিয়া দৈর্ঘ্য 0·5 cm বৃদ্ধি করা হইল। ইহাতে তারের ব্যাসার্ধ $\frac{1}{600}$ cm হ্রাস পাইলে সোনার পোয়াসোঁর অনুপাত কত ?

[The length of a gold wire is 12·6 cm and its radius is 1 mm. Its length is increased by 0·5 cm with a force along its length. If this causes a reduction of radius by $\frac{1}{600}$ cm, what is the Poisson's ratio of gold ?]

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে, পোয়াসোঁর অনুপাত $= \frac{\text{পার্শ্বীয় বিকৃতি}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, সোনার তারটির প্রাথমিক দৈর্ঘ্য $= 12{\cdot}6$ cm

তারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি $= 0{\cdot}5$ cm

কাজেই, অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \frac{0{\cdot}5}{12{\cdot}6}$ ... (i)

তারের প্রাথমিক ব্যাসার্ধ $= 1$ mm

ব্যাসার্ধের হ্রাস $= \frac{1}{600}$ cm $= \frac{1}{60}$ mm

কাজেই, পার্শ্বীয় বিকৃতি $= \frac{\frac{1}{60}}{1} = \frac{1}{60}$ ... (ii)

(i) এবং (ii) হইতে পাই, সোনার পোয়াসোঁর অনুপাত $= \frac{\frac{1}{60}}{\frac{0{\cdot}5}{12{\cdot}6}} = 0{\cdot}42$

উদাহরণ 5.11 একটি বেলনাকার তামার তার এবং বেলনাকার ইস্পাতের তার উহাদের একপ্রান্তে পরস্পর যুক্ত করিয়া 3 m লম্বা যুগ্ম তার গঠন করা হইল। তার দুইটির উভয়ের দৈর্ঘ্য 1·5 m এবং ব্যাস 2 mm। যতক্ষণ পর্যন্ত না তারটির দৈর্ঘ্য 3·003 m হইল ততক্ষণ উহাতে ভার চাপান হইল। তামার এবং ইস্পাতের তারের অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি এবং তারে প্রযুক্ত বলের মান নির্ণয় কর। ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক $= 2{\cdot}0 \times 10^{11}$ N/m² এবং তামার ইয়ং গুণাঙ্ক $= 1{\cdot}2 \times 10^{11}$ N/m²।

[A cylindrical copper wire and cylindrical steel wire, each of diameter 2 mm and length 1·5 m are joined at one end to form a composite wire 3 m long. The wire is loaded until its length becomes 3·003 m. Calculate the strains in the copper and steel wires and also the force applied to the wire. Young's modulus of steel $= 2 \cdot 0 \times 10^{11}$ N/m² and Young's modulus of copper $= 1 \cdot 2 \times 10^{11}$ N/m².]

সমাধান : মনে করি, তারে প্রযুক্ত বল = F N

তারের প্রস্থচ্ছেদ α m² হইলে তামার তার এবং ইস্পাতের তারে ক্রিয়াশীল পীড়ন $= \frac{F}{\alpha}$ N/m²

ধরি, প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ায় তামার তারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি l_1 m এবং ইস্পাত তারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি l_2 m

সুতরাং, প্রশ্নের শর্তানুসারে, $l_1 + l_2 = (3 \cdot 003 - 3) = 0 \cdot 003$ m ... (i)

ইয়ং গুণাঙ্কের সংজ্ঞানুসারে লেখা যায়,

$$Y_1 = \frac{(F/\alpha)}{(l_1/1 \cdot 5)} \quad (Y_1 = \text{তামার ইয়ং গুণাঙ্ক}) \quad \cdots \quad (ii)$$

এবং $$Y_2 = \frac{(F/\alpha)}{(l_2/1 \cdot 5)} \quad (Y_2 = \text{ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক}) \quad \cdots \quad (iii)$$

(ii) এবং (iii) সমীকরণ হইতে পাই, $\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{l_2}{l_1}$

বা, $$\frac{l_2}{l_1} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{1 \cdot 2 \times 10^{11}}{2 \times 10^{11}}$$

বা, $\frac{l_2}{l_1} = \frac{1 \cdot 2}{2}$ বা, $\frac{l_2}{l_1 + l_2} = \frac{1 \cdot 2}{2 + 1 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}$

বা, $l_2 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} \times (l_1 + l_2) = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} \times 0 \cdot 003$ m [(i) হইতে]

কাজেই, ইস্পাত তারের বিকৃতি (strain) $= \frac{l_2}{1 \cdot 5}$

$$= \frac{1 \cdot 2 \times 0 \cdot 003}{3 \cdot 2 \times 1 \cdot 5} = 0 \cdot 75 \times 10^{-3}$$

অনুরূপভাবে, $\frac{l_1}{l_1 + l_2} = \frac{2}{3 \cdot 2}$ বা, $l_1 = \frac{2}{3 \cdot 2} \times 0 \cdot 003$ m

কাজেই, তামার তারের বিকৃতি $= \frac{l_1}{1 \cdot 5} = \frac{2 \times 0 \cdot 003}{3 \cdot 2 \times 1 \cdot 5} = 1 \cdot 25 \times 10^{-3}$

সমীকরণ (ii) হইতে পাই, $F = Y_1 \alpha \times \frac{l_1}{1 \cdot 5}$

বা, $F = 1 \cdot 2 \times 10^{11} \times \pi (\cdot 001)^2 \times \frac{2 \times 0 \cdot 003}{3 \cdot 2 \times 1 \cdot 5} = 471 \cdot 23$ N

উদাহরণ 5.12 200 cm দীর্ঘ একটি হাল্কা দণ্ডের দুই প্রান্ত দুইটি সমান দৈর্ঘ্যের তারের সাহায্যে বাঁধিয়া উহাকে অনুভূমিকভাবে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। তার দুইটির মধ্যে একটি ইস্পাতের তৈয়ারী, ইহার প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $0{\cdot}1\ cm^2$ এবং অপরটি পিতলের তৈয়ারী. ইহার ক্ষেত্রফল $0{\cdot}2\ cm^2$। একটি তারকে দণ্ডটির কোন্ স্থানে ঝুলাইয়া দিলে (i) উভয় তারের পীড়ন সমান হইবে, (ii) উভয় তারের বিকৃতি সমান হইবে? ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক$=20\times10^{11}$ dyn/cm^2 এবং পিতলের ইয়ং গুণাঙ্ক$=10\times10^{11}$ dyn/cm^2।

[A light rod of length 200 cm is suspended from the ceiling horizontally by means of two vertical wires of equal length tied to its ends. One of the wires is made of steel and is of cross-section $0{\cdot}1\ cm^2$ and the other is of brass of cross-section $0{\cdot}2\ cm^2$. Find out the position along the rod at which weight may be hung to produce (i) equal stresses, in both wires (ii) equal strains in both wires. The Young's modulus of steel$=20\times10^{11}$ dyn/cm^2 and that of brass$=10\times10^{11}$ dyn/cm^2.]

সমাধান: মনে করি, W ভারটিকে ইস্পাতের তারের নিম্নপ্রান্ত হইতে x cm দূরত্বে ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে (চিত্র 5.2)। এই অবস্থায় ইস্পাতের তারে F_1 dyn বল এবং পিতলের তারে F_2 dyn বল ক্রিয়া করিলে লেখা যায়,

চিত্র 5.2

$$F_1\times x=F_2\times(200-x)\quad\cdots\quad(i)$$

বা, $$\frac{F_1}{F_2}=\frac{(200-x)}{x}$$

এখন, ইস্পাতের পীড়ন

$$=\frac{F_1}{0{\cdot}2}=5\ F_1\ \text{dyn/cm}^2$$

এবং পিতলের পীড়ন$=\dfrac{F_2}{0{\cdot}1}=10\ F_2$ dyn/cm^2

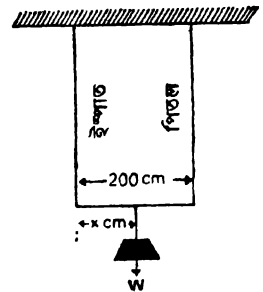
উভয় তারের পীড়ন সমান হইলে লেখা যায়, $10\ F_1=5\ F_2$

বা, $$\frac{F_1}{F_2}=\frac{1}{2}\qquad(ii)$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\frac{200-x}{x}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad x\times\tfrac{2}{3}\times200=133\tfrac{1}{3}\ \text{cm}$$

সুতরাং A প্রান্ত হইতে $133\frac{1}{3}$ cm দূরে তারটিকে ঝুলাইয়া দিলে ইস্পাত এবং পিতলের দণ্ডের পীড়ন সমান হইবে।

ii) ধরি, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বস্তুটিকে ইস্পাত-নির্মিত তারের নিম্নপ্রান্ত হইতে y cm দূরত্বে ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। এই সময় ইস্পাতের ও পিতলের তারে যথাক্রমে F_1' dyn এবং F_2' dyn বল ক্রিয়া করিলে লেখা যায় যে,

$$F_1' \times y = F_2' \times (200-y) \text{ বা, } \frac{F_1'}{F_2'} = \frac{200-y}{y} \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

এখন, ইস্পাতের তারের বিকৃতি (strain) = পীড়ন/ইয়ং গুণাঙ্ক

$$= \frac{F_1'}{0{\cdot}1}/Y = \frac{10\,F_1'}{20 \times 10^{11}} = \frac{F_1'}{2 \times 10^{11}} \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

অনুরূপভাবে, পিতলের তারের বিকৃতি $= \dfrac{F_2'}{2 \times 10^{11}}$ ... (v)

উভয় তারের বিকৃতি সমান বলিয়া (iv) এবং (v) হইতে লেখা যায়,

$$F_1' = F_2'$$

কাজেই, সমীকরণ (iii) এবং (v) হইতে লেখা যায়,

$$\frac{200-y}{y} = \frac{F_1'}{F_2'} = 1 \text{ বা, } y = 100 \text{ cm}$$

সুতরাং, উভয় তারের বিকৃতি সমান করিতে হইলে ভার W-কে AB দণ্ডটির মধ্যবিন্দু হইতে ঝুলাইতে হইবে।

উদাহরণ 5.13 1 লিটার আয়তনবিশিষ্ট গ্লিসারিন 10 kg-wt/cm² চাপের প্রভাবে 0·245 cm³ সঙ্কুচিত হয়। গ্লিসারিনের আয়তন বিকার গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A litre of glycerine contracts 0·245 cm³ when subjected to a pressure of 10 kg-wt/cm². Calculate the bulk modulus of glycerine.]

সমাধান ঃ গ্লিসারিনের প্রাথমিক আয়তন, $V = 1$ লিটার $= 10^3$ cm³

কাজেই, আয়তন বিকৃতি $= \dfrac{0{\cdot}245}{10^3} = 0{\cdot}245 \times 10^{-3}$

এক্ষেত্রে, পীড়ন $= 10$ kg wt/cm² $= 10 \times 10^3 \times 980$ dyn/cm²

∴ গ্লিসারিনের আয়তন বিকার গুণাঙ্ক $= \dfrac{\text{পীড়ন}}{\text{আয়তন বিকৃতি}}$

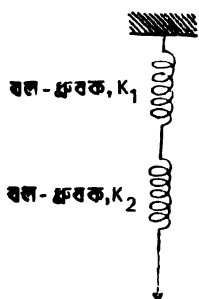
$$= \frac{10 \times 10^3 \times 980}{0{\cdot}245 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^{10} \text{ dyn/cm}^2$$

উদাহরণ 5.14 K_1 এবং K_2 বল ধ্রুবকবিশিষ্ট দুইটি স্প্রিং-এর একটির এক প্রান্তের সহিত অপরটির এক প্রান্ত যুক্ত করা হইল। গঠিত যুগ্ম স্প্রিংটির কার্যকর বল ধ্রুবক কত?

[Two springs of force constants K_1 and K_2 are joined end to end. What is the effective force constant of the composite spring ?]

বল-ধ্রুবক, K_1

বল-ধ্রুবক, K_2

চিত্র 5.3

সমাধান ঃ মনে করি, যুগ্ম স্প্রিংটির নিম্নপ্রান্তে F মানের একটি টান প্রয়োগ করা হইল। ইহাতে K_1 বল ধ্রুবকবিশিষ্ট স্প্রিংটির দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি হইল x_1 এবং K_2 বল ধ্রুবকবিশিষ্ট স্প্রিংটির দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি হইল x_2। কাজেই, বল ধ্রুবকের সংজ্ঞানুসারে লেখা যায়, $F = K_1 x_1 = K_2 x_2$

$$\text{বা, } F=\frac{x_1}{\frac{1}{K_1}}=\frac{x_2}{\frac{1}{K_2}}$$

$$\text{বা, } F=\frac{x_1+x_2}{\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}} \quad \left[\text{যেহেতু, } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}\right] \quad \ldots \quad (i)$$

এখন যুগ্ম-স্প্রিংটির মোট দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি (x_1+x_2)। কাজেই, যুগ্ম-স্প্রিংটির বল ধ্রুবক K হইলে লেখা যায়,

$$F=K(x_1+x_2)=\frac{x_1+x_2}{\frac{1}{K}} \quad \ldots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\frac{x_1+x_2}{\frac{1}{K}}=\frac{x_1+x_2}{\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}} \quad \text{বা, } \frac{1}{K}=\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2} \quad \text{বা, } K=\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}$$

ইহাই গঠিত যুগ্ম-স্প্রিং-এর কার্যকর বল ধ্রুবক।

উদাহরণ 5.15 0·3 mm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এবং 300 cm দীর্ঘ একটি তার AB-এর A প্রান্তটি একটি স্থির অবলম্বনের সহিত যুক্ত রহিয়াছে এবং তারটি উল্লম্বভাবে ঝুলিতেছে। তারটির মধ্যবিন্দুতে একটি 4 kg-wt ভার যুক্ত রহিয়াছে এবং নিম্নপ্রান্ত B-তে অপর একটি 4 kg-wt ভার যুক্ত আছে। তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক 2×10^{12} dyn/cm² ধরিয়া B প্রান্তের অবনমন নির্ণয় কর।

[A wire AB of radius 0·3 mm and length 300 cm is attached to a fixed support and hangs vertically. The wire carries a load of 4 kg-wt attached to its midpoint and also a further load of 4 kg-wt at its lower end B. Taking the value of Young's modulus of the material of the wire to be 2×10^{12} dyn/cm², find the depression of the end B.]

চিত্র 5.4

সমাধান ঃ মনে করি, C হইল AB তারের মধ্যবিন্দু। এই বিন্দুতে একটি 4 kg-wt ভার যুক্ত রহিয়াছে। তারটির নিম্নপ্রান্ত B-তেও অপর একটি 4 kg-wt ভার যুক্ত রহিয়াছে। স্পষ্টতই, তারটির নিচের অর্ধাংশ CB-তে ক্রিয়াশীল টান (tension), $T_1=4$ kg-wt এবং ইহার উপরের অর্ধাংশ AC-তে ক্রিয়াশীল টান, $T_2=8$ kg-wt।

AC এবং CB অংশের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল সমান। কাজেই, AC অংশে ক্রিয়াশীল টান BC অংশের টানের দ্বিগুণ বলিয়া BC অংশের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি l cm হইলে AC অংশের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি ইহার দ্বিগুণ অর্থাৎ $2l$ cm হইবে।

$$\text{BC অংশের প্রাথমিক দৈর্ঘ্য, } L=\frac{300}{2}=150 \text{ cm}$$

ইহার দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি $=l$ cm

ইহার প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, $\alpha=\pi\times(0\cdot03)^2$ cm²

এই অংশে ক্রিয়াশীল টান, $T_1=4000\times980$ dyn

ইয়ং গুণাঙ্ক Y-এর সংজ্ঞানুসারে লেখা যায়, $Y=\frac{T_1}{\alpha}\Big/\frac{l}{L}=\frac{T_1L}{\alpha\, l}$

$$\therefore\quad l=\frac{T_1L}{\alpha\, Y}=\frac{4000\times980\times150}{\pi\times(0\cdot03)^2\times2\times10^{12}}=0\cdot104 \text{ cm}$$

ইহা হইল BC অংশের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি। কাজেই, AC অংশের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি $=2l$

$\therefore$ AB তারের মোট দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি বা B প্রান্তের অবনমন $=l+2l=3l$ cm
$=3\times0\cdot104=0\cdot312$ cm

উদাহরণ 5.16 ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক 2×10^{11} N/m²। 3 m দীর্ঘ এবং 1 mm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের তারের 2·5 mm দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি করিতে প্রয়োজনীয় বল এবং এই দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি করিতে ব্যবহৃত শক্তির পরিমাণ নির্ণয় কর।

[Young's modulus of steel is 2×10^{11} N/m². Calculate the force required to extend by 2·5 mm a steel wire of length 3 m and 1 mm radius and also the energy used to produce this extension.]

সমাধান ঃ l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট তারের Δl দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি করিতে প্রয়োজনীয় বল

$$F=Y.\,\alpha.\,\frac{\Delta l}{l}$$

এখানে α-তারের উপাদানের গুণাঙ্ক এবং α=তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল।

প্রশ্নানুসারে, $Y=2\times10^{11}$ N/m²
$\alpha=\pi\times(10^{-3})^2$m²
$\Delta l=2\cdot5\times10^{-3}$ m
এবং $l=3$ m

$$\text{কাজেই, } F=2\times10^{11}\times\pi\times10^{-6}\times\frac{2\cdot5\times10^{-3}}{3}\text{ N}$$

$$=\frac{500\pi}{3}\text{N}=523\cdot6\text{ N}$$

এই দৈর্ঘ্যবৃদ্ধির জন্য ব্যয়িত শক্তি, $W=\frac{1}{2}\times F\times\Delta l$

$$=\frac{1}{2}\times523\cdot6\times2\cdot5\times10^{-3}\text{ J}=0\cdot655\text{ J}$$

উদাহরণ 5.17 1 mm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি তার হইতে 20 kg-wt ভার ঝুলান আছে। তারটি অকস্মাৎ ছিঁড়িয়া গেলে উহার উষ্ণতা বাড়িবে, নাকি কমিবে? উষ্ণতার পরিবর্তনের মান নির্ণয় কর। তামার ইয়ং গুণাঙ্ক $=12\times10^{10}$ N/m², তামার ঘনত্ব $=9000$ kg/m³, তামার আপেক্ষিক তাপ $=100$ cal kg⁻¹K⁻¹.

[20 kg-wt weight is suspended from a length of wire 1 mm in radius. If the wire suddenly breaks, does its temperature increase or decrease? Calculate the change in temperature. Young's modulus for copper $=12\times10^{10}$ N/m^2; density of copper $=9000$ kg/m^3; specific heat of copper $=100$ cal kg^{-1}K^{-1}.]

সমাধান: যখন বল প্রয়োগের ফলে তারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি হয় তখন উহাতে স্থিতিশক্তি সঞ্চিত হয়। এই স্থিতিশক্তির মান উহার দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি করিতে কৃত কার্যের সমান। তারটি অকস্মাৎ ছিঁড়িয়া গেলে সঞ্চিত স্থিতিশক্তি তাপরূপে আত্মপ্রকাশ করে। ফলে তারটির উষ্ণতা বৃদ্ধি পায়।

তারের মধ্যে সঞ্চিত স্থিতিশক্তি = তারটিতে টান প্রয়োগ করিয়া দৈর্ঘ্য বাড়াইতে কৃত কার্য $=\frac{1}{2}\times$ প্রযুক্ত বল $\times$ দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি।

আবার, প্রযুক্ত বল, $F=YA\dfrac{l}{L}$

$$\therefore \text{ দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি} = l = \frac{F\times L}{YA} = \frac{20\times 9\cdot8\times L}{12\times10^{10}\times\pi\times(10^{-3})^2}\text{ m}$$
$$=5\cdot2\times10^{-4}\text{ L m}$$

$$\therefore \text{ সঞ্চিত স্থিতিশক্তি} = \tfrac{1}{2}\times20\times9\cdot8\times5\cdot2\times10^{-4}\text{ L joules}$$
$$=5\cdot1\times10^{-2}\text{ L joules}$$

এই শক্তির তুল্য তাপশক্তি, $H=\dfrac{5\cdot1\times10^{-2}\text{ L}}{4\cdot2}$ cal

[4·2 joules $\equiv$ 1 cal]

মনে করি, তামার তারের উষ্ণতা-বৃদ্ধি $=\theta$ K

কাজেই, $H=m\times s\times\theta$

$m=$ তামার তারের ভর $=\pi\times(10^{-3})^2\times9000$ L

$s=100$ cal kg^{-1} K^{-1}

অর্থাৎ, $5\cdot1\times10^{-2}\times L\times4\cdot2=\pi\times(10^{-3})^2\times9000\times L\times100\times\theta$

$$\therefore \quad \theta=\frac{5\cdot1\times10^{-2}}{\pi\times10^{-6}\times9000\times100\times4\cdot2}=4\cdot2\times10^{-3}\text{ K}$$

উদাহরণ 5.18 একটি অ্যালুমিনিয়ামের তার এবং একটি ইস্পাতের তারের উভয়ের দৈর্ঘ্য 2·0 m—ইহারা একটি দৃঢ় উল্লম্ব বীম হইতে ঝুলান আছে এবং ইহাদের মধ্যে কিছুটা দূরত্ব আছে। ইহাদের নিচের প্রান্তে যুক্ত একটি হাল্কা অনুভূমিক বীম উহার মধ্যস্থলে একটি 50 kg বোঝা বহন করিতেছে। যদি বোঝা চাপানো অবস্থায় বীমটিকে অনুভূমিক থাকিতে হয় তবে অ্যালুমিনিয়াম তারের ব্যাসার্ধ 0·5 mm হইলে ইস্পাতের তারের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। আলোচ্য সংস্থার স্থিতিস্থাপকতা-জনিত স্থিতিশক্তি নির্ধারণ কর।

ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক $=2\cdot0\times10^{11}$ N/m^2 এবং অ্যালুমিনিয়ামের ইয়ং গুণাঙ্ক $=7\cdot2\times10^{10}$ N/m^2।

[An aluminium wire and a steel wire, each of length 2·0 m,

hang vertically from a rigid beam and are spaced some distance apart. A light horizontal beam, attached to the lower ends, carries a load of 50 kg at its midpoint. If the radius of the aluminium wire is 0·5 mm, find the radius of steel wire necessary if the loaded beam is to remain horizontal. Calculate the elastic potential energy of the system. Young's modulus for steel $=2{\cdot}0\times10^{11}$ N/m² and that for aluminium$=7{\cdot}2\times10^{10}$ N/m²

সমাধান : আমরা জানি যে, কোন তারের অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন,

$$\frac{\Delta l}{l}=\frac{\text{পীড়ন}}{\text{ইয়ং গুণাঙ্ক}}=\frac{F}{\pi r^2 Y}$$

এখানে F হইল তারে প্রযুক্ত বল, r হইল তারের প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসার্ধ এবং Y হইল ইয়ং গুণাঙ্ক।

কাজেই, দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি $=\frac{Fl}{\pi r^2 Y}$

অ্যালুমিনিয়ামের তার এবং ইস্পাতের তার হইতে ঝুলানো অনুভূমিক বীমের মধ্যস্থলে 50 kg ভরবিশিষ্ট বস্তু ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে বলিয়া উভয় তারে 25 kg-wt নিম্নাভিমুখী বল ক্রিয়া করিবে।

এই বলের প্রভাবে অ্যালুমিনিয়ামের তারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি,

$$\Delta l=\frac{Fl}{\pi r^2 Y}=\frac{25\times9{\cdot}8\times2}{\pi\times[0{\cdot}5\times10^{-3}]^2\times7{\cdot}2\times10^{10}}\ \text{m} \qquad (i)$$

বা, $\Delta l=8{\cdot}665\times10^{-3}$ m $=8{\cdot}665$ mm (ii)

মনে করি, ইস্পাতের তারের ব্যাসার্ধ$=x$ mm

কাজেই, ইস্পাতের তারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি

$$\Delta l=\frac{Fl}{\pi r^2 Y}$$

$$=\frac{25\times9{\cdot}8\times2}{\pi(x\times10^{-3})^2\times2{\cdot}0\times10^{11}}\ \text{m} \qquad (iii)$$

অ্যালুমিনিয়ামের তার এবং ইস্পাতের তারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি সমান হইলে তবেই ইহাদের নিম্নপ্রান্ত হইতে ঝুলানো বীমটি অনুভূমিক থাকিবে। কাজেই, (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়,

$$\frac{25\times9{\cdot}8\times2}{\pi\times[0{\cdot}5\times10^{-3}]^2\times7{\cdot}2\times10^{10}}=\frac{25\times9{\cdot}8\times2}{\pi(x\times10^{-3})^2\times2{\cdot}0\times10^{11}}$$

$$\text{বা, } x^2=\frac{0{\cdot}25\times7{\cdot}2}{20}$$

$$\text{বা, } x=\sqrt{\frac{0{\cdot}25\times7{\cdot}2}{20}}=0{\cdot}3\ \text{mm}$$

প্রতিটি তারে সঞ্চিত স্থিতিশক্তি

$$=\frac{1}{2}\times F\times\Delta l$$

$$=\frac{1}{2}\times(25\times 9\cdot 8)N\times(8\cdot 665\times 10^{-3})\ m\ [\text{ সমীকরণ (ii, হইতে }]$$

$$=1\cdot 06\ J$$

কাজেই, দুই তারে মোট সঞ্চিত স্থিতিশক্তি অর্থাৎ সমগ্র সংস্থায় স্থিতিস্থাপকতা-জনিত স্থিতিশক্তি,

$$W=2\times 1\cdot 06\ J=2\cdot 12\ J$$

উদাহরণ 5.19 10 cm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এবং 25 kg ভরবিশিষ্ট একটি গোলককে একটি ইস্পাত তারের এক প্রান্তে আটকাইয়া তারের অপর প্রান্ত ছাদের সহিত যুক্ত করা হইল। তারটির বিলম্বন-বিন্দু ঘরের মেঝে হইতে 521 cm উপরে অবস্থিত। যখন গোলকটিকে সরল দোলকের পিণ্ডের ন্যায় দোলানো হইল তখন দোলনের সর্বনিম্ন বিন্দুতে উহা ঠিক মেঝে ঘেঁষিয়া গেল। এই সর্বনিম্ন বিন্দুতে গোলকটির বেগ কত? ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক $=20\times 10^{11}$ dyn/cm², তারের প্রাথমিক দৈর্ঘ্য $=500$ cm এবং তারের ব্যাসার্ধ $=0\cdot 05$ cm।

[A sphere of radius 10 cm and mass 25 kg is attached to one end of a steel wire and the other end of the wire is connected to the ceiling. The point of suspension of the wire is at a height of 521 cm from the floor. When the sphere oscillates like the bob of a simple pendulum it just grazes the floor at its lowest position. What is the velocity of the sphere at the lowest position? Young's modulus of steel $=20\times 10^{11}$ dyn/cm²; the initial length of the wire $=500$ cm and the radius of the wire $=0\cdot 05$ cm.]

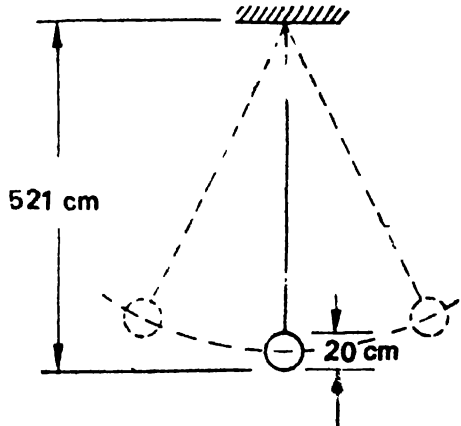
সমাধানঃ তারটির প্রাথমিক দৈর্ঘ্য, $L=500$ cm; শর্তানুসারে; যখন গোলকটি সর্বনিম্ন অবস্থানে আসে তখন ইহার দৈর্ঘ্য

$$=(521-20)=501\ cm$$

কাজেই, গোলকটি দোদুল্যমান অবস্থায় যখন সর্বনিম্ন অবস্থানে আসে তখন তারটির দৈর্ঘ্য-বৃদ্ধি

$$l=(501-500)=1\ cm$$

চিত্র 5.5

তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক Y হইলে এবং ইহার প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল α হইলে লেখা যায় যে, তারের টান, $T=Y\alpha\times\frac{l}{L}$

$=20\times10^{11}\times\pi\times(0{\cdot}05)^2\times\frac{1}{500}=31{\cdot}4\times10^6$ dyn ... (i)

সর্বনিম্ন অবস্থানে তারের টান, T

$=$গোলকের ওজন $(mg)+$অপকেন্দ্র বল $\left(\frac{mv^2}{r}\right)$

এখানে, $m=$গোলকের ভর, v হইল সর্বনিম্ন অবস্থানে গোলকের বেগ। এখন, $m=25$ kg এবং $r=$বিলম্বন-বিন্দু হইতে গোলকের কেন্দ্রের দূরত্ব$=511$ cm বলিয়া লেখা যায়,

$$T=25\times10^3\times980+\frac{25\times10^3\times v^2}{511} \quad \text{... (ii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $31{\cdot}4\times10^6=25\times98\times10^4+\frac{25\times10^3\times v^2}{511}$

বা, $v^2=\frac{6900\times511}{25}$ বা, $v=375{\cdot}55$ cm/s

প্রশ্নমালা 5

1. এক মিটার দীর্ঘ এবং 1 mm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি উল্লম্ব তার হইতে 5 kg ভর ঝুলান আছে। যদি তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক $2{\cdot}0\times10^{12}$ dyn/cm^2 হয় তাহা হইলে ভারমুক্ত অবস্থায় উক্ত তারের দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

[A mass of 5 kg is suspended from a vertical wire 1 m long and of 1 mm radius. If the Young's modulus of the material of the wire be $2{\cdot}0\times10^{12}$ dyn/cm^2, find the length of the wire without load.] [99 9922 cm]

2. 628 cm দীর্ঘ এবং 2 mm ব্যাসবিশিষ্ট একটি উল্লম্ব ইস্পাত তারের দৈর্ঘ্য 1 mm বাড়াইতে কত কিলোগ্রাম ভার চাপাইতে হইবে? ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক$=2\times10^{12}$ dyn/cm^2 এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ$=980$ cm/s^2।

[How many kilogrammes of weight has to be attached to a vertical wire of length 628 cm and diameter 2 mm in order to increase its length by 1 mm ? Young's modulus of steel$=2\times10^{12}$ dyn/cm^2 and the acceleration due to gravity$=980$ cm/s^2.] [10·20 kg]

3. যখন একটি তার হইতে 20 kg-wt ভার ঝুলান আছে তখন উহার দৈর্ঘ্য 600·5 cm। তারটির প্রস্থচ্ছেদ 0·01 cm^2। ভারটি অপসারিত হইলে তারের দৈর্ঘ্য 600 cm হয়। তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The length of a wire is 600·5 cm when a load of 20 kg-wt is suspended from it. The area of cross-section of the wire is 0·01 cm^2. The length of the wire reduces to 600 cm, when the load is removed. Find the Young's modulus of the material of the wire.] [$2{\cdot}35\times10^{12}$ dyn/cm^2]

4. 150 cm লম্বা এবং 0·3 mm ব্যাসবিশিষ্ট একটি তামার তারে ভার চাপান হইলে উহার 1·2 mm দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি হইল। তামার ইয়ং গুণাঙ্ক $12{\cdot}5\times10^{11}$ dyn/cm^2 হইলে তারে প্রযুক্ত ভারের মান নির্ণয় কর।

[A copper wire 150 cm long and 0·8 mm in diameter, is stretched in length by 1·2 mm. If Young's modulus of copper is $12{\cdot}5 \times 10^{11}$ dyn/cm², calculate the load applied to the wire.]

[5·14 kg-wt]

5. একই দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট এবং একই প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট দুইটি তারের মধ্যে একটি ইস্পাতের এবং একটি তামার তৈরী, ইহাদিগকে একই বলে টানা হইলে ইহাদের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধির তুলনা কর। ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক $2{\cdot}0 \times 10^{12}$ dyn/cm² এবং তামার ইয়ং গুণাঙ্ক $1{\cdot}2 \times 10^{12}$ dyn/cm²।

[Compare the elongations produced in two wires, one made of steel and the other of copper of the same length and cross-section when stretched by the same force. Young's modulus of steel is, $2{\cdot}0 \times 10^{12}$ dyn/cm² and that of copper is $1{\cdot}2 \times 10^{12}$ dyn/cm².]

[3 : 5]

6. 0·4 mm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এবং 400 cm দীর্ঘ একটি তার XY-এর X প্রান্তটি একটি স্থির অবলম্বনের সহিত যুক্ত রহিয়াছে এবং তারটি উল্লম্বভাবে ঝুলিতেছে। তারটির মধ্যবিন্দুতে একটি 2 kg-wt ভার যুক্ত রহিয়াছে এবং নিম্নপ্রান্ত Y-তে অপর একটি 2 kg-wt ভার যুক্ত আছে। তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক 2×10^{12} dyn cm² হইলে XY তারের মোট দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি নির্ণয় কর।

[The end X of a wire XY of radius 0·4 mm and length 400 cm is attached to a fixed support and hangs vertically. The wire carries a load of 2 kg-wt fixed to its midpoint and also a further load of 2 kg wt at its lower end Y. If the value of Young's modulus of the material of the wire is 2×10^{12} dyn/cm², find the total increase in length of the wire XY.] [0·117 cm]

7. একটি তারের দৈর্ঘ্যকে 1% বৃদ্ধি করিতে যে-পীড়ন প্রয়োজন তাহা নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক $1{\cdot}2 \times 10^{11}$ N/m²। যদি তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল 2·0 mm² হয় তাহা হইলে পীড়ন সৃষ্টির জন্য প্রয়োজনীয় টান নির্ণয় কর।

[Calculate the stress required to increase the length of a wire by 1%, assuming that Young's modulus for the wire is $1{\cdot}2 \times 10^{11}$ N/m². If the cross sectional area of the wire is 2·0 mm², calculate the tension required to produce the extension.]

[$1{\cdot}2 \times 10^{8}$ N/m², 240 N]

8. দুইটি উল্লম্ব তারের সাহায্যে L দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি হাল্কা দণ্ডের দুইপ্রান্ত বাঁধিয়া সিলিং হইতে অনুভূমিকভাবে ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। তার দুইটির মধ্যে একটি ইস্পাতের তৈয়ারী, ইহার প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল ৰ এবং অপরটি পিতলের তৈয়ারী, ইহার প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল 2ৰ। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য বরাবর কোন্ স্থানে একটি ভার ঝুলাইলে (i) উভয় তারের পীড়ন সমান হইবে, (ii) উভয় তারের অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি সমান হইবে? ধরিয়া লও যে, ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক পিতলের ইয়ং গুণাঙ্কের দ্বিগুণ।

[A light rod of length L is suspended horizontally from the ceiling by means of two vertical wires of equal length tied to its ends. One of the wires is made of steel and is of cross-section α and the other is of brass of cross-section 2α. At what position along the rod must a weight be hung to produce (i) equal stresses in both wires, (ii) equal strains in both wires? Assume that Young's modulus of steel is twice that of brass.]

[ইস্পাতের তারের সহিত যুক্ত প্রান্ত হইতে (i) $\frac{2}{3}$L এবং (ii) $\frac{L}{2}$ দূরত্বে]

9. 2 m লম্বা এবং 0·5 mm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের তারের দুই প্রান্তকে দৃঢ় অবলম্বনের সহিত বাঁধিয়া তারটিকে অনুভূমিক অবস্থায় রাখা হইল। তারটির মধ্যবিন্দুতে কী পরিমাণ ওজন ঝুলাইলে উহা 1 cm নিচে নামিবে? ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক $=2\times10^{12}$ dyn/cm²

[A steel wire of length 2 m and radius 0·5 mm is made horizontal by fixing its ends to rigid supports What load must be suspended from the midpoint of the wire so that the depression of the point is 1 cm The Young's modulus of steel $=2\times10^{12}$ dyn/cm²] [16 g-wt]

10. 2 m দীর্ঘ এবং 1 mm ব্যাসবিশিষ্ট একটি ইস্পাত-নির্মিত তারের 1 mm দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি করিতে হইলে উহা হইতে কী পরিমাণ ভর ঝুলাইতে হইবে? এই দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি করিতে কী পরিমাণ কার্য করিতে হইবে তাহাও নির্ণয় কর। ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক 2×10^{12} dyn/cm²।

[What mass must be suspended from a steel wire of length 2 m and of diameter 1mm to stretch it by 1 mm? Calculate also the work done in stretching the wire. Young's modulus of steel is 2×10^{12} dyn/cm².] [8·01 kg ; 392·5 erg]

11. 7·8 g/cm³ ঘনত্ববিশিষ্ট একটি সুষম ইস্পাত-নির্মিত তারের ভর 16 g এবং দৈর্ঘ্য 250 cm। তারটিকে 8 kg-wt ভারের সাহায্যে টানা হইলে ইহার 0·12 cm দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি হয়। ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A uniform wire made of steel having density 7·8 g/cm³ weighs 16 g and is 250 cm in length. It lengthens by 0·12 cm when stretched by a load of 8 kg-wt. Calculate the value of Young's modulus of steel.] [$1·99\times10^{12}$ dyn/cm²]

12. যদি বিকৃতির মানকে $\frac{1}{1000}$ অতিক্রম করিতে না দেওয়া হয় এবং যদি ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক $2·0\times10^{11}$ N/m² হয় তাহা হইলে 1·0 mm ব্যাসবিশিষ্ট ইস্পাতের তারে সর্বোচ্চ কতটা ভার প্রয়োগ করা যায় তাহা নির্ণয় কর।

[Find the maximum load which may be placed on a steel wire of diameter 1·0 mm if the permitted strain must not exceed $\frac{1}{1000}$ and the Young's modulus for steel is $2·0\times10^{11}$ N/m².] [151 N]

13. 1 mm ব্যাসবিশিষ্ট একটি তার হইতে একটি ভার ঝুলাইয়া ইহাকে টানটান অবস্থায় রাখা হইয়াছে। উষ্ণতা 30°C কমিলে তারের দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত

রাখিতে কী পরিমাণ অতিরিক্ত ভার ঝুলাইতে হইবে ? তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক $=2\times10^{12}$ dyn/cm^2 এবং তারের দৈর্ঘ্য প্রসারণ গুণাঙ্ক $=20\times10^{-6}$/°C।

[A wire of diameter 1 mm is kept taut by suspending a load. If the temperature now reduces by 30°C, what additional load is required to keep the length of the wire unaltered ? The Young's modulus of the material of the wire$=2\times10^{12}$ dyn/cm^2 and the coefficient of linear expansion$=20\times10^{-6}$/°C.] [9·6 kg-wt]

14. একটি ইস্পাত-নির্মিত বেলনাকার দণ্ডের 20°C উষ্ণতাবৃদ্ধিজনিত প্রসারণকে বাধা দিতে হইলে উহাতে কী পরিমাণ পীড়ন সৃষ্টি করিতে হইবে ? ইস্পাতের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $1{\cdot}2\times10^{-5}$/°C এবং ইয়ং গুণাঙ্ক 2×10^{12} dyn/cm^2।

[What stress is to be applied to the end of a cylindrical steel bar to prevent it from expanding on account of a rise of temperature through 20°C. The coefficient of linear expansion of steel is $1{\cdot}2\times10^{-5}$/°C and Young's modulus of steel is 2×10^{12} dyn/cm^2] [480 M dyn/cm^2]

15. 10^{12} dyn/cm^2 ইয়ং গুণাঙ্কবিশিষ্ট উপাদানের তৈয়ারী একটি তারে 1 kg-wt/mm^2 পীড়ন সৃষ্টি করা হইল। (i) তারটির শতকরা দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি এবং (ii) দৈর্ঘ্যবৃদ্ধির সময় প্রতি একক আয়তনে কৃত কার্যের পরিমাণ নির্ণয় কর।

[A stress of 1 kg wt/mm^2 is produced in a wire of which Young's modulus is 10^{12} dyn/cm^2. Find (i) the percentage increase in length, (ii) the work done per unit volume of the wire during stretching.] [0·0098%, 4812 erg/cm^3]

16. একটি দণ্ডের প্রাথমিক দৈর্ঘ্য 1·2 m এবং প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $1{\cdot}5\times10^{-4}$ m^2। 6·0 N টান প্রয়োগ করিয়া ইহাকে 3 mm প্রসারিত করা হইল। টান পাওয়া অবস্থায় দণ্ডটির শক্তি-ঘনত্ব (প্রতি একক আয়তনে সঞ্চিত স্থিতিশক্তি) নির্ণয় কর।

[A rod of original length 1·2 m and area of cross-section $1{\cdot}5\times10^{-4}$ m^2 is extended by 3 mm when stretching tension is 6·0 N. Calculate the energy density (the elastic potential energy per unit volume) of the stretched rod.] [50 J/m^3]

17. 20 K উষ্ণতা-বৃদ্ধিতে যে-দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি হয় তাহার সমান দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি করিতে 0·40 mm^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ইস্পাত-নির্মিত তারে কী পরিমাণ টান প্রয়োগ করিতে হইবে ? ইস্পাতের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$=1{\cdot}2\times10^{-5}$K^{-1} এবং ইয়ং গুণাঙ্ক$=0{\cdot}2\times10^{12}$ N/m^2।

[Calculate the amount of tension, required to extend a vertical steel wire of cross-sectional area 0·40 mm^2 by the same amount as would result from a temperature rise of 20 K. For steel, the coefficient of linear expansion$=1{\cdot}2\times10^{-5}$ K^{-1} and Young's modulus$=0{\cdot}2\times10^{12}$ N/m^2.] [19·2 N]

18. 10 cm বাহুবিশিষ্ট একটি অ্যালুমিনিয়ামের ঘনককে 7.5×10^{10} dyn স্পার্শক বলের সাহায্যে পীড়নের ফলে নিম্নতলের সাপেক্ষে উপরিতলের 0·03 cm সরণ ঘটিল। অ্যালুমিনিয়ামের কৃন্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[When a tangential force of 7.5×10^{10} dyn is applied to an aluminium cube of side 10 cm, the displacement of the upper surface with respect to its lower surface is 0·03 cm. Calculate the modulus of rigidity of aluminium.] [1.5×10^{11} dyn/cm²]

19. r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট সুষম সরু তারকে দুইটি দৃঢ় অবলম্বন A এবং B-এর সহিত অনুভূমিকভাবে আটকান হইল। এই অবস্থায় ইহা ঠিক টান-টান আছে এবং A ও B-এর মধ্যবর্তী তারের দৈর্ঘ্য $2l$। m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে উহার মধ্যবিন্দু C হইতে ঝুলাইয়া দিলে মধ্যবিন্দুটি y $(y \ll l)$ উল্লম্ব-দূরত্ব নামিয়া আসে।

y/l-এর বর্গ ও তদপেক্ষা অধিক ঘাতবিশিষ্ট পদ উপেক্ষা করিয়া m, l, r এবং y-এর সাহায্যে তারের পীড়ন, বিকৃতি ও ইয়ং গুণাঙ্কের মান নির্ণয় কর।

[A thin uniform wire of radius r is clamped horizontally between two rigid supports A and B, so that it is just taut and the length of the wire is $2l$. A body of mass m is hung from the midpoint C and displaces C through a vertical distance y $(y \ll l)$. Find the expressions for the stress and strain in the wire and for Young's modulus of the wire in terms of m, l, r and y, neglecting the squares and higher powers of y/l.]

$$\left[\frac{mgl}{2\pi r^2 y},\ \frac{1}{2}\frac{y^2}{l^2},\ \frac{mgl^3}{\pi r^2 y^3}\right]$$

20. একটি বৃত্তাকার প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট দণ্ডের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক 2.04×10^8 kg-wt/m²। ইহার পোয়াসোঁর অনুপাত 0·4 এবং দৈর্ঘ্য 1 m এবং প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল 95 mm²। এই দণ্ডকে 10 kg-wt ভারের সাহায্যে টানা হইল। ইহার দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি ও প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলের হ্রাস নির্ণয় কর।

[A rod of circular cross-section is made of a material having Young's modulus 2.04×10^8 kg-wt/m². Its Poisson's ratio is 0·4, its length is 1 m and the area of its cross-section is 95 mm². The rod is stretched by a weight of 10 kg-wt. Find the elongation and the diminution in cross-section.] [5 mm (প্রায়), 3.95×10^{-8} cm²]

21. অ্যালুমিনিয়ামের একটি দণ্ডের ব্যাস 2 cm। 70 kg ভার প্রয়োগ করিলে ইহার দৈর্ঘ্য দশলক্ষে 30 ভাগ বাড়ে। অ্যালুমিনিয়ামের পোয়াসোঁর অনুপাত 0·33 হইলে, ঐ ভারে তারের ব্যাস কতটুকু হ্রাস পাইবে ?

[The diameter of an aluminium rod is 2 cm. If 70 kg-wt is applied to the rod, its length increases by 30 in one million. If Poisson's ratio of aluminium is 0·33, what will be the decrease in the diameter of the wire under the influence of this weight ?]

[1.98×10^{-5} cm]

22. 760 mmHg চাপে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ বায়ুর আয়তন 200 cm³।

উষ্ণতা অপরিবর্তিত রাখিয়া এই বায়ুর চাপ 1 mmHg বৃদ্ধি করিলে ইহার 0·263 cm^3 আয়তনবৃদ্ধি ঘটে। সমোষ্ণ অবস্থায় বায়ুর আয়তন বিকার গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The volume of a certain volume of air at a pressure of 760 mmHg is 200 cm^3. On increasing the pressure by that due to 1 mmHg, without change of temperature, the volume is observed to decrease by 0·263 cm^3. Find the isothermal bulk modulus of air.] [$10{\cdot}135 \times 10^5$ dyn/cm^2]

23. 5·0 Nm^{-1} এবং 10 Nm^{-1} বল ধ্রুবকবিশিষ্ট দুইটি স্প্রিং-এর একটির একপ্রান্তের সহিত অপরটির এক প্রান্ত যুক্ত করা হইল। গঠিত যুগ্ম স্প্রিংটির কার্যকর বল ধ্রুবক কত ?

[Two springs of force constants 5·0 Nm^{-1} and 10 Nm^{-1} are joined end to end. What is the effective force constant ?]

[3 33 Nm^{-1}]

ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ

ঘনত্ব, আপেক্ষিক গুরুত্ব ও তরলের চাপ

6.1 ঘনত্ব ও আপেক্ষিক গুরুত্ব : কোন পদার্থের একক আয়তনে যে-পরিমাণ ভর থাকে তাহাকে উহার ঘনত্ব (density) বলে। অর্থাৎ, কোন বস্তুর ভর M হইলে এবং উহার আয়তন V হইলে ঐ বস্তুর উপাদানের ঘনত্ব,

$$\rho = \frac{\text{বস্তুর ভর, } M}{\text{বস্তুর আয়তন, } V}$$

সি জি. এস. পদ্ধতিতে ঘনত্বের একক g/cm^3, এম. কে. এস. পদ্ধতিতে ঘনত্বের একক kg/m^3 এবং এফ. পি. এস. পদ্ধতিতে ইহার ঘনত্বের একক lb/f ।

কোন পদার্থের কোন নির্দিষ্ট আয়তনের ওজন এবং 4° সেলসিয়াস উষ্ণতায় উহার সম-আয়তন জলের ওজনের অনুপাত ঐ পদার্থের আপেক্ষিক গুরুত্ব (specific gravity) বলা হয়। অর্থাৎ,

$$\text{আপেক্ষিক গুরুত্ব, } s = \frac{V \text{ আয়তন পদার্থের ওজন}}{4°C \text{ উষ্ণতায় } V \text{ আয়তন জলের ওজন}}$$

$$= \frac{V \text{ আয়তন পদার্থের ভর} \times g}{4°C \text{ উষ্ণতায় } V \text{ আয়তন জলের ভর} \times g}, \quad g = \text{অভিকর্ষজ ত্বরণ}$$

$$= \frac{\text{একক আয়তন পদার্থের ভর}}{4°C \text{ উষ্ণতায় একক আয়তন জলের ভর}}$$

$$= \frac{\text{পদার্থের ঘনত্ব}}{4°C \text{ উষ্ণতায় জলের ঘনত্ব}}$$

অর্থাৎ, কোন পদার্থের আপেক্ষিক গুরুত্ব হইল 4°C উষ্ণতার জলের তুলনায় ইহার আপেক্ষিক ঘনত্ব। এইজন্য আপেক্ষিক গুরুত্বকে **আপেক্ষিক ঘনত্ব** (relative density)-ও বলা হয়।

6.2 চাপ ও বল ঃ কোন ক্ষেত্রফলের উপর একটি বল ক্রিয়া করিলে প্রতি একক ক্ষেত্রফলে যে-বল ক্রিয়াশীল তাহাকে চাপ (pressure) বলে। মনে করি, A ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট কোন স্থানে মোট ক্রিয়াশীল বলের পরিমাণ F। সুতরাং সংজ্ঞানুসারে,

$$\text{চাপ, } P=\frac{\text{বল, } F}{\text{ক্ষেত্রফল, } A} \qquad \cdots \qquad (6.1)$$

সি. জি. এস. পদ্ধতিতে বলের একক ডাইন এবং ক্ষেত্রফলের একক বর্গ সেন্টিমিটার। কাজেই, এই পদ্ধতিতে চাপের একক dyn/cm^2। এফ. পি. এস. পদ্ধতিতে চাপের একক $poundals/ft^2$ এবং এম. কে. এস. পদ্ধতিতে চাপের একক N/m^2।

6.3 তরলের চাপ ঃ কোন তরলের h গভীরতায় তরল-কর্তৃক প্রযুক্ত চাপ,

$$P_0=\text{গভীরতা } (h) \times \text{তরলের ঘনত্ব } (\rho) \times \text{অভিকর্ষজ ত্বরণ } (g)$$

$$\text{বা, } P_0=h\rho g \qquad \cdots \qquad (6.2)$$

মুক্ত বায়ুমণ্ডলে অবস্থিত তরলের উপর বায়ুমণ্ডলের চাপও ক্রিয়া করে। বায়ুমণ্ডলের চাপের মান B হইলে তরলের h গভীরতায় ক্রিয়াশীল মোট চাপ

$$P=B+h\rho g \qquad \cdots \qquad (6.3)$$

6.4 পাস্কালের সূত্র ঃ কোন আবদ্ধ তরলের কোন অংশে চাপ প্রয়োগ করিলে ঐ চাপের মান অপরিবর্তিত রাখিয়া সর্বদিকে সঞ্চালিত হয় এবং ঐ সঞ্চালিত চাপ তরল সংলগ্ন পাত্রের গায়ে লম্বভাবে ক্রিয়া করে।

ধরি, কোন পাত্রে কিছু পরিমাণ তরল আবদ্ধ আছে। এই পাত্রের সহিত α_1, α_2, α_3,$\cdots$, α_n ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট কতকগুলি পিস্টন রহিয়াছে। α_1 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট পিস্টনে F_1 বল প্রয়োগ করিলে পিস্টনে যে-চাপ ক্রিয়া করিবে উহা তরলের মধ্য দিয়া মান অপরিবর্তিত থাকিয়া সর্বদিকে সঞ্চালিত হইবে। ফলে α_2, α_3,$\cdots$, α_n ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট পিস্টনগুলির উপর যথাক্রমে F_2, F_3,$\cdots$, F_n বল ক্রিয়া করিলে পাস্কালের সূত্রানুসারে,

$$\frac{F_1}{\alpha_1}=\frac{F_2}{\alpha_2}=\frac{F_3}{\alpha_3}=\cdots\cdots=\frac{F_n}{\alpha_n} \qquad \cdots \qquad (6.4)$$

6.5 ঘাত-বৃদ্ধির নীতি ঃ পাস্কালের সূত্র হইতে প্রমাণ করা যায় যে, তরলের কোন স্থানে অল্প বল প্রয়োগ করিয়া অন্যত্র অধিক মানের বল পাওয়া যায়। মনে করি, যে-পাত্রে তরল আবদ্ধ আছে উহাতে দুইটি পিস্টন যুক্ত রহিয়াছে। ইহাদের মধ্যে একটি পিস্টন ছোট, অপরটি বড়। ধরি, ছোট পিস্টনের ক্ষেত্রফল α এবং বড় পিস্টনের ক্ষেত্রফল β।

$$\text{কাজেই, } \beta>\alpha$$

ছোট পিস্টনে F_1 বল প্রয়োগ করা হইল। ইহাতে বড় পিস্টনে F_2 বলের উদ্ভব হইলে 6.4 নং সমীকরণ হইতে লেখা যায়,

$$\frac{F_1}{\alpha}=\frac{F_2}{\beta} \quad \therefore \quad F_2=\frac{\beta}{\alpha}.F_1 \qquad \cdots \qquad (6.5)$$

$\beta > \alpha$ বলিয়া $(\beta/\alpha) > 1$; কাজেই দেখা যাইতেছে যে, $F_2 > F_1$ (6.6)

অর্থাৎ, ছোট পিস্টনে একটি বল প্রয়োগ করিয়া বড় পিস্টনে অপেক্ষাকৃত বড বল পাওয়া যায়। ইহাকে ঘাত-বৃদ্ধির নীতি বলা হয়।

6.6 হাইড্রলিক প্রেসের কার্যনীতি ঃ হাইড্রলিক প্রেসে দুই ধাপে বল-বৃদ্ধি করা হয়। প্রথম ধাপে লিভারের নীতির সাহায্যে এবং দ্বিতীয় ধাপে ঘাত-বৃদ্ধির নীতির সাহায্যে।

হাইড্রলিক প্রেসের যান্ত্রিক সুবিধা

$$= \frac{\text{লিভারের বড বাহুর দৈর্ঘ্য}}{\text{লিভারের ছোট বাহুর দৈর্ঘ্য}} \times \frac{\text{বড পিস্টনের ক্ষেত্রফল}}{\text{ছোট পিস্টনের ক্ষেত্রফল}} \quad (6.7)$$

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 6.1 588 g ভরবিশিষ্ট এবং 100 cm^3 আয়তনবিশিষ্ট একটি সংকর ধাতু 8·0 আপেক্ষিক ঘনত্ববিশিষ্ট লোহা এবং 2·7 আপেক্ষিক ঘনত্ববিশিষ্ট অ্যালুমিনিয়ামের তৈয়ারী। এই সংকর ধাতুতে উপাদানগুলির i) ভরের এবং (ii) আয়তনের অনুপাত নির্ণয় কর।

[An alloy of mass 588 g and volume 100 cm^3 is made of iron of relative density 8·0 and aluminium of relative density 2·7. Find the proportion of the constituents of the alloy (i) by mass and (ii) by volume.]

সমাধান ঃ মনে করি, লোহার ভর $= m_1$ g

এবং অ্যালুমিনিয়ামের ভর $= m_2$ g

সুতরাং, প্রশ্নের শর্তানুসারে, $m_1 + m_2 = 588$ ... (i)

এবং, $\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2.7} = 100$ ... (ii)

(ii) হইতে পাই, $m_1 + \frac{8}{2.7} m_2 = 800$ ... (iii)

(i) এবং (iii) হইতে, $\left(\frac{8}{2.7} - 1\right) m_2 = 800 - 588$

বা, $\frac{5.3}{2.7} m_2 = 212$ বা, $m_2 = 212 \times \frac{2.7}{5.3} = 108$ g

সুতরাং, $m_1 = 588 - 108 = 480$ g

$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{480}{108} = \frac{40}{9}$

এখন, লোহার আয়তন, $V_1 = \frac{m_1}{8} = \frac{480}{8} = 60$ cm^3

এবং অ্যালুমিনিয়ামের আয়তন $= (100 - 60) = 40$ cm^3

$\therefore \frac{V_1}{V_2} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$

উদাহরণ 6.2 একটি ব্যাটারির অ্যাসিডের আপেক্ষিক ঘনত্ব 1·285 এবং ওজনের অনুপাতে ইহাতে 38% সালফিউরিক অ্যাসিড আছে। ব্যাটারির অ্যাসিডের প্রতি লিটারে কত গ্রাম সালফিউরিক অ্যাসিড আছে নির্ণয় কর।

[The relative density of a battery acid is 1·285 and it contains 38% sulphuric acid by weight. Find the amount of sulphuric acid in grammes in a litre of battery acid.]

সমাধান : এক লিটার অ্যাসিড দ্রবণের ভর $= 10^3 \times 1{\cdot}285 = 1285$ g

শর্তানুসারে, এই অ্যাসিডে শতকরা 38% (ভরের অনুপাতে) সালফিউরিক অ্যাসিড আছে বলিয়া এক লিটার অ্যাসিড দ্রবণে সালফিউরিক অ্যাসিডের ভর,

$$m = 1285 \times 0{\cdot}38 = 388{\cdot}3 \text{ g}$$

উদাহরণ 6.3 কোন আয়তাকার পাত্রের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে 50 cm, 20 cm, 25 cm। পাত্রটিকে জলপূর্ণ করা হইলে উহার দীর্ঘ দেওয়ালে ক্রিয়াশীল ঘাত কত হইবে g-wt এককে তাহা নির্ণয় কর।

[The length, breadth and height of a rectangular vessel are 50 cm, 20 cm and 25 cm respectively. When the vessel is full of water, calculate the total thrust on the long wall of the vessel in g-wt.]

সমাধান : 6.1 নং চিত্রে ABCD একটি দীর্ঘ দেওয়াল। ইহার ক্ষেত্রফল,

চিত্র 6.1

$A = 25 \times 50$ cm^2

ইহার গড় গভীরতা $h = \frac{25}{2}$ cm ;

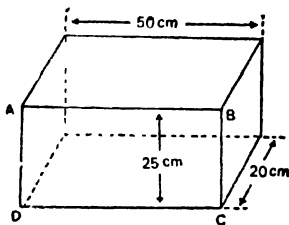
জলের ঘনত্ব $= 1$ g/cm^3 (ধরি)।

কাজেই, ABCD দেওয়ালে ক্রিয়াশীল ঘাত

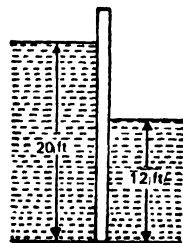
$= A h \rho g$

$= 25 \times 50 \times \frac{25}{2} \times 1 \times g$ dyn

$= 25 \times 25 \times 25$ g-wt

$= 15625$ g-wt

উদাহরণ 6.4 একটি খালের লক-গেটের বিস্তার 15 ft। ইহার এক পার্শ্বে জলের উচ্চতা 20 ft এবং অন্য পার্শ্বে 12 ft। যদি 1 ঘনফুট জলের ওজন 62·5 lb হয় তাহা হইলে লক-গেটে লব্ধি ঘাত নির্ণয় কর।

চিত্র 6.2

[The lock-gate of a canal is 15 ft wide. The water level on one side of the gate is 20 ft high and on the other side 12 ft. If 1 ft^3 of water weighs 62·5 lb, calculate the resultant thrust on the lock-gate.]

সমাধান ঃ কোন উল্লম্ব তলে মোট ঘাত=গড় চাপ × ক্ষেত্রফল

$$=(\tfrac{1}{2}h\rho g) \times \text{ক্ষেত্রফল}$$

h হইল তরলের গভীরতা এবং g হইল অভিকর্ষজ ত্বরণ। (চিত্র 6.2 দ্রষ্টব্য)

কাজেই, লক-গেটের যে-পার্শ্বে জলের গভীরতা 20 ft সেই পার্শ্বে ক্রিয়াশীল ঘাত

$$=\tfrac{1}{2}\times 20\times 62{\cdot}5\times g\times(20\times 15)\text{ poundals}=10\times 62{\cdot}5\times(20\times 15)\text{ lb-wt}$$
$$=187{,}500\text{ lb-wt}$$

অপর পার্শ্বে জলের গভীরতা 12 ft ; কাজেই, ঐ পার্শ্বে জলের ঘাত

$$=\tfrac{1}{2}\times 12\times 62{\cdot}5\times g\times(12\times 15)\text{ poundals}$$
$$=6\times 62{\cdot}5\times(12\times 15)\text{ lb-wt}=67{,}500\text{ lb-wt}$$

এই ঘাত দুইটি বিপরীত দিক হইতে ক্রিয়াশীল বলিয়া লক-গেটে লব্ধি ঘাত

$$=(187{,}500-67{,}500)=120{,}000\text{ lb-wt}$$

উদাহরণ 6.5 উল্লম্ব পার্শ্বতলবিশিষ্ট একটি আয়তাকার পাত্রে 0·060 m গভীরতার জল এবং 0·040 m গভীরতার প্যারাফিন তেল রহিয়াছে। ইহার 0·20 m দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি পার্শ্বতলে মোট ঘাত কত হইবে ? প্যারাফিন তেলের ঘনত্ব 800 kg/m^{-3}।

[A rectangular vessel with vertical sides contains depths of 0·060 m of water and 0·040 m of paraffin Find the total thrust on one side of length 0·20 m. The density of paraffin oil is 800 kg/m^{-3}.]

সমাধান ঃ 6 3 নং চিত্রে ABCD আয়তাকার পাত্রটির একটি পার্শ্বতল। ইহার ABEF অংশে প্যারাফিন তেল (ঘনত্ব=800 kg/m^3) এবং EFDC অংশে জল রহিয়াছে।

চিত্র 6.3

জলের ঘনত্ব=1000 kg/m^3

প্রশ্নানুসারে, ABCD তলের দৈর্ঘ্য (AB বাহুর দৈর্ঘ্য) = 0 2 m

ABEF অংশের ক্ষেত্রফল,

$$\alpha_1=0{\cdot}04\times 0{\cdot}2=0{\cdot}008\text{ m}^2$$

ABEF অংশের ঘাত,

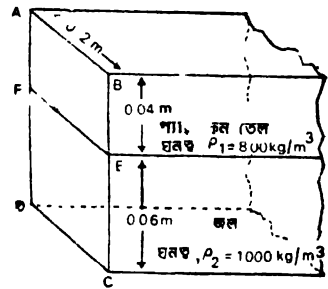
$$F_1=\frac{h_1}{2}\times\rho_1\times g\times\alpha_1$$

$$=\frac{0{\cdot}04}{2}\times 800=g\times 0{\cdot}008=0{\cdot}128\,g=0{\cdot}128\times 9{\cdot}8\text{ N}$$

EFDC অংশের ক্ষেত্রফল, $\alpha_2=0{\cdot}06\times 0{\cdot}2=0{\cdot}012\text{ m}^2$

EFDC অংশের উপর ক্রিয়াশীল তরলের ঘাত, F_2

$$=\left(h_1\rho_1+\frac{h_2}{2}\rho_2\right)g\times\alpha_2=\left(0{\cdot}04\times 800+\frac{0{\cdot}06}{2}\times 1000\right)g\times 0{\cdot}012$$

$$=(32+30)\,g\times 0{\cdot}012=0{\cdot}744\times 9{\cdot}8\text{ N}$$

কাজেই, ABCD পার্শ্বতলে তরলের মোট ঘাত, $F = F_1 + F_2$

$= 0{\cdot}128 \times 9{\cdot}8 + 0{\cdot}744 \times 9{\cdot}8 = 8{\cdot}55$ N (প্রায়)

উদাহরণ 6.6 কোন হ্রদের তলদেশ হইতে একটি বায়ু-বুদ্‌বুদ্‌ উঠিতে আরম্ভ করিল। হ্রদের তলদেশে ইহার ব্যাস 3·6 mm এবং হ্রদের জলের উপরিতলে ইহার ব্যাস 4 mm। হ্রদের গভীরতা 2·5 m এবং উপরিতলের নিকট জলের উষ্ণতা 40°C হইলে হ্রদের তলদেশে জলের উষ্ণতা কত ? গভীরতার সহিত জলের ঘনত্বের পরিবর্তন উপেক্ষণীয় এবং বায়ুমণ্ডলের চাপ 76 cm পারদস্তম্ভের চাপের সমান এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ 980 cm/s² ধরিয়া লও।

[An air bubble starts rising from the bottom of a lake. Its diameter is 3·6 mm at the bottom and 4 mm at the surface The depth of the lake is 2·5 metres and the temperature at the surface is 40°C. What is the temperature at the bottom of the lake? Assume that the variation of density of water with depth is negligible. Atmospheric pressure is 76 cm of mercury and acceleration due to gravity is 980 cm/s².]

সমাধান ঃ হ্রদের উপরিতলে বায়ু-বুদ্‌বুদের উপর ক্রিয়াশীল চাপ, P_1

= বায়ুমণ্ডলের চাপ = 76 cm পারদস্তম্ভের চাপ

এই সময় বায়ু-বুদ্‌বুদের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi(0{\cdot}2)^3$ cm³

এবং উপরিতলে বায়ু-বুদ্‌বুদের উষ্ণতা, $T_1 = (273+40) = 313$ K

হ্রদের তলদেশে বায়ু-বুদ্‌বুদের উপর ক্রিয়াশীল চাপ

= বায়ুমণ্ডলের চাপ + 2·5 m জলস্তম্ভের চাপ

= 76 cm পারদস্তম্ভের চাপ + 250 cm জলস্তম্ভের চাপ

= 76 cm পারদস্তম্ভের চাপ + $\frac{250}{13{\cdot}6}$ cm পারদস্তম্ভের চাপ

$= \left(76 + \frac{250}{13{\cdot}6}\right)$ cm পারদস্তম্ভের চাপ

$= 76 + 18{\cdot}39 = 94{\cdot}39$ cm পারদস্তম্ভের চাপ

মনে করি, হ্রদের তলদেশে জলের উষ্ণতা $= T_2$ K

আমরা জানি যে, $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$

বা, $\frac{76 \times \frac{4}{3}\pi(0{\cdot}2)^3}{313} = \frac{94{\cdot}39 \times \frac{4}{3}\pi(0{\cdot}18)^3}{T_2}$

$\therefore\ T_2 = \frac{94{\cdot}39 \times (0{\cdot}18)^3}{76 \times (0{\cdot}2)^3} \times 313 = \frac{94{\cdot}39}{76} \times 0{\cdot}729 \times 313$

$= 283{\cdot}3$ K

কাজেই, হ্রদের তলদেশে জলের উষ্ণতা $= 283{\cdot}3 - 273 = 10{\cdot}3$°C

উদাহরণ 6.7 42 মিটার গভীরতাবিশিষ্ট কোন হ্রদের তলদেশে 0·5 cm³ আয়তনের একটি বুদ্‌বুদ্‌ উৎপন্ন হইয়া ভাসিয়া উঠিতে লাগিল। যদি হ্রদের তলদেশে এবং উপরিতলে হ্রদের জলের উষ্ণতা 17°C এবং 27°C হয় এবং যদি

ঐ সময় জল-ব্যারোমিটারের পাঠ 103 m হয়, তাহা হইলে হ্রদের উপরিতলে আসিয়া বুদ্‌বুদ্‌টির আয়তন কত হইবে ?

[A bubble of volume 0·5 cm^3 is formed at the bottom of a lake 42 metres deep and floats up. If the temperature of the water in the lake at the bottom and the surface be 17°C and 27°C respectively and the water barometer stands at 103 metres at the time, then what would be the volume of the bubble at the surface ?]

সমাধান ঃ হ্রদের তলদেশে বুদ্‌বুদের আয়তন, $V_1 = 0{\cdot}5$ cm^3

হ্রদের তলদেশে অবস্থানকালে বুদ্‌বুদের উপর ক্রিয়াশীল চাপ, P_1

= বায়ুমণ্ডলের চাপ + 42 মিটার জলস্তম্ভের চাপ

= (103 + 42) m জলস্তম্ভের চাপ = 145 m জলস্তম্ভের চাপ

হ্রদের তলদেশে জলের উষ্ণতা, $T_1 = 17 + 273 = 290$ K

হ্রদের উপরিতলে অবস্থানকালে বুদ্‌বুদের উপব ক্রিয়াশীল চাপ, P_2

= বায়ুমণ্ডলের চাপ = 103 m জলস্তম্ভের চাপ

উপরিতলের জলের উষ্ণতা = 27 + 273 = 300 K

মনে করি, উপরে আসিয়া বুদ্‌বুদের যে-আয়তন হয় তাহার মান = V_2 cm^3

আমরা জানি, $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$

$$\therefore \ V_2 = \frac{P_1 V_1}{T_1} \cdot \frac{T_2}{P_2} = \frac{145 \times 0{\cdot}5}{290} \times \frac{300}{103}$$

$$= \frac{300}{206} \times 0{\cdot}5 = \frac{75}{103} = 0{\cdot}728 \text{ cm}^3$$

উদাহরণ 6.8 বায়ুমণ্ডলীয় চাপের বায়ু দ্বাবা পূর্ণ একটি চোঙেব খোলামুখ নিচেব দিকে রাখিয়া উহাকে জলেব তলায় লইযা যাওয়া হইল, যাহাতে উহার এক-তৃতীয়াংশ জলপূর্ণ হয়। আরও কতটা গভীরতায় গেলে চোঙটির দুই-তৃতীয়াংশ জলপূর্ণ হইবে ? পারদেব ঘনত্ব 13·6 g/cm^3 এবং ব্যারোমিটারের পাঠ 76 cm।

[A cylinder filled with air at atmospheric pressure is lowered in water with its mouth downwards till it is $\frac{1}{3}$ full of water. To what further depth should it be lowered till it is $\frac{2}{3}$ full of water ? Density of mercury is 13 6 g/cm^3 and barometric height is 76 cm.]
(U P. B. 1953)

সমাধান ঃ বায়ুমণ্ডলের চাপ, P_1 = 76 cm পারদস্তম্ভের চাপ

বা, P_1 = (76 × 13 6) cm জলস্তম্ভের চাপ

মনে করি, h_1 cm গভীরতায় চোঙের $\frac{1}{3}$ অংশ জলপূর্ণ হয়। কাজেই, এই অবস্থায় চোঙের বায়ুর আয়তন, $V_2 = \frac{2}{3} V_1$, V_1 = চোঙের আয়তন

h_1 cm গভীরতায় চোঙে আবদ্ধ বায়ুর উপর ক্রিয়াশীল চাপ, P_2

= বায়ুমণ্ডলের চাপ + h_1 cm জলস্তম্ভের চাপ

= $(76 \times 13{\cdot}6 + h_1)$ cm জলস্তম্ভের চাপ

বয়েলের সূত্রানুসারে লেখা যায়, $P_1 V_1 = P_2 V_2$

$$\text{বা,}\quad 76\times13\cdot6\times V_1=(76\times13\cdot6+h_1)\times\tfrac{2}{3}V_1$$

$$\text{বা,}\quad (h_1+76\times13\cdot6)=\tfrac{3}{2}\times(76\times13\cdot6)\qquad\ldots\qquad(i)$$

এইবার মনে করি যে, চোঙটিকে h_2 cm গভীরতায় লইয়া গেলে চোঙের $\frac{2}{3}$ অংশ জলপূর্ণ হয় অর্থাৎ, চোঙের বায়ুর আয়তন হয় $V_3=\frac{1}{3}V_1$

এই অবস্থায় চোঙে আবদ্ধ বায়ুর উপর ক্রিয়াশীল চাপ, P_3=বায়ুমণ্ডলের চাপ + h_2 cm জলস্তম্ভের চাপ।

$$=(76\times13\cdot6+h_2)\text{ cm জলস্তম্ভের চাপ}$$

বয়েলের সূত্রানুসারে, $P_1V_1=P_3V_3$

$$\text{বা,}\quad (76\times13\cdot6+h_2)\times\tfrac{1}{3}V_1=76\times13\cdot6\,V_1$$

$$\text{বা,}\quad 76\times13\cdot6+h_2=3\times76\times13\cdot6\qquad\ldots\qquad(ii)$$

(ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$h_2-h_1=\tfrac{3}{2}\times76\times13\cdot6=1550\cdot4\text{ cm}$$

উদাহরণ 6.9 800 cm^3 আয়তনের একটি বোতলের মুখ নিচের দিকে রাখিয়া উহাকে একটি পুকুরের জলে ডুবান হইল। বোতলটিকে কোন্ গভীরতায় লইয়া গেলে উহাতে 300 cm^3 জল ঢুকিবে? বায়ুমণ্ডলের চাপ 76 cm পারদস্তম্ভের চাপের সমান এবং পারদের আপেক্ষিক গুরুত্ব 13·6।

[A bottle whose volume is 800 cm^3 is sunk mouth downwards below the surface of a pond. How far must it be sunk for 300 cm^3 of water to run into the bottle? The barometric height at the surface is 76 cm of mercury and the specific gravity is 13·6.]

(Nag U., 1950)

সমাধান: মনে করি, নির্ণেয় গভীরতা $=h$ cm

h cm গভীরতায় বোতলের বায়ুর উপর ক্রিয়াশীল চাপ, P_1

=বায়ুমণ্ডলের চাপ + h cm জলস্তম্ভের চাপ

$=(76\times13\cdot6+h)$ cm জলস্তম্ভের চাপ

এই সময় বোতলের বায়ুর আয়তন $=(800-300)=500$ cm^3

বায়ুমণ্ডলের চাপে বায়ুর আয়তন $=800$ cm^3

কাজেই, বয়েলের সূত্রানুসারে পাই,

$$76\times13\cdot6\times800=(76\times13\cdot6+h)\times500$$

$$\text{বা,}\quad h=\tfrac{3}{5}\times76\times13\cdot6=620\cdot16\text{ cm}$$

উদাহরণ 6.10 একটি চোঙাকৃতি পাত্রকে সমান ওজনের পারদ এবং জল দ্বারা পূর্ণ করা হইয়াছে। দুইটি স্তরের মোট উচ্চতা 29·2 cm। পাত্রের তলে তরলের চাপ নির্ণয় কর। পারদের আপেক্ষিক গুরুত্ব 13·6।

[A cylindrical vessel is filled with equal amounts by weight of mercury and water. The overall height of the two layers is 29·2 cm. Determine the pressure of the liquid at the bottom of the vessel. The specific gravity of mercury is 13·6.]

সমাধান ঃ মনে করি, পারদস্তম্ভের উচ্চতা h_1 cm এবং জলস্তম্ভের উচ্চতা h_2 cm। পাত্রের পারদের এবং জলের ওজন সমান বলিয়া লেখা যায়,

$h_1 \times 13{\cdot}6 \times \alpha = h_2 \times 1 \times \alpha$ [α=পাত্রের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল]

বা, $h_1 \times 13{\cdot}6 = h_2$ ... (i)

আবার শর্তানুসারে, $h_1 + h_2 = 29{\cdot}2$ ... (ii)

বা, $h_1 + 13{\cdot}6\, h_1 = 29{\cdot}2$ [(i) হইতে]

বা, $h_1 = 2$ cm

সুতরাং, পারদস্তম্ভের উচ্চতা 2 cm এবং জলস্তম্ভের উচ্চতা (29·2 – 2) বা 27 2 cm।

কাজেই, পাত্রের তলদেশে তরলের চাপ = 2 cm পারদস্তম্ভের চাপ + 27·2 cm জলস্তম্ভের চাপ।

$$= \left(2 + \frac{27{\cdot}2}{13{\cdot}6}\right) \text{ cm পারদস্তম্ভের চাপ} = 4 \text{ cm পারদস্তম্ভের চাপ।}$$

উদাহরণ 6.11 20 cm ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার ভূমিবিশিষ্ট এবং 15 cm উচ্চতা-সম্পন্ন একটি ফাঁপা শঙ্কুকে 1·8 g/cm³ ঘনত্ববিশিষ্ট তরল দ্বারা পূর্ণ করা হইল। তরলের ভর এবং শঙ্কুর ভূমিতে ক্রিয়াশীল ঘাতের মান নির্ণয় কর।

[A hollow right circular cone of base diameter 20 cm and height 15 cm is completely filled with a liquid of density 1·8 g/cm³. Find the mass of the liquid and the total thrust at the base of the cone.]

সমাধান ঃ শঙ্কুর আয়তন = তরলের আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

r = শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ = 10 cm ;

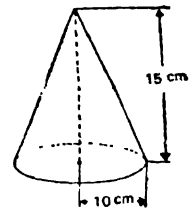
h = উচ্চতা = 15 cm

কাজেই, তরলের ভর = আয়তন × ঘনত্ব (d)

$= \frac{1}{3} \times \pi \times (10)^2 \times 15 \times 1{\cdot}8$ g $= 2826$ g

ভূমির উপর ক্রিয়াশীল ঘাত,

$F = h \times d \times g \times A$ dyn $= hdA$ g-wt

$= 15 \times 1{\cdot}8 \times \pi \times (10)^2 = 8478$ g-wt

চিত্র 6.4

উদাহরণ 6.12 একটি জলাধার হইতে জল সরবরাহ করা হয়। সমুদ্র-তল হইতে 150 ft উচ্চতায় একটি বাড়ির জলের ট্যাপের ক্ষেত্রফল $1\frac{1}{2}$ sq. in.। জলের ট্যাপে ক্রিয়াশীল ঘাত $162\frac{7}{8}\frac{3}{8}$ lb-wt হইতে জলাধারের উচ্চতা নির্ণয় কর।

[Water is supplied from a reservoir. A tap in one of the houses supplied is at a height of 150 ft above the sea-level and has an area of $1\frac{1}{2}$ sq. in. Find the height of the reservoir assuming the thrust on the tap = $162\frac{7}{8}\frac{3}{8}$ lb-wt.]

সমাধান ঃ মনে করি, সমুদ্রতল হইতে জলাধারের উচ্চতা = h ft

সুতরাং, সমুদ্রতল হইতে 150 ft উচ্চতায় জলের ট্যাপে ক্রিয়াশীল জলের চাপ
$=(h-150)\times 62{\cdot}5\times g$ poundal $=(h-150)\times 62{\cdot}5$ lb-wt

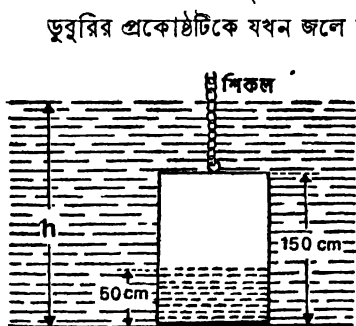
ট্যাপের ক্ষেত্রফল $\frac{3}{2}\text{ in}^2=\frac{3}{2\times 12^2}\text{ ft}^2$

কাজেই, জলের ট্যাপে ক্রিয়াশীল ঘাত,
$(h-150)\times 62{\cdot}5\times\frac{3}{2\times 12^2}$ lb-wt $=162\frac{73}{96}$ lb-wt (প্রশ্নের শর্তানুসারে)

কাজেই, $h=162\frac{73}{96}\times\frac{2\times 12\times 12}{62{\cdot}5\times 3}+150=400$ ft (প্রায়)

উদাহরণ 6.13 150 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি চোঙাকাব ডুবুরিব ঘণ্টাকে একটি জলাশয়ের তলায় লইয়া যাওয়া হইল। দেখা গেল যে, উহাতে 50 cm জল উঠিল। জলাশয়ের গভীরতা নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, জলাশয়ের তরলপৃষ্ঠে বায়ুমণ্ডলের চাপ 1000 cm জলস্তম্ভের চাপের সমান এবং উষ্ণতা স্থির রহিয়াছে।

[A cylindrical diving bell, whose length is 150 cm is lowered to the bottom of a tank. The water is found to rise 50 cm in the bell. Find the depth of the tank. Assume the atmospheric pressure at the surface as equivalent to 1000 cm of water and the temperature as constant.] (I.I.T. Adm. Test, 1969)

সমাধান ঃ যদি ঘণ্টাটির প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল α cm^2 হয় তাহা হইলে বায়ুমণ্ডলীয় চাপে আবদ্ধ বায়ুর আয়তন $V_1=150\,\alpha$ cm^3

ডুবুরির প্রকোষ্ঠটিকে যখন জলে নামান হয় তখন উহাতে জল উঠিতে থাকে, এবং আবদ্ধ বায়ুর আয়তন হ্রাস পায় (চিত্র 6.5)। প্রকোষ্ঠের খোলা মুখটি যখন জলাশয়ের তলদেশে পৌঁছে তখন আবদ্ধ বায়ুর আয়তন V_2

$$=(150-50)\alpha=100\,\alpha\text{ cm}^3$$

মনে করি, জলাশয়ের গভীরতা $=h$ cm

কাজেই, আবদ্ধ বায়ুর উপর ক্রিয়াশীল চাপ

চিত্র 6.5

$=$ বায়ুমণ্ডলের চাপ $+(h-50)$ cm জলস্তম্ভের চাপ $=(950+h)$ cm জলস্তম্ভের চাপ

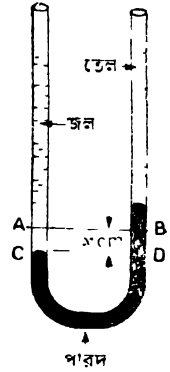
বয়েলের সূত্রানুসারে লেখা যায়,

$P_1V_1=P_2V_2$. $P_1=$ বায়ুমণ্ডলের চাপ $=1000$ cm জলস্তম্ভের চাপ

বা, $1000\times 150\alpha=(950+h)\times 100\alpha$

বা, $950+h=1500$ বা, $h=550$ cm

উদাহরণ 6.14 সুষম প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট দুইটি সমান দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি উল্লম্ব U-নলে এমনভাবে পারদ ভরা হইল যাহাতে উভয় বাহুতে পারদস্তম্ভের উচ্চতা খোলা মুখ হইতে 25 cm নিচে থাকে। ইহার পর নলের একটি বাহুতে জল এবং অপর বাহুতে 0·65 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট তেল ঢালিয়া উভয় বাহুকে সম্পূর্ণভাবে ভর্তি করা হইল। জলস্তম্ভ এবং তৈলস্তম্ভের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। (পারদের আপেক্ষিক গুরুত্ব=13·6)

[A vertical U-tube of uniform cross-section and limbs of equal length has mercury poured into it until each surface is 25 cm from the open end. Water is then poured down in one of the limbs and oil of specific gravity 0·65 down the other limb until both the limbs are completely filled. Find the lengths of the water and oil columns. (Specific gravity of mercury=13·6)]

চিত্র 6.6

সমাধান ঃ মনে করি, U-নলের এক বাহুতে জল এবং অন্য বাহুতে তেল ঢালিবার পূর্বে U-নলের পারদতল AB লেভেলে ছিল (চিত্র 6.6)। বাম বাহুতে জল এবং ডান বাহুতে তেল ঢালা হইলে বাম বাহুর পারদস্তম্ভ কিছুটা নামিবে এবং ডান বাহুর পারদস্তম্ভ কিছুটা উঠিবে (কেননা, তেল অপেক্ষা জলের আপেক্ষিক গুরুত্ব বেশি)।

মনে করি, $AC=x$ cm, তাহা হইলে $BD=x$ cm হইবে, (কারণ U-নলের উভয় বাহুর প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল সমান)। জলের ঘনত্ব $=1$ g/cm^3 এবং তেলের ঘনত্ব $=0{\cdot}65$ g/cm^3।

এখন, C বিন্দুতে জলের চাপ = D বিন্দুতে তেল ও পারদের দরুন চাপ

$\therefore\ (25+x)\times 1\times g=(25-x)\times 0{\cdot}65\times g+2x\times 13{\cdot}6\times g$

এখানে, g=অভিকর্ষজ ত্বরণ

বা, $(25+x)=(25-x)\times 0{\cdot}65+27{\cdot}2x$ বা, $x=0{\cdot}34$ cm

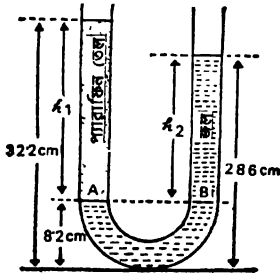
কাজেই, জলস্তম্ভের দৈর্ঘ্য $=(25+x)=25{\cdot}34$ cm

এবং তৈলস্তম্ভের দৈর্ঘ্য $=(25-x)=24{\cdot}66$ cm

উদাহরণ 6.15 একটি U নলের একটি বাহুতে প্যারাফিন তেল এবং অন্যটিতে জল লইয়া উহাকে উল্লম্বভাবে একটি টেবিলের উপর স্থাপন করা হইল (চিত্র 6.7)। টেবিলের তল হইতে প্যারাফিন তেলের স্তম্ভের উপরের এবং নিম্নের তলের দূরত্ব যথাক্রমে 32·2 cm এবং 8·2 cm। টেবিলের তল হইতে অপর বাহুর জলস্তম্ভের উপর পর্যন্ত দূরত্ব 28·6 cm। প্যারাফিন তেলের আপেক্ষিক গুরুত্ব নির্ণয় কর।

[A U-tube containing paraffin oil in one limb and water in the other is placed vertically on a table. The distances of the upper

and the lower surfaces of the paraffin oil column from the table are 32·2 cm and 8·2 cm respectively. The upper surface of the water column is at a distance of 28·6 cm from the table. Find the specific gravity of paraffin oil.]

সমাধান : প্যারাফিন স্তম্ভের উচ্চতা, $h_1 = 32{\cdot}2 - 8{\cdot}2 = 24$ cm।

চিত্র 6.7

প্যারাফিন ও জলের বিভেদতলের উপরিস্থ জলস্তম্ভের উচ্চতা, $h_2 = 28{\cdot}6 - 8{\cdot}2$
$= 20{\cdot}4$ cm

জল ও প্যারাফিনের বিভেদতলে U-নলের উভয় বাহুতে চাপ সমান। অর্থাৎ, A তলে প্যারাফিন তেল-কর্তৃক প্রযুক্ত চাপ B তলে জল-কর্তৃক প্রযুক্ত চাপের সমান।

অর্থাৎ, $h_1\rho_1 g = h_2\rho_2 g$ বা, $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{h_2}{h_1}$

এখানে, ρ_1 এবং ρ_2 হইল যথাক্রমে প্যারাফিন তেল এবং জলের ঘনত্ব। $\rho_2 = 1$ g/cm³ ধরিয়া লইলে,

$$\rho_1 = \frac{h_2}{h_1}\rho_2 = \frac{20{\cdot}4}{24} \times 1 = 0{\cdot}85 \text{ g/cm}^3$$

কাজেই, প্যারাফিন তেলের আপেক্ষিক গুরুত্ব $= 0{\cdot}85$

উদাহরণ 6.16 একটি হাইড্রলিক প্রেসে জলের উপর 10^7 dyn বল প্রয়োগ করিবার জন্য 100 cm² ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি পিস্টন ব্যবহৃত হইয়াছে। অপর পিস্টনটি 2000 kg ভরবিশিষ্ট একটি ট্রাককে ধরিয়া রাখিলে ইহার প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল কত ?

[A piston of cross-sectional area 100 cm² is used in a hydraulic press to exert a force of 10^7 dyn on the water. What is the cross-sectional area of the other piston which supports a truck having a mass 2000 kg ?] (I. I. T. Adm. Test, 1972, Group B)

সমাধান : হাইড্রলিক প্রেসের উপর পিস্টনে ক্রিয়াশীল চাপের মান সমান।

$$\text{এখন, চাপ} = \frac{\text{মোট বল}}{\text{প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল}}$$

কাজেই, প্রথম পিস্টনের উপর ক্রিয়াশীল চাপ, $P_1 = \dfrac{10^7}{100} = 10^5$ dyn/cm²

মনে করি দ্বিতীয় পিস্টনের ক্ষেত্রফল $= \alpha$ cm²

দ্বিতীয় পিস্টনটির উপর ক্রিয়াশীল মোট বল $= 2000 \times 10^3 \times 980$

দ্বিতীয় পিস্টনে ক্রিয়াশীল চাপ, $P_2 = \dfrac{2000 \times 10^3 \times 980}{\alpha}$ dyn/cm²

আমরা জানি, $P_1 = P_2$

$$\therefore \quad 10^5 = \frac{2000 \times 10^3 \times 980}{\alpha}$$

বা, $$\alpha = \frac{2000 \times 10^3 \times 980}{10^5} = 19600 \text{ cm}^2$$

প্রশ্নমালা 6

1. কোন কূপের তলদেশের কোন বিন্দুতে চাপ দুই ফুট গভীরতায় কোন বিন্দুতে চাপের দ্বিগুণ। যদি বায়ুমণ্ডলীয় চাপ 30 ফুট জলের চাপের সমান হয় তবে কূপে জলের গভীরতা কত ?

[The pressure at a point situated at the bottom of a well is twice the pressure at a point situated at a depth of 2 ft. If the atmospheric pressure is equal to the pressure of 30 ft of water. what is the depth of water in the well ?] [34 ft]

2. বায়ুমণ্ডলীয় চাপ 1 $Mdyn/cm^2$ হইলে জলের কত গভীরতায় চাপ দুই বায়ুমণ্ডলীয় চাপের সমান হইবে ?

[If the atmospheric pressure is 1 $Mdyn/cm^2$, at what depth of water will pressure be equal to two atmospheres ?] [10·19 m]

3. সমুদ্র-জলের ঘনত্ব 1 025 g/cm^3 হইলে সমুদ্রপৃষ্ঠ হইতে 50 ft গভীরতায় চাপ কত ?

[What is the pressure at the depth of 50 ft below the surface of the sea, the density of sea-water being 1·025 g/cm^3 ?]

[বায়ুমণ্ডলীয় চাপ + প্রতি বর্গফুটে 3203 poundals]

4. সমুদ্রের 226 ft গভীরতায় একটি বায়ু বুদ্‌বুদের আয়তন 1 7 cm^3 হইলে সমুদ্রের উপরিতলে আসিয়া বুদ্‌বুদটির আয়তন কত হইবে ? ধরিয়া লও যে, বায়ুমণ্ডলের চাপ 34 ft জলস্তম্ভের চাপের সমান এবং সমুদ্র-জলের আপেক্ষিক গুরুত্ব 1·1।

[If the volume of an air-bubble at a depth of 226 ft below the surface of sea is 1·7 cm^3, what will be its volume at the surface of the sea-water ? Assume that the atmospheric pressure is equal to 34 ft of water and the specific gravity of sea-water is 1·1.]

[14·13 cm^3]

5. প্রতি বর্গ সেন্টিমিটার ক্ষেত্রফলের উপর 1 kg-wt চাপ দিতে হইলে পারদস্তম্ভের উচ্চতা কত হওয়া প্রয়োজন ?

[What must be the height of a column of mercury to exert a pressure of 1 kg-wt per square centimeter ?] [73·53 cm]

6. সমুদ্র-জলের আপেক্ষিক গুরুত্ব 1 025 , সমুদ্রপৃষ্ঠ হইতে *40 m* গভীরতায় চাপ কত হইবে তাহা $g\text{-}wt/cm^2$ এককে প্রকাশ কর।]

[The specific gravity of sea-water is 1·025 ; calculate the pressure in g-wt/cm² at a depth of 40 m below the surface of the sea.] [4100 g-wt/cm²]

7. প্রমাণ কর যে, যদি কোন ঘনকাকার বাক্স জলপূর্ণ থাকে তাহা হইলে উহার পৃষ্ঠগুলিতে ক্রিয়াশীল মোট ঘাত উহাতে বিদ্যমান জলের ওজনের তিন গুণের সমান।

[Prove that if a cubical box be filled with water, total thrust exerted on its faces is equal to three times the weight of the water which it contains.]

8. 2 ft × 2 ft × 4 ft আকারের একটি আয়তাকার বাক্সকে একটি তরলে এমনভাবে ডুবান হইল যাহাতে উহার দীর্ঘ বাহুগুলি উল্লম্ব থাকে এবং ইহার ভূমিটি পাত্রস্থ তরলের উপরিতলের 10 ft নিচে থাকে। ইহার উপরে, নিচে এবং পার্শ্বের তলগুলিতে ক্রিয়াশীল ঘাতের তুলনা কর।

[A rectangular box of dimensions 2 ft × 2 ft × 4 ft is immersed in a liquid in such a way that its long sides are vertical and its base being at a depth of 10 ft below the surface of a vessel of the liquid. Compare the thrusts on the top, bottom and sides of the box.] [3 : 5 : 8]

9. একটি লক্-গেট্-এ জলের উপরিতল হইতে 15 ft গভীরতায় 1 ft² ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ছিদ্র করা হইল। একটি কাষ্ঠখণ্ডকে কত বলে ঐ ছিদ্রে চাপিয়া ধরিলে জলকে ঠেলিয়া রাখা সম্ভব হইবে?

[A hole of area 1 ft² is made in a lock-gate at a depth of 15 ft below the surface of the water. What force must be exerted to keep back the water by holding a piece of wood against the hole.] [937·5 lb-wt]

10. একটি জলের ট্যাঙ্কের ভূমির ক্ষেত্রফল 5 m × 4 m এবং ইহার গভীরতা 3 m। যদি ইহা জলপূর্ণ হয় তাহা হইলে উহার ভূমিতে এবং প্রতিটি পার্শ্ববর্তী তলে ক্রিয়াশীল ঘাত নির্ণয় কর।

[A water tank has a rectangular base of area 5 m × 4 m, and is 3 m deep. If it is full of water, calculate the thrust on the base and on each side.] [$5{\cdot}9 \times 10^5$ N, $1{\cdot}8 \times 10^5$ N, $2{\cdot}2 \times 10^5$ N]

11. পৃথিবীপৃষ্ঠে গড় বায়ুমণ্ডলীয় চাপ 750 mmHg। বায়ুমণ্ডলের ভর নির্ণয় করিবার জন্য তোমার আর কী তথ্য প্রয়োজন হইবে? ইহার মান নির্ণয় কর।

[The mean barometric pressure over the surface of the Earth is about 750 mmHg. What other information do you need to estimate the mass of the atmosphere? Work out a value for this.] [$5{\cdot}25 \times 10^{18}$ kg (প্রায়)]

12. একটি বোতলে 1·8 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট 180 g সালফিউরিক অ্যাসিড রহিয়াছে। ইহাতে 180 g জল ঢালা হইলে আয়তনের সঙ্কোচন কী হইবে? মিশ্রণের আপেক্ষিক গুরুত্ব 1·5 ধরিয়া লও।

[A bottle contains 180 g of sulphuric acid of specific gravity 1·8. If 180 g of water is added to it, what should be the contraction in volume ? Assume that the specific gravity of the mixture is 1·5.] [40 cm^3]

13. 25·7 g ভরবিশিষ্ট একখণ্ড বরফ একটি বীকারের জলে ভাসিতেছে। ইহা গলিয়া গেলে যে-জল উৎপন্ন হইবে উহার আয়তন কত ? গলনের ফলে বরফের আয়তনের কত ভগ্নাংশ সঙ্কুচিত হয় ? বরফের আপেক্ষিক গুরুত্ব=0·9।

[A piece of ice of mass 25·7 g floats in water in a beaker. Find the volume of the water formed when ice melts. By what fraction of its volume ice contracts on melting ? Specific gravity of ice=0·9.] [25·7 cm^2 ; $\frac{1}{9}$]

14. 200 g ভরবিশিষ্ট একখণ্ড সঙ্কর ধাতুখণ্ডে ওজনের অনুপাতে 80% টিন এবং 20% অ্যান্টিমনি রহিয়াছে। টিন এবং অ্যান্টিমনির আপেক্ষিক গুরুত্ব যথাক্রমে 7·3 এবং 6·6 হইলে ধাতুখণ্ডটির আয়তন নির্ণয় কর।

[A piece of alloy weighing 200 g contains 80% tin and 20% antimony by weight. Find the volume of the piece of alloy, if the specific gravities of tin and antimony are 7·3 and 6·6 respectively.] [27·98 cm^3]

15. 1·85 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট একটি তরলের 7 cm^3 আয়তনের সহিত 5 cm^3 জল মিশ্রিত করা হইল। মিশ্রণের আপেক্ষিক গুরুত্ব 1·615 হইলে সঙ্কোচনের পরিমাণ নির্ণয় কর।

[7 cm^3 of a liquid of specific gravity 1·85 is mixed with 5 cm^3 of water. Find the amount of contraction, if the specific gravity of the mixture is 1·615.] [0·89 cm^3]

16. 50 কিলোগ্রাম ভরবিশিষ্ট এক ব্যক্তি তাহার ডান পায়ের গোড়ালির উপর ভর করিয়া দাঁড়াইয়া আছে। তাহার গোড়ালি 2 cm ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্ত হইলে ঐ ব্যক্তি মাটিতে কতটা চাপ দিতেছে ?

[A 50 kg person balances on the heel of his right foot which is 2 cm in diameter. What pressure does he exert on the ground ?]

(সংসদের নমুনা প্রশ্ন, 1978) [15·92 kg-wt/cm^2]

17. একটি ফাঁপা লম্ববৃত্তীয় শঙ্কুর উচ্চতা 10 cm এবং ভূমির ক্ষেত্রফল 80 cm^2। শঙ্কুটির ভূমিকে একটি অনুভূমিক টেবিলে রাখিয়া ইহাকে 1·06 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট তরলে পূর্ণ করা হইল। শঙ্কুটির ভূমিতে তরল-কর্তৃক প্রযুক্ত মোট বল নির্ণয় কর।

[A hollow right circular cone of height 10 cm has a base area of 80 cm^2. It is filled with a liquid of specific gravity 1·06 and placed with its base on a horizontal table. Calculate the total force exerted by the liquid on the base.] [848 g-wt]

18. 800 kg ভরবিশিষ্ট একটি মোটরগাড়ির চারিটি চাকা রহিয়াছে। ইহাদের

প্রতিটির টায়ার-এ বায়ুমণ্ডলীয় চাপ অপেক্ষা অতিরিক্ত 1.8×10^5 N/m² চাপ ক্রিয়া করিতেছে। ভূমির সহিত প্রতিটি টায়ারের স্পর্শতলের ক্ষেত্রফল কত নির্ণয় কর।

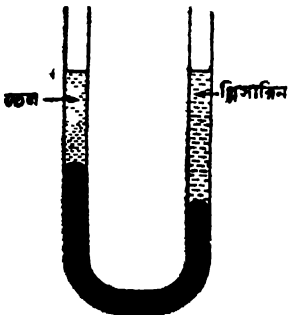
[A motor car of mass 800 kg has four wheels each with tyres at a pressure of 1.8×10^5 N/m² above atmospheric pressure. What is the area of each tyre in contact with the ground ?] [110 cm²]

19. সমুদ্রের h m গভীরতা হইতে উপরি-পৃষ্ঠে উঠিয়া একটি বায়ু-বুদ্‌বুদের আয়তন দ্বিগুণিত হইল। যদি ব্যারোমিটারের পারদস্তম্ভের উচ্চতা 750 mm হয় এবং সমুদ্র-জল ও পারদের আপেক্ষিক ঘনত্ব যথাক্রমে 1·05 এবং 13·58 হয় তাহা হইলে h-এর মান নির্ণয় কর।

[The volume of a bubble of air is doubled in rising from a depth of h metres in a sea to the surface. If the barometric height is 750 mm and the relative densities of sea water and mercury are respectively 1·05 and 13·58, calculate h. (H. S. 1961) [9·7 m]

20. জলের সহিত মিশ্রিত হয় না, এইরূপ একটি তরলকে আংশিকভাবে জলপূর্ণ U-নলে ঢালা হইল। এই তরলের তল অপর বাহুর জলের তল হইতে 8 mm উপরে রহিয়াছে। তরল ঢালিবার ফলে এই বাহুর জলের উপরিতল উহার পূর্ববর্তী অবস্থান হইতে 20 mm উপরে উঠিয়াছে। জলের সাপেক্ষে উক্ত তরলের আপেক্ষিক ঘনত্ব নির্ণয় কর।

[A liquid, which does not mix with water, is poured into a U-tube partly filled with water. The level of this liquid is 8 mm above the water level in the other limb, which has risen 20 mm from its original position. Calculate the density of the liquid relative to that of water.] [0·83]

21. একটি সুষম প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি উল্লম্ব U-নলের দুই বাহুতে পারদ রহিয়াছে। ইহার এক বাহুতে 10 cm দৈর্ঘ্যের গ্লিসারিন-স্তম্ভ (গ্লিসারিনের ঘনত্ব= 1·3 g/cm³) প্রবেশ করান হইল। অপর বাহুতে 0·8 g/cm³ ঘনত্বের একটি তেল ঢালা হইল যতক্ষণ পর্যন্ত না গ্লিসারিন ও তেলের উপরিপৃষ্ঠ 6·8 নং চিত্রের অনুরূপ একই অনুভূমিক তলে আসে। তৈল-স্তম্ভের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। পারদের ঘনত্ব 13·6 g/cm³।

চিত্র 6.8

[A vertical U-tube of uniform inner cross-section contains mercury in both its arms. A glycerine (density 1·3 g/cm³) column of length 10 cm is introduced into one of the arms. Oil of density 0·8 g/cm³ is poured into the other arm until the upper surfaces of oil and glycerine are in the same horizontal level as shown in

the figure. Find the length of the oil column. Density of mercury is 13·6 g/cm^3.] [9·61 cm]

22. একটি U-নলের একটি বাহুতে প্যারাফিন তেল এবং অন্যটিতে জল লইয়া উহাকে উল্লম্বভাবে একটি টেবিলের উপর রাখা হইল। যদি টেবিল হইতে প্যারাফিন তেলের নিম্নতল এবং উপরিতল যথাক্রমে 8·4 ইঞ্চি এবং 20·4 ইঞ্চি উপরে থাকে এবং টেবিলের তল হইতে অপর বাহুর জলের উপরিতলের উচ্চতা 18·6 ইঞ্চি হয়, তাহা হইলে প্যারাফিন তেলের আপেক্ষিক গুরুত্ব নির্ণয় কর।

[A U-tube containing paraffin oil in one arm and water in the other is placed vertically on a table. If the bottom and the top of the paraffin oil column from the table are respectively 8·4 inches and 20·4 inches and top of the water column is 18·6 inches from the table, find the specific gravity of the paraffin oil.] [0·85]

23. একটি U-নলের দুই বাহুর একটিতে জল এবং অপরটিতে অলিভ তেল আছে, ইহারা পারদ দ্বারা পরস্পর হইতে পৃথক করা আছে। জলস্তম্ভের উচ্চতা 16 cm এবং তৈলস্তম্ভের উচ্চতা 10 cm। দুই বাহুর পারদতলের লেভেলের পার্থক্য নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, জলের আপেক্ষিক গুরুত্ব=1, অলিভ তেলের আপেক্ষিক গুরুত্ব=0·92 এবং পারদের আপেক্ষিক গুরুত্ব=13·6।

[Two limbs of a U-tube contain water and olive oil separated by a column of mercury. The height at the water column is 16 cm and that of the oil column is 10 cm. Find the difference in level between the surfaces of mercury in the two limbs. Assume that the specific gravity of water=1, the specific gravity of olive oil=0·92 and the specific gravity of mercury=13·6.] [0·5 cm]

24. একটি সুষম U-নলকে জল দ্বারা অর্ধ পূর্ণ করা হইল। উহার এক বাহুতে 0·83 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট প্যারাফিন তেল ঢালা হইল যতক্ষণ না অপর বাহুতে জল 5 cm উঠে। প্যারাফিন তেলের স্তম্ভটির উচ্চতা কত?

[A uniform U-tube is half-filled with water. Paraffin oil of specific gravity 0·83 is then poured in one limb until the water in the other limb rises by 5 cm. What is the height of the oil column poured in the tube?] [12·05 cm]

সপ্তম পরিচ্ছেদ

আর্কিমিডিসের সূত্র

7.1 আর্কিমিডিসের সূত্র: কোন বস্তুকে আংশিকভাবে বা সম্পূর্ণভাবে কোন স্থির তরলে বা গ্যাসীয় পদার্থে নিমজ্জিত করিলে বস্তুর ওজনের আপাত-হ্রাস হয়। এই আপাত-হ্রাস বস্তু-কর্তৃক অপসারিত তরল বা গ্যাসীয় পদার্থের ওজনের সমান।

7.2 প্লবতা ঃ কোন নিমজ্জিত বস্তুর উপর তরল বা গ্যাসীয় পদার্থ যে-উর্ধ্বাভিমুখী বল প্রয়োগ করে তাহাকে ঐ তবলের বা গ্যাসীয় পদার্থের প্লবতা বলা হয়।

তবল বা বায়বীয় পদার্থের প্লবতার ফলেই উহাদের মধ্যে নিমজ্জিত অবস্থায় বস্তুর ওজনের হ্রাস ঘটে।

মনে করি, কোন বস্তুর আয়তন $=V$

উহার উপাদানেব ঘনত্ব$=\rho$ এবং স্থানীয় অভিকর্ষজ ত্বরণ$=g$

সুতরাং, বস্তুটির ওজন, $W=V\rho g$

বস্তুটি কোন তরলে বা গ্যাসীয় পদার্থে সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত থাকিলে উহা যে-পবিমাণ তরল বা গ্যাস অপসারিত কবিবে তাহার আয়তনও V। তবল বা গ্যাসীয় পদার্থের ঘনত্বকে ρ' ধরিলে

উহার প্লবতা$=$অপসাবিত তরল বা গ্যাসের ওজন$=V\rho' g$

$\therefore$ নিমজ্জিত বস্তুর আপাত ওজন$=$প্রকৃত ওজন $-$ তরল বা গ্যাসের প্লবতা

$$=W-V\rho' g=V(\rho-\rho')g$$

7.3 আর্কিমিডিসের সূত্রের সাহায্যে বস্তুর আয়তন ও ঘনত্ব নির্ণয় ঃ মনে কবি, শূন্যস্থানে কোন বস্তুব ওজন m_1 g-wt এবং জলে নিমজ্জিত করিলে উহার আপাত-ওজন m_2 g-wt।

অতএব, জলে নিমজ্জিত অবস্থায় বস্তুটির ওজনেব আপাত-হ্রাস

$$=(m_1-m_2)\text{ g-wt}$$

এখন, আর্কিমিডিসের সূত্রানুসাবে, বস্তু-কর্তৃক অপসারিত জলেব ওজন যদি ঘরের উষ্ণতায় জলেব ঘনত্ব ρ_t g/cm³ হয় তবে (m_1-m_2) g পবিমাণ জলের আয়তন (অর্থাৎ, বস্তু-কর্তৃক অপসারিত জলের আয়তন)$=\dfrac{m_1-m_2}{\rho_t}$ cm₃

$$\therefore \text{ বস্তুর ঘনত্ব}=\frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}}=\frac{m_1}{(m_1-m_2)/\rho_t}=\frac{m_1}{m_1-m_2}\times\rho_t \text{ g/cm}^3$$

জলের ঘনত্ব$=1$ g/cm³ ধবিলে পাই,

$$\text{বস্তুর ঘনত্ব}=\frac{m_1}{m_1-m_2}\text{ g/cm}^3$$

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 7.1 একটি বস্তুর বায়ুতে ওজন 200 g-wt এবং 1·26 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় ওজন 106·4 g-wt হইলে উহার আয়তন এবং আপেক্ষিক গুরুত্ব নির্ণয় কর।

[A body weighs 200 g-wt in air and 106·4 g-wt in a liquid of specific gravity 1·26. Determine the volume and specific gravity of the body.]

সমাধান ঃ বস্তুটির বায়ুতে ওজন$=200$ g-wt, তরলে নিমজ্জিত অবস্থায়

বস্তুর আপাত ওজন = 106·4 g-wt। কাজেই, বস্তুর সম-আয়তন তরলের ভর =(200 – 106·4)=93·6 g

তরলের আপেক্ষিক গুরুত্ব = 1·26

সুতরাং, বস্তুটির আয়তন $=\frac{93\cdot6}{1\cdot26}=74\cdot28$ cm³

কাজেই, বস্তুটির আপেক্ষিক গুরুত্ব $=\frac{\text{বস্তুর ভর}}{\text{সম-আয়তন জলের ভর}}$

$$=\frac{200}{74\cdot28}=2\ 69$$

উদাহরণ 7.2 275 g-wt ওজনবিশিষ্ট একটি লৌহখণ্ড উহার আয়তনের $\frac{5}{9}$ অংশ পারদে নিমজ্জিত রাখিয়া ভাসে। লৌহখণ্ডটির আয়তন এবং আপেক্ষিক গুরুত্ব নির্ণয় কর। (C. U. (I. Sc.), 1946)

[A piece of iron weighing 275 g wt floats in mercury with $\frac{5}{9}$th of its volume immersed. Find the volume and specific gravity of the piece of iron.]

সমাধান : মনে করি, লৌহখণ্ডটির আয়তন = V cm³

এবং লোহার আপেক্ষিক গুরুত্ব $=s$

লৌহখণ্ডটির ভর $= Vs = 275$ g

অপসারিত পারদের আয়তন $=\frac{5}{9}$ V cm³

কাজেই, অপসারিত পারদের ভর $=\frac{5}{9}\ V\times13\cdot6$ g

আর্কিমিডিসের সূত্রানুসারে, লৌহখণ্ডের ওজন = অপসারিত তরলের ওজন,

বা, $275=\frac{5}{9}\ V\times13\cdot6$

বা, $V=\frac{275\times9}{5\times13\cdot6}=36\cdot4$ cm³ (প্রায়)

এবং লৌহের আপেক্ষিক গুরুত্ব, $s=\frac{275}{V}=\frac{276}{36\cdot4}=7\cdot6$

উদাহরণ 7.3 বরফের আপেক্ষিক গুরুত্ব 0·9 এবং সমুদ্র-জলের আপেক্ষিক গুরুত্ব 1·125। কোন ভাসমান হিমশৈলের আয়তনের কত ভগ্নাংশ জলের উপরে থাকিবে ?

[The specific gravity of ice is 0·9 and that of seawater is 1·125. What fraction of the whole volume of a floating iceberg appears above the surface of water ?] (P. U. (I.Sc.) 1935)

সমাধান : মনে করি, হিমশৈলটির আয়তন = V cm³

ভাসমান হিমশৈলের আয়তনের f ভগ্নাংশ জলের উপরে থাকে ধরিয়া লইলে লেখা যায়,

অপসারিত জলের আয়তন $=(V-fV)$ cm³ $=(1-f)$ V cm³

হিমশৈলের মোট ওজন $=V\times0\ 9$ g-wt

আর্কিমিডিসের সূত্রানুসারে, হিমশৈলের ওজন=অপসারিত সমুদ্রজলের ওজন

$$\text{বা, } V\times 0\cdot 9=(1-f)\,V\times 1\cdot 125 \quad \text{বা, } (1-f)=\frac{0\cdot 9}{1\cdot 125}$$

$$\text{বা, } f=1-\frac{0\cdot 9}{1\cdot 125}=\frac{0\cdot 225}{1\cdot 125}=\frac{1}{5}$$

অর্থাৎ, হিমশৈলের আয়তনের এক-পঞ্চমাংশ জলের উপরে থাকে।

উদাহরণ 7.4 একটি ভাসমান কঠিন বস্তুর আয়তনের এক-ষষ্ঠাংশ জলের উপরে আছে। 1·2 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট তরলে ভাসমান অবস্থায় উহার আয়তনের কত ভগ্নাংশ তরল-পৃষ্ঠের উপরে থাকিবে ?

[A solid body floating in water has one-sixth of its volume above the surface. What fraction of its volume will project if it floats in a liquid of specific gravity 1·2 ?] (C. U. (I. Sc.) 1938)

সমাধান : মনে করি, কঠিন বস্তুটির আয়তন=$V\ cm^3$

কাজেই, জলে ভাসমান অবস্থায় উহার নিমজ্জিত অংশের আয়তন

$$=\tfrac{5}{6}\,V\ cm^3$$

∴ বস্তু-কর্তৃক অপসারিত জলের ওজন

$=\tfrac{5}{6}\,V$ g-wt=বস্তুর ওজন=অপসারিত তরলের ওজন

কাজেই, অপসারিত তরলের আয়তন$=\dfrac{5V}{6\times 1\cdot 2}\ cm^3=\dfrac{25}{36}V\ cm^3$

=তরলে ভাসমান অবস্থায় বস্তুটির নিমজ্জিত অংশের আয়তন

কাজেই, বস্তুর আয়তনের যে-অংশ তরল-পৃষ্ঠের উপরে থাকে তাহার মান

$=V-\tfrac{25}{36}V\ cm^3=\tfrac{11}{36}V\ cm^3=\tfrac{11}{36}\times$ বস্তুর আয়তন

উদাহরণ 7.5 দেখাও যে, R-ব্যাসার্ধের এবং S-ঘনত্ববিশিষ্ট একটি ভারী ধাতুর ফাঁপা গোলককে জলে ভাসিতে হইলে উহার দেওয়ালের বেধ R/3S অপেক্ষা কম হওয়া প্রয়োজন।

[Show that a hollow sphere of radius R made of a heavy metal of specific gravity S will float in water, if the thickness of its walls is less than R/3S.] (Nag. U. (I. Sc.) 1952)

সমাধান : মনে করি, ফাঁপা গোলকটির দেওয়ালের বেধ$=x$

গোলকটির উপাদানের আয়তন$=\tfrac{4}{3}\pi\,[R^3-(R-x)^3]$

সুতরাং, গোলকের ওজন$=\tfrac{4}{3}\pi[R^3-(R-x)^3]\,S$ g-wt ... (i)

গোলকের সমান আয়তন জলের ওজন$=\tfrac{4}{3}\pi R^3$ g-wt ... (ii)

জলে ভাসিতে হইলে সম-আয়তন জলের ওজন গোলকটির ওজন অপেক্ষা বেশি হওয়া প্রয়োজন। ইহারা সমান হইলে গোলকটি সম্পূর্ণ নিমজ্জিত অবস্থায় ভাসিবে।

∴ সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায় যে, গোলকটির জলে ভাসিবার শর্ত হইল

$$\tfrac{4}{3}\pi\,[R^3-(R-x)^3]\,S\leqslant\tfrac{4}{3}\pi R^3$$

বা, $S\,[R^3-(R-x)^3]\leqslant R^3$

বা, $\left[1-\left(1-\frac{x}{R}\right)\right]^3\leqslant\frac{1}{S}$ বা, $\left(1-\frac{x}{R}\right)^3\geqslant 1-\frac{1}{S}$

বা, $1-\frac{x}{R}\geqslant\left[1-\frac{1}{S}\right]^{\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3S}$

[দ্বিপদ বিস্তারের অন্যান্য পদ উপেক্ষা করিয়া]

বা, $\frac{x}{R}\leqslant\frac{1}{3S}$ বা, $x\leqslant\frac{R}{3S}$

উদাহরণ 7.6 সোনা ও তামার তৈয়ারী একটি সঙ্কর ধাতুখণ্ডের ওজন 100 g এবং ইহার ঘনত্ব 16 g cm³। সোনা এবং তামার ঘনত্ব যথাক্রমে 19·3 g/cm³ এবং 9 g/cm³ হইলে উক্ত সঙ্কর ধাতুখণ্ডে সোনার পরিমাণ কত ?

[An alloy made of gold and copper weighs 100 g and its density is 16 g/cm³. If the densities of gold and copper are 19·3 g/cm³ and 9 g/cm³ respectively, find the amount of gold in the alloy.]

সমাধান : মনে করি, সঙ্কর ধাতুখণ্ডটিতে সোনার পরিমাণ $=x$ g

কাজেই তামার পরিমাণ $=(100-x)$ g

তামা ও সোনার আয়তন $=\left(\frac{x}{19\cdot3}+\frac{100-x}{9}\right)$ cm³

সঙ্কর ধাতুখণ্ডটির ঘনত্ব 16 g/cm³ বলিয়া ধাতুখণ্ডটির ভর,

$$m=\left(\frac{x}{19\cdot3}+\frac{100-x}{9}\right)\times16$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\left(\frac{x}{19\cdot3}+\frac{100-x}{9}\right)\quad16=100$

বা, $x=81\cdot96$

কাজেই, সঙ্কর ধাতুখণ্ডটিতে সোনার পরিমাণ $=81\cdot97$ g

উদাহরণ 7.7 বায়ুতে 2·84 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট একখণ্ড মার্বেল পাথরের ওজন 71 g এবং একটি তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় ইহার ওজন 49·25 g। তরলটির আপেক্ষিক গুরুত্ব এবং মার্বেল পাথরটির আয়তন নির্ণয় কর।

[A piece of marble of specific gravity 2·84 weighs 71 g in air and 49·25 g in a liquid. Find the specific gravity of the liquid and the volume of the marble.]

সমাধান ঃ মার্বেলের ভর $=71$ g এবং আপেক্ষিক গুরুত্ব $=2\cdot84$

কাজেই, মার্বেলের আয়তন $=\frac{71}{2\cdot84}=25$ cm³

তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় মার্বেলের আপাত ওজন $=49\cdot25$ g

কাজেই, মার্বেলের সমান আয়তনের (অর্থাৎ, 25 cm³) তরলের ওজন $=(71-49\cdot25)=21\cdot75$ g

কাজেই, তরলের আপেক্ষিক গুরুত্ব

$$=\frac{\text{তরলের ভর}}{\text{সম আয়তন জলের ভর}}=\frac{21\cdot75}{25}=0\cdot87$$

উদাহরণ 7.8 1·5 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট একটি ইটের টুকরার ওজন 5 kg-wt হইলে অর্ধনিমজ্জিত অবস্থায় ইহার ওজন কত হইবে ?

[A piece of brick having specific gravity 1·5 weighs 5 kg-wt. How much will it weigh when it is half-immersed in water ?]

(H. S. (Comp.) 1963)

সমাধান : ইটের টুকরাটির আয়তন $=\frac{5000}{1\cdot5}$ cm^3

অর্ধনিমজ্জিত অবস্থায় ইটের টুকরাটি যে-পরিমাণ জল অপসারিত করে তাহার আয়তন $=\frac{1}{2}\times\frac{5000}{1\cdot5}=\frac{5000}{3}$cm^3

∴ অপসারিত জলের ওজন $=\frac{5000}{3}$ g $=\frac{5}{3}$ kg

সুতরাং জলে অর্ধনিমজ্জিত অবস্থায় ইটের টুকরাটির ওজন

=ইটের টুকরাটির প্রকৃত ওজন – অপসারিত জলের ওজন

$=(5-\frac{5}{3})=3\cdot33$ kg-wt

উদাহরণ 7.9 চৌদ্দ ক্যারেট সোনা হইল ওজনের হিসাবে 10 ভাগ তামা এবং 14 ভাগ সোনার মিশ্রণে উৎপন্ন সঙ্কর ধাতু। সোনা এবং তামার আপেক্ষিক গুরুত্ব যথাক্রমে 19·3 এবং 9 হইলে চৌদ্দ ক্যারেট সোনার 100 g-এর আয়তন নির্ণয় কর।

[Fourteen carat gold is an alloy of 10 parts by weight of copper and 14 parts by weight of pure gold. If the specific gravities of gold and copper are 19·3 and 9 respectively, find the volume of a 100 g piece of fourteen carat gold.]

সমাধান : চৌদ্দ ক্যারেট সোনার 100 গ্রামে বিশুদ্ধ সোনার পরিমাণ

$=100\times\frac{14}{10+14}=\frac{1400}{24}$ g

এবং বিশুদ্ধ তামার পরিমাণ $=100\times\frac{10}{10+14}=\frac{1000}{24}$ g

কাজেই, 100 গ্রাম চৌদ্দ ক্যারেট সোনার আয়তন

=বিশুদ্ধ সোনার আয়তন + তামার আয়তন

$$=\left(\frac{1400}{24\times19\cdot3}+\frac{1000}{24\times9}\right)\text{cm}^3$$

$=3\cdot022+4\cdot580=7\cdot602$ cm^3

উদাহরণ 7.10 একটি বোতলে 1·8 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট 360 g সালফিউরিক অ্যাসিড আছে। উহার সহিত 360 g জল মিশান হইল। যদি মিশ্রণের আপেক্ষিক গুরুত্ব 1·5 হয় তাহা হইলে মিশ্রণ প্রস্তুতির সময় আয়তনের কতটা সঙ্কোচন হইয়াছে ?

[A bottle contains 360 g of sulphuric acid of spceific gravity 1·8. If 360 g of water is added to it, what should be the contraction in volume so that the specific gravity of the mixture is 1·5]

সমাধান ঃ 360 g অ্যাসিডের আয়তন $=\frac{360}{1\cdot8}=200$ cm³

360 gm জলের আয়তন $=360$ cm³

∴ আলাদা আলাদাভাবে মিশ্রণের উপাদানদ্বয়ের মোট আয়তন
$=200+360=560$ cm³
মিশ্রণের ভর $=(360+360)=720$ g

∴ মিশ্রণের আয়তন $=\frac{720 \text{ g}}{\text{মিশ্রণের ঘনত্ব}}=\frac{720}{1\cdot5}$ cm³ $=480$ cm³

কাজেই, মিশ্রণ প্রস্তুতির সময় আয়তনের মোট সঙ্কোচন $=560-480=80$ cm³

উদাহরণ 7.11 s_1 এবং s_2 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট দুইটি তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় কোন বস্তুর আপাত ওজন যথাক্রমে W_1 এবং W_2 হইলে প্রমাণ কর যে, শূন্যস্থানে ইহার ওজন $(W_1s_2-W_2s_1)/(s_2-s_1)$।

[If W_1 and W_2 are the weights of the same body when immersed in fluids of specific gravities s_1 s_2, prove that its weight in vacuo is $(W_1s_2 - W_2s_1)/(s_2-s_1)$

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুটির আয়তন $=V$ cm³
এবং শূন্যস্থানে বস্তুটির ওজন $=W$

কাজেই, আর্কিমিডিসের সূত্রানুসারে, s_1 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় বস্তুটির ওজন

$W_1=W-($ V cm³ তরলের ওজন)

বা, $W_1=W-Vs_1g$ ... (i)

অনুরূপভাবে, $W_2=W-Vs_2g$ ... (ii)

(i) নং সমীকরণের দুইপার্শ্বকে s_2 দ্বারা এবং (ii) নং সমীকরণের দুইপার্শ্বকে s_1 দ্বারা গুণ করিয়া লেখা যায়,

$W_1s_2=Ws_2-Vs_1s_2g$ ... (iii)

এবং $W_2s_1=Ws_1-Vs_1s_2g$ ... (iv)

সমীকরণ (iii) এবং (iv) হইতে পাই,

$W_1s_2-W_2s_1=W(s_2-s_1)$

বা, $W=\frac{W_1s_2-W_2s_1}{s_2-s_1}$

উদাহরণ 7.12 d_1 ঘনত্ববিশিষ্ট প্রবাহীতে একটি বস্তুর ওজন m_1 g-wt এবং d_2 ঘনত্ববিশিষ্ট প্রবাহীতে ইহার ওজন m_2 g-wt। d_3 ঘনত্ববিশিষ্ট প্রবাহীতে ইহার ওজন কত হইবে ?

[A body weighs m_1 g-wt in a fluid of density d_1 and m_2 g-wt in a fluid of density d_2. What would be its weight in a fluid of density d_3 ?] (Jt. Entrance, 1980]

সমাধান : মনে করি, বস্তুটির প্রকৃত ভর $= M$

এবং ইহার আয়তন $= V$

কাজেই শর্তানুসারে, $M - V\, d_1 = m_1$ ... (i)

এবং $M - V\, d_2 = m_2$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $V = \dfrac{m_1 - m_2}{d_2 - d_1}$ ... (iii)

d_3 ঘনত্ববিশিষ্ট প্রবাহীতে বস্তুটির ওজন m_3 g-wt হইলে লেখা যায়,

$$m_3 = M - V\, d_3$$
$$= m_1 + V\, d_1 - V\, d_3 \quad [\text{(i) হইতে}]$$
$$= m_1 + V\,(d_1 - d_3)$$
$$= m_1 + \frac{(m_1 - m_2)(d_1 - d_3)}{(d_2 - d_1)}$$
$$= \frac{m_1(d_2 - d_3) - m_2(d_1 - d_3)}{(d_2 - d_1)} \text{ g-wt}$$

উদাহরণ 7.13 2·5 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট একটি বস্তুকে একটি লবণাক্ত হ্রদের জলের উপরিতলে আলতোভাবে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। হ্রদের গভীরতা 500 মিটার হইলে বস্তুটি কতক্ষণে হ্রদের তলদেশে পৌঁছিবে ? ধরিয়া লও যে, লবণাক্ত জলের আপেক্ষিক গুরুত্ব 1·02 এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = 981$ cm/s^2 ।

[A body of specific gravity 2·5 is gently dropped on the surface of a salty lake. If the depth of the lake is 500 metres, find the time required by the body to reach the bottom of the lake. Assume that the specific gravity of salt water is 1·02 and the acceleration due to gravity $= 981$ cm/s^2.]

সমাধান : মনে করি, বস্তুটির আয়তন $= V$ cm^3

লবণাক্ত জলে নিমজ্জিত অবস্থায় বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল প্লবতা, W′

$$= V \times 1{\cdot}02 \times g \quad (g = \text{অভিকর্ষজ ত্বরণ})$$

ইহা বস্তুর উপর ঊর্ধ্বাভিমুখে ক্রিয়া করে।

বস্তুটির ওজন, $W = V \times 2{\cdot}5 \times g$

ইহা নিম্নাভিমুখে ক্রিয়াশীল।

কাজেই, বস্তুর উপর নিম্নাভিমুখী অসম-বল, F

$$= W - W' = V \times 2{\cdot}5 \times g - V \times 1{\cdot}02 \times g = V \times 1{\cdot}48 \times g$$

বস্তুটির ত্বরণ, $f = \dfrac{\text{ক্রিয়াশীল অসম বল}}{\text{বস্তুর ভর}} = \dfrac{V \times 1{\cdot}48 \times g}{V \times 2{\cdot}5} = \dfrac{1{\cdot}48}{2{\cdot}5} \times g$

আমরা জানি, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$

এখানে $u=0$; কাজেই, $s=\frac{1}{2}ft^2$

$\therefore \ t=\sqrt{\frac{2s}{f}}$

$s=$ হ্রদের গভীরতা $=500\ m=50000\ cm$

সুতবাং, $t=\sqrt{\frac{2s}{f}}=\sqrt{\frac{2\times 50000\times 2\cdot 5}{1\cdot 48\times 981}}=13\cdot 12\ s$

উদাহরণ 7.14 শূন্যস্থানে এবং জলে নিমজ্জিত অবস্থায় কোন বস্তুব ওজন যথাক্রমে W g-wt এবং W′ g-wt হইলে দেখাও যে, δ ঘনত্ববিশিষ্ট বাযতে নিমজ্জিত অবস্থায় উহাব ওজন $W-(W-W')\delta$ g-wt।

[If W g-wt denotes the weight of a body in vacuo, and W′ g-wt its weight in water, prove that its weight in air of density δ will be $W-(W-W')\delta$ g wt.]

সমাধান : শূন্যস্থানে ও জলে নিমজ্জিত অবস্থায় আলোচ্য বস্তুব ওজন যথাক্রমে W g-wt এবং W′ g-wt

আর্কিমিডিসেব স্থত্রানুসাবে,

বস্তুব সম-আযতন জলেব ওজন $=(W-W)$ g-wt

কাজেই, বস্তুটিব আয়তন $=(W-W')$ cm³

সুতবাং, বস্তুব সম-আযতন বায়ুব ওজন $=(W-W')\ \delta$ g-wt

এখন, বস্তুটিব বাযতে ওজন $=$ শূন্যস্থানে বস্তুটিব ওজন $-$ বস্তুব সম-আযতন বায়ুব ওজন $=W-(W-W')\ \delta$ g-wt

উদাহরণ 7.15 বায়ুতে, জলে এবং কোহলে নিমজ্জিত অবস্থায কোন সীসা-খণ্ডেব ওজন যথাক্রমে 7·88 g-wt, 7·19 g wt এবং 7·33 g-wt বায়ুতে একটি কাঠেব ওজন 13·21 g-wt। উক্ত কাষ্ঠখণ্ড এবং সীসাখণ্ডটিব একত্রে জলে ওজন 4·87 g-wt। সীসা, কাঠ এবং কোহলেব আপেক্ষিক গুরুত্ব নির্ণয কব

[A piece of lead weighs 7·88 g wt in air, 7·19 g-wt in water and 7·33 g-wt in alcohol. A piece of wood weighs 13·21 g-wt in water, and the wood and lead together weigh 4·87 g-wt in water. Find the specific gravities of lead, wood and alcohol.]

সমাধান : সীসাখণ্ডেব সমান আয়তন জলেব ওজন

$=7\cdot 88-7\cdot 19=0\cdot 69$ g-wt

সুতবাং, সীসাখণ্ডের আযতন $=0\cdot 69\ cm^3$

সীসাখণ্ডের সমান আয়তন কোহলেব ওজন

$=7\cdot 88-7\cdot 23=0\cdot 55$ g-wt

$\therefore$ সীসাব ঘনত্ব $=\frac{\text{সীসার ভব}}{\text{সীসাব আয়তন}}=\frac{7\cdot 88}{0\cdot 69}=11\cdot 42\ g/cm^3$

এখন, কোহলের আপেক্ষিক গুরুত্ব$=\dfrac{\text{সীসার সম-আয়তন কোহলের ওজন}}{\text{সীসার সম-আয়তন জলের ওজন}}$

$$=\frac{0{\cdot}55}{0{\cdot}69}=0{\cdot}80$$

$\therefore$ কোহলের ঘনত্ব$=0{\cdot}80$ g/cm^3

কাষ্ঠখণ্ডটির ওজন$=13{\cdot}21$ g-wt

মনে করি, কাঠের ঘনত্ব$=\rho$ g/cm^3

সীসা ও কাঠের মোট ওজন$=(7{\cdot}88+13{\cdot}21)$ g-wt
$=21{\cdot}09$ g-wt

সীসা ও কাঠের মোট আয়তন$=\left(\dfrac{13{\cdot}21}{\rho}+0{\cdot}69\right)$ cm^3

কাজেই, জলে নিমজ্জিত অবস্থায় সীসা ও কাঠের একত্রে ওজন

=সীসা ও কাঠের মোট ওজন – সীসা ও কাঠের সম-আয়তন জলের ওজন

$=21{\cdot}09-\left(\dfrac{13{\cdot}21}{\rho}+0{\cdot}69\right)$ g-wt

$=4{\cdot}87$ g-wt [প্রশ্নের শর্তানুসারে]

$\therefore\ \dfrac{13{\cdot}21}{\rho}=21{\cdot}09-0{\cdot}69-4{\cdot}87$ বা, $\rho=\dfrac{13{\cdot}21}{15{\cdot}53}=0{\cdot}85$ g/cm^3

উদাহরণ 7.16 δ ঘনত্ববিশিষ্ট একটি বস্তুকে δ' ঘনত্ববিশিষ্ট একটি তরলের উপরিপৃষ্ঠে ছাড়িয়া দেওয়া হইল (δ'-এর মান δ অপেক্ষা কম)। তরলের গভীরতা d হইলে দেখাও যে, বস্তুটি যে-সময়ে তরলের তলদেশে পৌছিবে তাহার মান

$t=\sqrt{2d\,\delta/g\,(\delta-\delta')}$, $g=$অভিকর্ষজ ত্বরণ।

[A body of density δ is dropped gently on the surface of a layer of liquid of depth d and density δ' (δ' being less than δ). Show that it will reach the bottom of the liquid layer after a time, $t=\sqrt{2d\delta/g(\delta-\delta')}$.]

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুটির ভর$=m$

তাহা হইলে ইহার আয়তন$=\dfrac{m}{\delta}=$অপসারিত তরলের আয়তন, V

$\therefore$ অপসারিত তরলের ওজন$=$প্লবতা$=\mathrm{V}\ \delta' g=\dfrac{m}{\delta}.\delta' g$

কাজেই তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল নিম্নমুখী বল, F

=বস্তুর ওজন – প্লবতা

$$=mg-\frac{m}{\delta}.\delta' g=mg\left(1-\frac{\delta'}{\delta}\right)$$

সুতরাং, বস্তুটির ত্বরণ, $f=\frac{F}{m}=\left(1-\frac{\delta'}{\delta}\right)g=(\delta-\delta')\frac{g}{\delta}$

মনে করি, t সময় পর বস্তুটি d গভীরতায় পৌঁছে। বস্তুর প্রাথমিক বেগ শূন্য বলিয়া লেখা যায়, $d=\frac{1}{2}ft^2$

বা, $t=\sqrt{\frac{2d}{f}}=\sqrt{\frac{2d\delta}{g(\delta-\delta')}}$

উদাহরণ 7.17 দুইটি বস্তুকে কোন তুলাযন্ত্রের দুই বাহু হইতে জলে নিমজ্জিত অবস্থায় ঝুলাইয়া দিলে উহারা সাম্যে থাকে। একটি বস্তুর ভর 28 g এবং ঘনত্ব 5·6 g/cm³। অন্যটির ভর 36 g হইলে উহার উপাদানের ঘনত্ব কত হইবে ?

[Two bodies are in equilibrium when suspended in water from the two arms of a balance. The mass of one body is 28 g and its density is 5·6 g/cm³. The mass of the other is 36 g, what is its density ?]

সমাধান ঃ প্রথম বস্তুর আয়তন $=\frac{\text{প্রথম বস্তুর ভর}}{\text{প্রথম বস্তুর উপাদানের ঘনত্ব}}$

$=\frac{28}{5\cdot6}=5\ \text{cm}^3$

মনে করি, দ্বিতীয় বস্তুর ঘনত্ব $=d$ g/cm³

$\therefore$ দ্বিতীয় বস্তুটির আয়তন $=\frac{36}{d}\ \text{cm}^3$

জলে নিমজ্জিত অবস্থায় প্রথম বস্তুর আপাত ওজন

= বস্তুর ওজন − সম আয়তন জলের ওজন

$=(28-5)=23$ g-wt

অনুরূপভাবে, জলে নিমজ্জিত অবস্থায় দ্বিতীয় বস্তুটির আপাত ওজন

$=\left(36-\frac{36}{d}\right)$ g-wt

প্রশ্নের শর্তানুসারে, প্রথম বস্তুর আপাত ওজন = দ্বিতীয় বস্তুর আপাত ওজন

$23=36-\frac{36}{d}$ বা, $d=\frac{36}{13}=2\cdot77$ g/cm³

উদাহরণ 7.18 জলে নিমজ্জিত অবস্থায় ওজন করিলে m_1 এবং m_2 ভর-বিশিষ্ট দুইটি বস্তু সাম্য প্রতিষ্ঠা করে। একটির উপাদানের আপেক্ষিক গুরুত্ব s_1 হইলে অপরটির আপেক্ষিক গুরুত্ব কত হইবে ?

[Two masses m_1 and m_2 balance each other when weighed in water ; the specific gravity of one being s_1, what is that of the other ?]

সমাধান ঃ মনে করি, দ্বিতীয় বস্তুটির উপাদানের আপেক্ষিক গুরুত্ব $=s_2$

জলে নিমজ্জিত অবস্থায় প্রথম বস্তুর ওজন

$$= \left(m_1 - \frac{m_1}{s_1}\right) \text{ g-wt}$$

অনুরূপভাবে, জলে নিমজ্জিত অবস্থায় দ্বিতীয় বস্তুর ওজন

$$= \left(m_2 - \frac{m_2}{s_2}\right) \text{ g-wt}$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $m_1 - \frac{m_1}{s_1} = m_2 - \frac{m_2}{s_2}$ বা, $\frac{m_2}{s_2} = m_2 - m_1 + \frac{m_1}{s_1}$

বা, $s_2 = \dfrac{m_2}{(m_2 - m_1) + \dfrac{m_1}{s_1}} = \dfrac{m_2 s_1}{s_1(m_2 - m_1) + m_1}$

উদাহরণ 7.19 8 g/cm³ ঘনত্ববিশিষ্ট একটি ধাতুখণ্ডকে 0·25 g/cm³ ঘনত্ববিশিষ্ট কর্কের সহিত বাঁধিয়া 0·8 g/cm³ ঘনত্ববিশিষ্ট তরলে নিমজ্জিত করা হইল। যদি উহারা উক্ত তরলে সম্পূর্ণ নিমজ্জিত অবস্থায় ভাসে তবে উহাদের ভরের অনুপাত নির্ণয় কর।

[A piece of metal of density 8 g/cm³ is tied with a piece of cork of density 0·25 g/cm³ and dropped into a liquid of density 0·8 g/cm³. Find the ratio of the ma:s of them if they float just immersed.]

সমাধান ঃ মনে করি, ধাতুখণ্ডটির ভর $= m_1 g$

এবং কর্কের ভর $= m_2 g$

ধাতুখণ্ডের আয়তন $= \frac{m_1}{8}$ cm³ এবং কর্কের আয়তন $= \frac{m_2}{0{\cdot}25}$ cm³

সুতরাং, ধাতুখণ্ড ও কর্কের আয়তন $= \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{0{\cdot}25}\right)$ cm³

ধাতুখণ্ড ও কর্কের সম-আয়তন তরলের ওজন $= \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{0{\cdot}25}\right) \times 0{\cdot}8$ g-wt

প্রশ্নের শর্তানুসারে,

ধাতুখণ্ড ও কর্কের ওজন = ধাতুখণ্ড ও কর্কের সম-আয়তন তরলের ওজন

$$\left(m_1 + m_2\right) = \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{0{\cdot}25}\right) \times 0{\cdot}8$$

বা, $m_1 + m_2 = 0{\cdot}1\, m_1 + 3{\cdot}2\, m_2$ বা, $0{\cdot}9\, m_1 = 2{\cdot}2\, m_2$

বা, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{22}{9}$

উদাহরণ 7.20 তিনটি তরলের ঘনত্ব 1 : 2 : 3 অনুপাতে আছে। উক্ত তরল তিনটিকে (*a*) সম-আয়তনে মিশ্রিত করিলে, (*b*) সম-ওজনে মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের আপেক্ষিক গুরুত্ব কত হইবে ?

[The densities of three liquids are in the ratio of 1 : 2 : 3. What will be the specific gravity of the mixture if (a) the liquids are mixed in equal volumes and (b) in equal weights ?]

সমাধান ঃ মনে করি, প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় তরলের ঘনত্ব যথাক্রমে d, $2d$ এবং $3d$।

(a) ধরা যাক্, একটি তরলের V আয়তন মিশ্রিত করিয়া মিশ্রণ তৈয়ারী করা হইল।

প্রাপ্ত মিশ্রণের আয়তন $= V + V + V = 3V$

উক্ত মিশ্রণের ভর $= V \times d + V \times 2d + V \times 3d = 6Vd$

কাজেই, মিশ্রণের ঘনত্ব $= \dfrac{\text{মিশ্রণের ভর}}{\text{মিশ্রণের আয়তন}} = \dfrac{6Vd}{3V}$

$= 2d =$ দ্বিতীয় তরলের ঘনত্ব

(b) এইবার ধরা যাক্, প্রতিটি তরলের m ভর লইয়া মিশ্রণ তৈয়ারী করা হইল।

প্রাপ্ত মিশ্রণের ভর $= m + m + m = 3m$

মিশ্রণের আয়তন $= \dfrac{m}{d} + \dfrac{m}{2d} + \dfrac{m}{3d}$

$= \dfrac{6m + 3m + 2m}{6d} = \dfrac{11m}{6d}$

কাজেই, মিশ্রণের ঘনত্ব $= \dfrac{\text{মিশ্রণের ভর}}{\text{মিশ্রণের আয়তন}} = \dfrac{3m}{\dfrac{11m}{6d}}$

$= \frac{18}{11}d = \frac{18}{11} \times$ প্রথম তরলের ঘনত্ব

উদাহরণ 7.21 2000 cm^3 আয়তনের একটি ধাতব গোলকে 1720 cm^3 আয়তনের একটি ফাঁপা গহ্বর আছে। গোলকটিকে জলে সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত করিতে হইলে 2 g-wt নিম্নাভিমুখী বল প্রয়োগ করিতে হয়। ধাতুটির ঘনত্ব কত ?

[A metal globe of volume 2000 cm^3 has a hollow cavity of volume 1720 cm^3. A downward force of 2 g-wt is needed to immerse the globe fully in water. What is the density of the metal ?]

সমাধান ঃ প্রশ্নের শর্তানুসারে, গোলকটিতে বিদ্যমান ধাতুর আয়তন

$= (2000 - 1720) = 280$ cm^3

ধরি, ধাতুটির ঘনত্ব $= d$ g/cm^3

গোলক-কর্তৃক অপসারিত জলের আয়তন $= 2000$ cm^3

কাজেই, গোলক-কর্তৃক অপসারিত জলের ওজন $=$ জলের প্লবতা $= 2000$ g-wt

ধাতুর গোলকটির ওজন $=280\times d$ g-wt

প্রশ্নানুসারে, জলের প্লবতা − গোলকের ওজন $=2$ g-wt

বা, $2000-280\,d=2$ বা, $d=\frac{1998}{280}=7{\cdot}12$ g/cm^3

উদাহরণ 7.22 কোন বস্তুকে s_1, s_2 এবং s_3 আপেক্ষিক গুরুত্বসম্পন্ন তরলে নিমজ্জিত করিলে উহার আপাত ওজন হয় যথাক্রমে w_1, w_2 এবং w_3। দেখাও যে,

$$s_1(w_2-w_3)+s_2(w_3-w_1)+s_3(w_1-w_2)=0$$

[The apparent weight of a body when weighed in three liquids of specific gravities s_1, s_2, s_3 are w_1, w_2 and w_3 respectively, show that $s_1(w_2-w_3)+s_3(w_3-w_1)+s_3(w_1-w_2)=0$.]

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুটির ভর $=m$ এবং আয়তন $=V$

প্রশ্নের শর্তানুসারে লেখা যায়, $m-Vs_1=w_1$ ... (i)

$m-Vs_2=w_2$ ... (ii)

এবং $m-Vs_3=w_3$ ... (iii)

(i) এবং (ii) হইতে পাই,

$(w_1-w_2)=(m-Vs_1)-(m-Vs_2)=V(s_2-s_1)$ ... (iv)

অনুরূপভাবে, $(w_2-w_3)=(m-Vs_2)-(m-Vs_3)=V(s_3-s_2)$ (v)

এবং $(w_3-w_1)=(m-Vs_3)-(m-Vs_1)=V(s_1-s_3)$ ... (vi)

কাজেই, (iv) সমীকরণকে s_3 দ্বারা, (v) সমীকরণকে s_1 দ্বারা এবং (vi) সমীকরণকে s_2 দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$s_1(w_2-w_3)+s_2(w_3-w_2)+s_3(w_1-w_2)$$
$$=V[s_1(s_3-s_3)+s_2(s_1-s_3)+s_3(s_2-s_1)]=0$$

উদাহরণ 7.23 5 cm বাহুবিশিষ্ট কর্ক-নির্মিত একটি ঘনক উহার উপরি-পৃষ্ঠকে অনুভূমিক অবস্থায় জলের তল হইতে $1\frac{1}{2}$ cm উপরে রাখিয়া জলে ভাসে। যদি ঘনকটি অনুরূপভাবে $0{\cdot}8$ আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট তরলে ভাসে তাহা হইলে উহার উপরি-পৃষ্ঠ তরল তল হইতে কতটা উঁচুতে থাকিবে ?

[A cube of cork with sides of length 5 cm floats in water with its top-face horizontal and $1\frac{1}{2}$ cm above the surface of water. If it floats in a similar manner in a liquid of specific gravity $0{\cdot}8$, what will be the height of the top-face above the surface of the liquid ?]

সমাধান ঃ মনে করি, কর্কের আপেক্ষিক গুরুত্ব $=s$

জলে ভাসমান অবস্থায় ঘনক-কর্তৃক অপসারিত জলের ওজন

$$=(5-1{\cdot}5)\times(5+5)\times g$$

ঘনকের ওজন $=5\times5\times5\times s\times g$

আর্কিমিডিসের সূত্রানুসারে, ঘনকের ওজন = ঘনক-কর্তৃক অপসারিত জলের ওজন

বা, $5\times5\times5\times s\times g=3{\cdot}5\times5\times5\times g$ বা, $s=\frac{3{\cdot}5}{5}=0{\cdot}7$

এইবার মনে করি যে, 0·8 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট তরলে ভাসমান অবস্থায় ঘনকের উপরি-পৃষ্ঠ তরল-তল হইতে h cm উপরে থাকে। কাজেই লেখা যায়,

ঘনকের ওজন = অপসারিত তরলের ওজন

বা, $5\times5\times5\times0{\cdot}7\times g=(5-h)\times5\times5\times0{\cdot}8\times g$

বা, $(5-h)=\dfrac{5\times0{\cdot}7}{0{\cdot}8}$ বা, $h=5-\frac{35}{8}=\frac{5}{8}=0{\cdot}625$ cm

উদাহরণ 7.23 একটি বস্তুর বায়ুতে ওজন 160 g, X তরলে ওজন 145 g এবং Y তরলে ওজন 125 g ; তরলদ্বয়ের আপেক্ষিক গুরুত্ব নির্ণয় কর। X এবং Y তরলকে 3 : 2 আয়তনের অনুপাতে মিশাইয়া একটি মিশ্রণ তৈয়ারী করা হইলে ঐ মিশ্রণে বস্তুটির ওজন কত হইবে ?

[A body weighs 160 g in air, 145 g in a liquid X and 125 g in a liquid Y. Find the specific gravities of the two liquids. If a mixture is made of the liquids by mixing the volumes of X and Y in the ratio 3 : 2, what is the weight of the body in it ?]

সমাধান ঃ বায়ুতে বস্তুটির ওজন = 160 g-wt

X-তরলে বস্তুটির ওজন = 145 g-wt

এবং Y তরলে বস্তুটির ওজন = 125 g-wt

কাজেই, X-তরলে সম্পূর্ণ নিমজ্জিত অবস্থায় বস্তুটির ওজন-হ্রাস,

$= 160-145=15$ g-wt ... (i)

= বস্তুর সম-আয়তন X তরলের ওজন

অনুরূপভাবে, বস্তুর সম-আয়তন Y-তরলের ওজন = 160 − 125

= 35 g-wt . (ii)

মনে করি, X-তরলের ঘনত্ব = d_1

Y তরলের ঘনত্ব = d_2 এবং বস্তুটির আয়তন = V

কাজেই, (i) এবং (ii) হইতে পাই, $d_1V=15$ এবং $d_2V=35$

বা, $\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{15}{35}=\dfrac{3}{7}$

এইবার, মনে করি যে, X-তরলের $3V_1$ আয়তনের সহিত Y তরলের $2V_1$ আয়তন মিশ্রিত করা হইল। কাজেই, মিশ্রণের মোট আয়তন $=3V_1+2V_1=5V_1$

মিশ্রণের ভর $=3\,V_1\times d_1+2\,V_1\times d_2$

$=3\,V_1\times\frac{3}{7}\,d_2+2\,V_1\times d_2=(\frac{9}{7}+2)V_1d_2=\frac{23}{7}\,V_1d_2$

∴ মিশ্রণের ঘনত্ব, D $=\dfrac{\text{মিশ্রণের ভর}}{\text{মিশ্রণের আয়তন}}=\dfrac{\frac{23}{7}V_1d_2}{5V_1}$

বা, $D=\frac{23}{35}d_2$

(i) হইতে আমরা জানি যে, বস্তুর সম-আয়তন Y তরলের ওজন

$=Vd_2=35$ g-wt

বস্তুর সম-আয়তন মিশ্রণের ওজন $= V \times D = V \times \frac{23}{35} d_2$
$= \frac{23}{35} \times Vd_2 = \frac{23}{35} \times 35 = 23$ g-wt

কাজেই, উক্ত মিশ্রণে নিমজ্জিত অবস্থায় বস্তুটির ওজন $= (160 - 23) = 137$ g-wt

উদাহরণ 7.24 যখন দুইটি পদার্থকে সম-আয়তনে মিশ্রিত করা হয় তখন মিশ্রণের আপেক্ষিক গুরুত্ব 4 ; কিন্তু যখন উহাদিগকে সম-ওজনের মিশ্রিত করা হয় তখন মিশ্রণের আপেক্ষিক গুরুত্ব 3। পদার্থ দুইটির আপেক্ষিক গুরুত্ব নির্ণয় কর।

[When equal volumes of two substances are mixed together the specific gravity of the mixture is 4. But when equal weight of the substances are mixed together the specific gravity of the mixture so formed is 3. Find the specific gravities of the two substances]

সমাধান : মনে করি, পদার্থদ্বয়ের আপেক্ষিক গুরুত্ব যথাক্রমে s_1 এবং s_2

উভয় পদার্থের V আয়তন লইয়া মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের আয়তন হইবে $V + V = 2V$

মিশ্রণের ভর $=$ V আয়তন প্রথম পদার্থের ভর $+$ V আয়তন দ্বিতীয় পদার্থের ভর
$= Vs_1 + Vs_2 = V(s_1 + s_2)$

কাজেই, মিশ্রণের আপেক্ষিক গুরুত্ব $= \frac{V(s_1 + s_2)}{2V} = \frac{1}{2}(s_1 + s_2)$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\frac{1}{2}(s_1 + s_2) = 4$ বা, $s_1 + s_2 = 8$ ... (i)

উভয় পদার্থের m ভর লইয়া মিশ্রিত করিলে, মিশ্রণের ভর $= m + m = 2m$

মিশ্রণের আয়তন $= \frac{m}{s_1} + \frac{m}{s_2} = m\left(\frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2}\right)$

কাজেই, উক্ত মিশ্রণের আপেক্ষিক গুরুত্ব $= \frac{2m}{m\left(\frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2}\right)} = \frac{2 s_1 s_2}{s_1 + s_2}$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\frac{2 s_1 s_2}{s_1 + s_2} = 3$ ... (ii)

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $s_1 s_2 = 12$ ... (iii)

$(s_1 - s_2)^2 = (s_1 + s_2)^2 - 4s_1 s_2 = 8^2 - 4 \times 12 = 16$

বা, $s_1 - s_2 = 4$ ... (iv)

(i) এবং (iv) হইতে পাই, $s_1 = 6$ এবং $s_2 = 2$

উদাহরণ 7.25 40 g ভরের এক টুকরা চিনিকে 5·76 g ভরের মোম (আপেক্ষিক গুরুত্ব $= 0·96$) দ্বারা আবৃত করা হইল। যদি জলে নিমজ্জিত অবস্থায় আবৃত চিনির টুকরাটির ওজন 14·76 g হয়, তবে চিনির আপেক্ষিক গুরুত্ব কত ?

[A piece of sugar weighing 40 g is coated with 5·76 g of wax of specific gravity 0·96. If the coated piece weighs 14·76 g in water, find the specific gravity of sugar.]

সমাধান : মনে করি, চিনির আপেক্ষিক গুরুত্ব $=s$

$$\text{চিনির আয়তন} = \frac{\text{চিনির ভর}}{\text{চিনির ঘনত্ব}} = \frac{40}{s}\ \text{cm}^3$$

মোমের ভর $=5{\cdot}76$ g এবং ঘনত্ব $=0{\cdot}96$ g/cm^3

$$\text{কাজেই, মোমের আয়তন} = \frac{5{\cdot}76}{0{\cdot}96} = 6\ \text{cm}^3$$

মোম এবং চিনির ওজন $=40+5{\cdot}76=45{\cdot}76$ g-wt

জলে নিমজ্জিত অবস্থায় মোম ও চিনির ওজন $=14{\cdot}76$ g-wt

সুতরাং, চিনি ও মোমের সম-আয়তন জলের ওজন $=45{\cdot}76-14{\cdot}76$
$=31$ g-wt

$\therefore$ মোম ও চিনির মোট আয়তন $=31$ cm^3

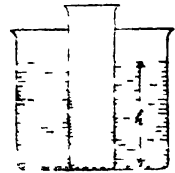
অর্থাৎ, $\frac{40}{s}+6=31$ বা $\frac{40}{s}=25$ বা, $s=\frac{40}{25}=1{\cdot}6$

উদাহরণ 7.26 10 cm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এবং 15 cm উচ্চতাবিশিষ্ট একটি পাতলা চোঙে 200 cm^3 জল আছে। শূন্য চোঙটির ওজন 114 g-wt। জলসহ চোঙটিকে একটি বড় পাত্রে স্থাপন করা হইল। এইবার পাত্রটিতে ধীরে ধীরে জল ঢালা হইল। চোঙটি ভাসিয়া উঠিবার পূর্ব পর্যন্ত পাত্রটিতে সর্বোচ্চ কত উচ্চতা অবধি জল ঢালা যাইবে?

[A thin cylindrical vessel of diameter 10 cm and height 15 cm contains 200 cm^3 of water. The weight of the vessel alone is 114 g-wt. The cylindrical vessel with its contents are placed in a large trough. Water is now poured gradually into the trough. What is the maximum height to which water can be poured in the trough before the vessel begins to rise?] (I. I. T. Adm. Test, 1970)

সমাধান : পাত্রে জল ঢালিতে থাকিলে জলের প্লবতার ফলে চোঙের উপর একটি ঊর্ধ্বমুখী বল ক্রিয়া করিবে। যখন প্লবতার মান জলসহ চোঙটির ওজনের সমান হয়, তখন চোঙটির ভাসিবার উপক্রম হইবে।

মনে করি, এই অবস্থায় পাত্রের জলস্তম্ভের উচ্চতা
$=h$ cm (চিত্র 7.1)

চোঙের তলদেশে পাত্রের জল-কর্তৃক প্রযুক্ত ঊর্ধ্বমুখী বল, $W'=\pi r^2 hdg$

চিত্র 7.1

$r=$ চোঙের ব্যাসার্ধ $=5$ cm ; $d=$ জলের ঘনত্ব $=1$ g/cm^3 ; $g=$ অভিকর্ষজ ত্বরণ

$$\therefore\ W'=\pi\times5^2\times h\times1\times g\ \text{dyn}$$

জলসহ চোঙের ওজন, $W=(114+200)=314$ g-wt

$\therefore$ শর্তানুসারে, $W'=W$

বা, $\pi\times5^2\times h\times1\times g=314\times g$ বা, $h=4$ cm

উদাহরণ 7.27 রাজা হিরোর মুকুটের ওজন ছিল 20 পাউণ্ড। জলে ডুবাইবার ফলে ইহার ওজন 1·25 lb হ্রাস পাইয়াছিল। মুকুটটি সোনা ও রূপার দ্বারা তৈয়ারী ছিল। যদি সোনার ঘনত্ব 19·3 g/cm^3 এবং রূপার ঘনত্ব 10·5 g/cm^3 হয় তাহা হইলে ঐ মুকুটের সোনা ও রূপার পরিমাণ কত ছিল নির্ণয় কর।

[The crown of king Hiero weighed 20 lb. It lost 1·25 lb when immersed in water. The crown was made of gold and silver. If the densities of gold and silver are 19·3 g/cm^3 and 10·5 g/cm^3 respectively, find the amount of silver and gold in the crown.]

সমাধান ঃ সোনার ঘনত্ব $= 19{\cdot}3\ g/cm^3 = 19{\cdot}3 \times 62{\cdot}5\ lb/ft^3$

রূপার ঘনত্ব $= 10{\cdot}5\ g/cm^3 = 10{\cdot}5 \times 62{\cdot}5\ lb/ft^3$

হিরোর মুকুটের ভর $= 20$ lb

মনে করি, উহাতে x lb রূপা এবং $(20-x)$ lb সোনা আছে।

রূপায় আয়তন $= \dfrac{x}{10{\cdot}3 \times 62{\cdot}5}\ ft^3$

এবং সোনার আয়তন $= \dfrac{20-x}{19{\cdot}3 \times 62{\cdot}5}\ ft^3$

$\therefore$ মুকুটের মোট আয়তন $= \dfrac{x}{10{\cdot}3 \times 62{\cdot}3} + \dfrac{20-x}{19{\cdot}5 \times 62{\cdot}5}\ ft^3$ (i)

আর্কিমিডিসের সূত্রানুসারে, জলে নিমজ্জিত অবস্থায় মুকুটের ওজনের আপাত হ্রাস = সম-আয়তন জলের ওজন = 1·25 lb-wt

সুতরাং, মুকুটের আয়তন $= \dfrac{1{\cdot}25}{62{\cdot}5}\ ft^3$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে

$\dfrac{x}{10{\cdot}5} + \dfrac{20-x}{19{\cdot}3} = 1{\cdot}25$ বা, $x = 4{\cdot}922$

সুতরাং, মুকুটের রূপার পরিমাণ $= 4{\cdot}922$ lb

সোনার পরিমাণ $= (20 - 4{\cdot}922) = 15{\cdot}078$ lb

উদাহরণ 7.28 ইস্পাত-নির্মিত একটি ঘনকাকার ব্লক উহার পার্শ্ববর্তী বাহু-গুলিকে উল্লম্ব অবস্থায় রাখিয়া পারদে ভাসিতেছে। ঘনকের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 cm হইলে (i) ব্লকের কতটা দৈর্ঘ্য পারদতলের উপরে থাকিবে? (ii) পারদের উপর জল ঢালিলে যে-অবস্থায় জল ঠিক ব্লকটির উপরের পৃষ্ঠকে আচ্ছাদিত করিবে **সেই সময় জলস্তম্ভের উচ্চতা কত? ইস্পাত ও পারদের ঘনত্ব যথাক্রমে** 7·8 g/cm^3 **এবং** 13·6 g/cm^3 **ধরিয়া লও।**

[A cubical block of steel floats on mercury with its sides vertical. Assuming the side of the cube to be 10 cm, (i) what length of block is above the mercury surface? (ii) If water

is poured on the mercury surface, what will be the height of the water column when the water surface just covers the top of the steel block ? The densities of steel and mercury are 7·8 g/cm³ and 13·6 g/cm³ respectively.] (I. I. T. Adm. Test., 1971)

সমাধান : (i) মনে করি, ঘনকাকার ব্লকের x cm পারদের তলায় আছে (চিত্র 7.2 (a))। কাজেই, অপসারিত পারদের ওজন $=10^2 \times x \times 13{\cdot}6 \times g$ dyn

ইস্পাতের ঘনকটির ওজন

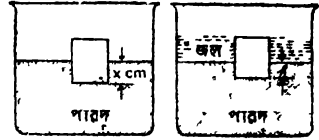
$$=10^3 \times 7{\cdot}8 \times g \text{ dyn}$$

আর্কিমিডিসের সূত্রানুসারে লেখা যায়,

অপসারিত পারদের ওজন

= ইস্পাতের ঘনকের ওজন

$$\therefore \quad 10^2 \times x \times 13{\cdot}6 \times g = 10^3 \times 7{\cdot}8 \times g$$

বা, $x = \frac{78}{13{\cdot}6} = 5{\cdot}74$ cm

(a) (b)

চিত্র 7.2

(ii) মনে করি, ঘনকটির h cm জলে এবং বাকি $(10-h)$ cm পারদের তলায় আছে (চিত্র 7.2 (b))।

এই অবস্থায় অপসারিত পারদের ওজন $= 10^2 \times (10-h) \times 13{\cdot}6 \times g$ dyn

অপসারিত জলের ওজন $= 10^2 \times h \times 1 \times g$ dyn

ব্লকটি সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া লেখা যায়,

অপসারিত পারদ ও জলের ওজন = ইস্পাতের ঘনকটির ওজন

$$\therefore \quad 10^2 \times (10-h) \times 13{\cdot}6 \times g + 10^2 \times h \times g = 10^3 \times 7{\cdot}8 \times g$$

বা, $(10-h) \times 13{\cdot}6 + h = 78$

বা, $h = \frac{58}{12{\cdot}6} = 4{\cdot}6$ cm

উদাহরণ 7.29 8 g/cm³ ঘনত্বविশিষ্ট একটি ধাতব গোলক সম্পূর্ণ নিমজ্জিত অবস্থায় জলে ভাসে। গোলকটির বহির্ব্যাস 2 ft হইলে ইহার আভ্যন্তরীণ ব্যাস এবং ভর নির্ণয় কর।

[A hollow sphere made of a metal having density 8 g/cm³ just floats completely submerged in water. If the outer diameter of the sphere is 2 ft, find the inner diameter and the mass of the sphere.]

সমাধান : মনে করি, গোলকটির আভ্যন্তরীণ ব্যাস $= d$ ft

গোলকটির বহিরায়তন $= \frac{4}{3}\pi$ ft³

এবং মধ্যবর্তী ফাঁপা অংশের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi \frac{d^3}{8}$ ft³

কাজেই, গোলকটিতে বিদ্যমান ধাতুর আয়তন $= \frac{4}{3}\pi\left(1 - \frac{d^3}{8}\right)$ ft^3

গোলকটির উপাদানের ঘনত্ব $= 8 \times 62·5$ lb/ft^3

কাজেই, গোলকটির ভর $= \frac{4}{3}\pi\left(1 - \frac{d^3}{8}\right) \times 8 \times 62·5$ lb

গোলক-কর্তৃক অপসারিত জলের ভর $= \frac{4}{3}\pi \times 62·5$ lb

প্রশ্নের শর্তানুসারে, গোলকটির ভর এবং ইহার দ্বারা অপসারিত জলের ভর পরস্পর সমান। অর্থাৎ, $\frac{4}{3}\pi\left(1 - \frac{d^3}{8}\right) \times 8 \times 62·5 = \frac{4}{3}\pi \times 62·5$

বা, $\left(1 - \frac{d^3}{8}\right) \times 8 = 1$ বা, $d^3 = 7$

ফাঁপা গোলকের আভ্যন্তরীণ ব্যাস $= \sqrt[3]{7} = 1·91$ ft

গোলকের ভর $= \frac{4}{3}\pi \times 62·5 = 147·2$ lb

উদাহরণ 7.30 একটি মালবাহী জাহাজ সমুদ্র হইতে নদীতে আসিয়া অতিরিক্ত α cm ডুবিয়া যায়। নদীতে অবস্থান কালে মাল খালাস করার ফলে জাহাজটি β cm উঠিয়া গেল। পুনরায় সমুদ্রে গেলে উহা γ cm ভাসিয়া উঠিল। জাহাজের পার্শ্বতলগুলি উল্লম্ব হইলে দেখাও যে, সমুদ্রজলের আপেক্ষিক গুরুত্ব হইল—

$$\frac{\beta}{\gamma - \alpha + \beta}$$

[A ship with her cargo sinks α cm when she goes into a river from sea. She discharges her cargo while still on the river and rises β cm and proceeding again to the sea, rises by γ cm. If the sides of the ship be assumed to be vertical to the surface of water. show that the specific gravity of sea water is $\frac{\beta}{\gamma - \alpha + \beta}$.]

সমাধান : ধরা যাক, মালশূন্য অবস্থায় জাহাজের ওজন $= W$ এবং মালের ওজন $= W'$

জাহাজের তলদেশের ক্ষেত্রফল $= A$

সমুদ্রজলের অপেক্ষিক গুরুত্ব $= s$

মালসহ জাহাজটি যখন সমুদ্রে ছিল তখন যদি উহার h cm ডুবিয়া থাকে তাহা হইলে আর্কিমিডিসের সূত্রানুসারে লেখা যায়,

$W + W' = A \times h \times s \times g$ (g = অভিকর্ষজ ত্বরণ) ... (i)

সমুদ্র হইতে নদীতে আসিলে অতিরিক্ত α cm ডুবিয়া যায়। অর্থাৎ, এক্ষেত্রে অপসারিত জলের আয়তন $= A \times (h + \alpha)$

কাজেই, অপসারিত নদীর জলের ওজন $= A \times (h + \alpha) \times 1 \times g$

(নদীর জলের আপেক্ষিক গুরুত্ব = 1 ধরিয়া)

$\therefore W + W' = A \times (h + \alpha) \times g$ ... (ii)

মাল খালাস হইবার পর জাহাজের ওজন$=W$

শর্তানুসারে, এই সময় জাহাজটি β cm উপরে উঠে।

কাজেই, এই সময় জাহাজের নিমজ্জিত অংশের উচ্চতা$=(h+\alpha-\beta)$ cm

আর্কিমিডিসের সূত্রানুসারে, $W=A(h+\alpha-\beta)\times 1\times g$ ... (iii)

মাল খালাস করিবার পর সমুদ্রে ফিরিয়া গেলে জাহাজটি আরও γ cm উঠিয়া যায়। এই সময় জাহাজটির নিমজ্জিত অংশের উচ্চতা $=(h+\alpha-\beta-\gamma)$

আর্কিমিডিসের সূত্রানুসারে, $W=A\ (h+\alpha-\beta-\gamma)\times s\times g$ ... (iv)

(i) ও (ii) হইতে লেখা যায়, $A\ h\ s=A(h+\alpha)\times 1$

$$h\ s=h+\alpha \quad \text{... (v)}$$

(iii) ও (iv) হইতে পাই, $A\ (h+\alpha+\beta)=A\ (h+\alpha-\beta-\gamma)\ s$

বা, $h+\alpha-\beta=hs-(\gamma-\alpha+\beta)$ বা, $\beta=(\gamma-\alpha+\beta)s$

$$\text{বা,}\quad s=\frac{\beta}{\gamma-\alpha+\beta}$$

উদাহরণ 7.31 সমতল তলদেশবিশিষ্ট একটি পাতলা কাচের নলের ব্যাস 4 cm এবং ওজন 30 g-wt। শূন্য নলের ভারকেন্দ্রটি তলদেশ হইতে 10 cm উপরে অবস্থিত। নলটিতে কতটুকু জল ভরিলে নলটি যখন একটি জলাশয়ে খাড়াভাবে ভাসিবে সেই অবস্থায় নল ও উহার মধ্যস্থ জলের ভারকেন্দ্রটি নলের নিমজ্জিত অংশের মধ্যবিন্দুতে থাকিবে ?

[A flat-bottomed thin-walled glass tube has a diameter of 4 cm and it weighs 30 g-wt. The centre of gravity of the empty tube is 10 cm above the bottom. Find the amount of water which must be poured in the tube so that when it is floating vertically in a tank of water, the centre of gravity of the tube and it contents is at the midpoint of the immersed length of the tube.]

(I. I. T. Adm. Test, 1968)

সমাধান : মনে করি, নলের মধ্যবর্তী জলের উচ্চতা$=x$ cm

নলের নিমজ্জিত অংশের উচ্চতা$=y$ cm (চিত্র 7.3)

সুতরাং, নলে অবস্থিত জলের ওজন$=\pi r^2 x\ dg$

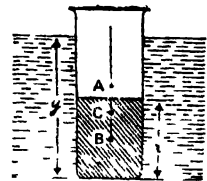
$=\pi\times 2^2\ x\ g=4\pi\ x\ g$ dyn$=4\pi x$ g-wt

নল-কর্তৃক অপসারিত জলের ওজন$=\pi r^2 y\ dg$

$=4\pi\ y\ g$ dyn$=4\pi y$ g-wt

ভাসনের সূত্রানুসারে, নলের মধ্যবর্তী জলের ওজন+ শূন্য নলের ওজন=অপসারিত জলের ওজন

বা, $4\pi x+30=4\pi y$

বা, $y-x=\dfrac{15}{2\pi}$ cm ... (i)

চিত্র 7.3

মনে করি, শূন্য নলের ভারকেন্দ্রটি A-বিন্দুতে, নলের মধ্যবর্তী জলের ভার-

কেন্দ্রটি B-বিন্দুতে অবস্থিত ও উহার মধ্যবর্তী জলের ভারকেন্দ্রটি C-বিন্দুতে অবস্থিত (চিত্র 7.3)।

প্রশ্নের শর্তানুসারে, নলের তলদেশ হইতে A বিন্দুর উচ্চতা $= 10$ cm

নলের তলদেশ হইতে C বিন্দুর উচ্চতা $= \frac{y}{2}$ cm

এবং নলের তলদেশ হইতে B বিন্দুর উচ্চতা $= \frac{x}{2}$ cm

কাজেই, $AC = \left(10 - \frac{y}{2}\right)$ cm এবং $BC = \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2}\right)$ cm

এখন, শূন্য নলের ওজন $\times AC =$ নলের মধ্যবর্তী জলের ওজন $\times BC$

বা, $30 \times \left(10 - \frac{y}{2}\right) = 4\pi x\left(\frac{y}{2} - \frac{x}{2}\right)$

বা, $30\left(10 - \frac{y}{2}\right) = 2\pi x(y - x)$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $30\left(10 - \frac{y}{2}\right) = 2\pi x . \frac{15}{2\pi} = 15x$

বা, $300 - 15y = 15x$ বা, $x + y = 20$ (iii)

(i) এবং (iii) হইতে, $2x = 20 - \frac{15}{2\pi}$ বা, $x = 10 - \frac{15}{4\pi} = 8{\cdot}81$ cm (প্রায়)

কাজেই, নলের মধ্যবর্তী জলের পরিমাণ $= 4\pi x$ g
$= 4\pi \times 8{\cdot}81 = 110{\cdot}6$ g (প্রায়)

উদাহরণ 7.32 একটি ঘনক উহার আয়তনের এক-চতুর্থাংশ নিমজ্জিত রাখিয়া পারদে ভাসে। পারদের উপরে যথেষ্ট পরিমাণ জল ঢালিয়া ঘনকটিকে যদি সম্পূর্ণভাবে জল দ্বারা আবৃত করা হয় তাহা হইলে ঘনকটির আয়তনের কত অংশ জলে নিমজ্জিত থাকিবে ? পারদের ঘনত্ব $= 13{\cdot}6$ g/cm^3 ।

[A cube floating in the surface of mercury has one quarter of its bulk immersed in mercury. What portion of the cube will be immersed in mercury if sufficient water to cover the cube is added ?]

সমাধান : মনে করি, ঘনকের উপাদানের ঘনত্ব $= \rho$ g/cm^3

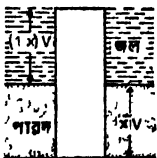
চিত্র 7.4

এবং ঘনকটির আয়তন $= V$ cm^3

পারদের ঘনত্ব $= 13{\cdot}6$ g/cm^3

ঘনকটি উহার আয়তনের এক-চতুর্থাংশ নিমজ্জিত রাখিয়া পারদে ভাসে (চিত্র 7.4)।

কাজেই, আর্কিমিডিসের সূত্র হইতে লেখা যায়,

$$13{\cdot}6 \times \frac{V}{4} \times g = \rho \times V \times g$$

বা, $\rho = \frac{13 \cdot 6}{4} = 3 \cdot 4 \text{ g/cm}^3$

যখন পারদের উপরে জল ঢালা হইল তখন ঘনকের আয়তনের একাংশ পারদে এবং বাকি অংশ জলে থাকিবে। এই অবস্থায় ঘনক-কর্তৃক অপসারিত জল ও পারদের ওজন বস্তুটির ওজনের সমান হইবে।

ধরি, ঘনকের আয়তনের f ভগ্নাংশ পারদে এবং বাকি $(1-f)$ ভগ্নাংশ জলে নিমজ্জিত অবস্থায় আছে (চিত্র 7.4)। এখন,

ঘনকের ওজন $= f$ V cm^3 পারদের ওজন $+ (1-f)$ V cm^3 জলের ওজন

$\therefore \quad V \times 3 \cdot 4 \times g = f \times V \times 13 \cdot 6 \times g + (1-f) V \times 1 \times g$

[$\because$ জলের ঘনত্ব $= 1$ g/cm^3]

$\therefore \quad 3 \cdot 4 = f \times 13 \cdot 6 + (1-f)$

বা, $f \times 12 \cdot 6 = 2 \cdot 4$ বা, $f = \frac{2 \cdot 4}{12 \cdot 6} = 0 \cdot 19$

কাজেই, এই অবস্থায় ঘনকের আয়তনের 0·19 অংশ পারদে নিমজ্জিত থাকে।

উদাহরণ 7.33 ρ ঘনত্ববিশিষ্ট রবারের তৈয়ারী একটি গোলককে কোন তরলের h গভীরতায় নিমজ্জিত করিয়া ছাড়িয়া দেওয়া হইল। তরলের ঘনত্ব σ হইলে $(\rho < \sigma)$ নিমজ্জিত রবারের গোলকটি তরলপৃষ্ঠ হইতে কতটা উচ্চতা পর্যন্ত লাফাইয়া উঠিবে ? বায়ু এবং জলের বাধা উপেক্ষা কর।

[A sphere made of rubber of density ρ is immersed to a depth of h in water and then released. If the density of liquid is $\sigma (\rho < \sigma)$, to what height above the surface of water will the sphere jump up? Ignore the resistance due to air and water.]

সমাধান : রবারের গোলকটির আয়তন V হইলে তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় ইহার উপর ক্রিয়াশীল ঊর্ধ্বমুখী বল, $F = (V\sigma - V\rho) g$

এখানে, g হইল অভিকর্ষজ ত্বরণ।

কাজেই নিমজ্জিত গোলকটির উপর ক্রিয়াশীল ঊর্ধ্বমুখী ত্বরণ

$$f = \frac{F}{m} = \frac{(V\sigma - V\rho)g}{V\rho} \quad \text{বা, } f = \left(\frac{\sigma - \rho}{\rho}\right) \cdot g$$

গোলকটি এই ত্বরণে তরলের h গভীরতা হইতে তরলপৃষ্ঠ পর্যন্ত উঠে।

কাজেই, তরলপৃষ্ঠে পৌঁছিয়া গোলকটির ঊর্ধ্বমুখী বেগ u হইলে লেখা যায়,

$$u^2 = 2fh = 2\left(\frac{\sigma - \rho}{\rho}\right) \cdot gh \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

মনে করি, গোলকটি তরলপৃষ্ঠ হইতে x উচ্চতা পর্যন্ত লাফাইয়া উঠে। তাহা হইলে লেখা যায়, $u^2 = 2gx$ $\quad \cdots \quad$ (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$2gx = 2\left(\frac{\sigma - \rho}{\rho}\right) gh \quad \text{বা,} \quad x = \left(\frac{\sigma - \rho}{\rho}\right) \cdot h$$

উদাহরণ 7.34 তুলাযন্ত্রে একটি বস্তু m ভরের পিতলের বাটখারা দ্বারা প্রতিমিত হইল (চিত্র 7.5)। বস্তুর উপাদানের, পিতলের এবং বায়ুর ঘনত্ব যথাক্রমে σ, d এবং ρ হইলে, প্রমাণ কর যে, বস্তুটির প্রকৃত ভর,

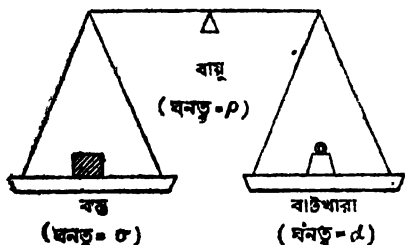
$$M=m\left(1-\frac{\rho}{d}\right)\left(1+\frac{\rho}{\sigma}\right)।$$

[A body is counterpoised in a balance by brass weights of mass m (Fig 7.5). If the densities of the material of the body, brass and air be σ, d and ρ respectively, prove that the true mass of the body is given by $M=m\left(1-\frac{\rho}{d}\right)\left(1+\frac{\rho}{\sigma}\right)$.]

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুটির প্রকৃত ভর=M

বস্তুটির উপাদানের ঘনত্ব σ বলিয়া ইহার আয়তন$=\frac{M}{\sigma}$

যে-বাটখারার সাহায্যে বস্তুটি তুলাযন্ত্রে প্রতিমিত হইয়াছে উহার ভর m ; কাজেই, ব্যবহৃত পিতলের বাটখারার আয়তন $\frac{m}{d}$, $d=$ পিতলের ঘনত্ব

বস্তু-কর্তৃক অপসারিত বায়ুর ভর$=\frac{M}{\sigma}\times\rho$, $\rho=$বায়ুর ঘনত্ব।

চিত্র 7.5

এবং, বাটখারা-কর্তৃক অপসারিত বায়ুর ভর$=\frac{m}{d}\times\rho$

বায়ুতে নিমজ্জিত অবস্থায় বস্তুর আপাত ওজন

=[বস্তুর প্রকৃত ওজন – বস্তু কর্তৃক অপসারিত বায়ুর ওজন]

অনুরূপভাবে, বায়ুতে নিমজ্জিত অবস্থায় বাটখারার ওজন

=[বাটখারার প্রকৃত ওজন – বাটখারা-কর্তৃক অপসারিত বায়ুর ওজন]

সাম্যাবস্থায়, বস্তুটির এবং বাটখারার আপাত ওজন সমান বলিয়া লেখা যায় যে, বস্তুর প্রকৃত ওজন -- বস্তু-কর্তৃক অসারিত বায়ুর ওজন=বাটখারার প্রকৃত ওজন —বাটখারা-কর্তৃক অপসারিত বায়ুর ওজন

বা, $\left(M-\frac{M}{\sigma}\times\rho\right)g=\left(m-\frac{m}{d}\times\rho\right)g$ এখানে, $g=$অভিকর্ষজ ত্বরণ

সুতরাং, $M\left(1-\frac{\rho}{\sigma}\right)=m\left(1-\frac{\rho}{d}\right)$ বা, $M=m\left(1-\frac{\rho}{d}\right)\Big/\left(1-\frac{\rho}{\sigma}\right)$

বা, $M = m\left(1-\frac{\rho}{d}\right)\left(1-\frac{\rho}{\sigma}\right)^{-1}$

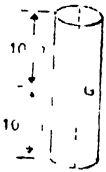
$\left(1-\frac{\rho}{\sigma}\right)^{-1}$-এর দ্বিপদ বিস্তার করিয়া এবং $\frac{\rho}{\sigma}$-এর বর্গ ও উচ্চতর ঘাতবিশিষ্ট পদ উপেক্ষা করিয়া পাই,

$$M = m\left(1-\frac{\rho}{d}\right)\left(1+\frac{\rho}{\sigma}\right)$$

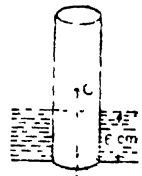
উদাহরণ 7.35 2 cm ব্যাসবিশিষ্ট এবং 20 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট তিনটি সুষম নিরেট চোঙ A, B এবং C-কে একটি তরলে-ভাসিতে দেওয়া হইল। চোঙগুলির উপাদানের ঘনত্ব যথাক্রমে ঐ তরলের ঘনত্বের 0·3, 0·5 এবং 0·7 গুণ। চোঙগুলি কীরূপভাবে ঐ তরলে ভাসিবে তাহা চিত্রের সাহায্যে বুঝাইয়া বল। সংক্ষিপ্ত ব্যাখ্যা-সহ উত্তর দাও।

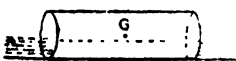
[Three homogeneous and uniform solid cylinders A, B and C each having a diameter of 2 cm and a length of 20 cm have densities 0·3, 0·5 and 0·7 times respectively of a liquid in which the cylinders are released to float. Draw neat sketches showing how the three cylinders will float. Give brief explanations.]

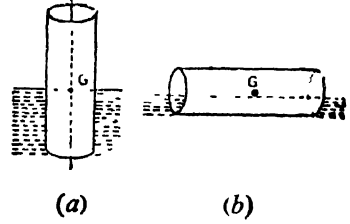
(Jt. Entrance, 1976)

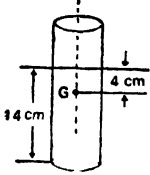
সমাধান : চোঙগুলির দৈর্ঘ্য 20 cm এবং ব্যাস 2 cm। কাজেই, উহাদের ভারকেন্দ্র G চোঙের উভয় প্রান্ত হইতে 10 cm দূরে অবস্থিত (চিত্র 7.6)।

চিত্র 7.6

যে-অবস্থায় ভাসিলে চোঙের ভারকেন্দ্র সর্বাপেক্ষা নীচে থাকিবে, চোঙটি সেই অবস্থায়ই ভাসিবে।

যে-চোঙের উপাদানের ঘনত্ব তরলের ঘনত্বের 0·3 গুণ সেই চোঙটি উহার আয়তনের 0·3 অংশ জলে নিমজ্জিত রাখিয়া ভাসিবে। যদি চোঙটি উহার অক্ষকে উল্লম্ব রাখিয়া তরলে ভাসে তাহা হইলে উহার দৈর্ঘ্যের $20 \times 0{\cdot}3 = 6$ cm তরলে নিমজ্জিত থাকিবে। সুতরাং, উহার ভারকেন্দ্র তরল পৃষ্ঠ হইতে (10 – 6) বা 4 cm উপরে থাকিবে (চিত্র 7.7)।

চিত্র 7.7

কিন্তু চোঙটি যদি উহার অক্ষকে অনুভূমিক রাখিয়া ভাসে তাহা হইলে তরলপৃষ্ঠ হইতে উহার ভারকেন্দ্রের উচ্চতা 1 cm অপেক্ষাও কম হইবে (চিত্র 7.8)। কাজেই, যে-চোঙের ঘনত্ব তরলের ঘনত্বের 0·3 গুণ সেই চোঙটি উহার অক্ষকে অনুভূমিক রাখিয়া ভাসিবে।

চিত্র 7.8

যে-চোঙের উপাদানের ঘনত্ব তরলের ঘনত্বের 0·5 গুণ সেই চোঙটি উহার আয়তনের অর্ধাংশ তরলে নিমজ্জিত রাখিয়া ভাসিবে। লক্ষণীয় যে, এক্ষেত্রে চোঙটির অক্ষ খাড়াভাবেই থাকুক বা অনুভূমিকভাবেই থাকুক, চোঙটির ভারকেন্দ্র থাকিবে তরলপৃষ্ঠে। কাজেই, এক্ষেত্রে চোঙটি উভয়ভাবেই ভাসিতে পারে (চিত্র 7.9 a, b)।

চিত্র 7.9

যে-চোঙটির উপাদানের ঘনত্ব তরলের ঘনত্বের 0·7 গুণ ভাসমান অবস্থায় সেই চোঙটির আয়তনের 0·7 অংশ তরলে নিমজ্জিত থাকে। চোঙটির অক্ষ খাড়াভাবে থাকিলে উহার দৈর্ঘ্যের 20×0·7 বা 14 cm তরলে নিমজ্জিত থাকিবে। অর্থাৎ, ইহার ভারকেন্দ্র তরলপৃষ্ঠ হইতে 4 cm নিচে থাকিবে। কিন্তু চোঙটি যদি উহার অক্ষকে অনুভূমিক রাখিয়া ভাসে তাহা হইলে তরলপৃষ্ঠ হইতে G-এর দূরত্ব 2 cm অপেক্ষা বেশি হইতে পারে না। কাজেই, এক্ষেত্রে চোঙটি উহার অক্ষকে খাড়া অবস্থায় রাখিয়া ভাসিবে (চিত্র 7.10-এর অনুরূপ)।

চিত্র 7.10

উদাহরণ 7.36 দুইটি চোঙ A এবং B-একই মাপের, কিন্তু ইহাদের উপাদান ভিন্ন। কেবলমাত্র A চোঙটি উহার দৈর্ঘ্যের অর্ধেক নিমজ্জিত রাখিয়া একটি তরলে ভাসে। যখন B চোঙটিকে A চোঙের উপর স্থাপন করা হয় তখন উহারা একই তরলে পূর্ণ নিমজ্জিত অবস্থায় ভাসে। তরলের ঘনত্ব এবং A ও B-এর উপাদানের ঘনত্বের তুলনা কর।

[Two cylinders A and B are of same dimensions but of different materials. A alone floats in a liquid with half of its length immersed. When B is placed over A, the combination just floats in the same liquid. Compare the densities of the liquid and the materials of A and B.] (Jt. Entrance, 1975)

সমাধান : মনে করি, চোঙ দুইটির দৈর্ঘ্য l এবং প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল α। তরলের ঘনত্ব $= \rho$

A চোঙের উপাদানের ঘনত্ব$=\rho_A$ এবং B চোঙের উপাদানের ঘনত্ব$=\rho_B$

A চোঙটি উহার দৈর্ঘ্যের অর্ধেক তরলে নিমজ্জিত রাখিয়া ভাসে।

কাজেই, A চোঙের ওজন$=$A চোঙের অর্ধেক আয়তনের তরলের ওজন,

$$\text{বা, } \rho_A \times l \times \alpha \times g = \tfrac{1}{2} l \times \alpha \times \rho \times g$$

$$\text{বা, } \frac{\rho}{\rho_A} = 2 \quad \text{বা, } \rho_A = \frac{\rho}{2} \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

B চোঙকে A চোঙের উপর স্থাপন করিলে উহারা একত্রে সম্পূর্ণ নিমজ্জিত অবস্থায় তরলে ভাসে। কাজেই,

A চোঙের ওজন + B চোঙের ওজন = A এবং B চোঙের সমান সম্মিলিত আয়তনের তরলের ওজন বা, $\rho_A \times l \times \alpha \times g + \rho_B \times l \times \alpha \times g = \rho \times 2l \times \alpha \times g$

বা, $\rho_A + \rho_B = 2\rho$ ... (ii)

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $\frac{\rho}{2} + \rho_B = 2\rho$ বা, $\rho_B = \frac{3}{2}\rho$ (iii)

কাজেই, সমীকরণ (i) এবং (iii) হইতে লেখা যায়,

$$\rho_A : \rho_B : \rho = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} : 1 = 1 : 3 : 2$$

প্রশ্নমালা 7

1. শূন্যস্থানে একটি বস্তুর ওজন 60 g-wt এবং জলে নিমজ্জিত অবস্থায় বস্তুটির আপাত ওজন 42 g-wt হইলে উহার আয়তন এবং উহার উপাদানের আপেক্ষিক গুরুত্ব নির্ণয় কর।

[A body weighs 60 g-wt in vacuum and 42 g-wt in water. Find its volume and specific gravity.] [18 cm^3, 3]

2. বায়ুতে এবং জলে নিমজ্জিত অবস্থায় তামার তৈয়ারী একটি ফাঁপা বলের ওজন যথাক্রমে 523 g এবং 447 g। বলের মধ্যবর্তী ফাঁপা অংশের আয়তন কত? ধরিয়া লও যে, তামার আপেক্ষিক গুরুত্ব 8·9।

[A hollow ball made of copper weighs 523 g in air and 447 g in water. What is the volume of its cavity, given that specific gravity of copper is 8·9 ?] [17·235 cm^3]

3. 0·80 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট একটি কাষ্ঠখণ্ডের আয়তন 10 ft^3 ; উহাকে বিশুদ্ধ জলে নিমজ্জিত অবস্থায় ধরিয়া রাখিতে হইলে কী পরিমাণ বল প্রয়োজন ?

[A piece of wood of specific gravity 0·80 has a valume of 10 ft^3. What force would be needed to hold it submerged in pure water ?] [?·48 lb-wt]

4. বিশুদ্ধ জলে ভাসমান একটি বরফের ব্লকের বেধ 1 ফুট। ইহার ক্ষেত্রফল ন্যূনতম কত হইলে উহা 140 lb ভরবিশিষ্ট ব্যক্তিকে জলে ভাসাইয়া রাখিতে পারিবে? বরফের আপেক্ষিক গুরুত্ব = 0·92।

[Calcutate the area of the smallest block of ice 1 foot thick, floating in pure water that will just support a man weighing 140 lb (specific gravity of ice = 0·92.] [28·02 sq. ft]

5. একটি কাঠের টুকরার সহিত 10 g ভরের একখণ্ড অ্যালুমিনিয়াম একত্রে বাধা অবস্থায় সম্পূর্ণ নিমজ্জিত অবস্থায় জলে ভাসে। কাঠ ও অ্যালুমিনিয়ামের ঘনত্ব যথাক্রমে 0·9 g/cm^3 এবং 2·7 g/cm^3 হইলে কাঠের টুকরাটির আয়তন নির্ণয় কর।

[A piece of wood and a piece of aluminium weighing 10 g when tied together are found to float just immersed in water. If the densities of wood and aluminium are 0·9 g/cm^3 and 2·7 g/cm^3 respectively, find the volume of the piece of wood.] [62·96 cm^3]

6. 4 mm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি ধাতব গোলক জলে ডুবিয়া যায়। গোলকটির উপর

3 mm বেধবিশিষ্ট মোমের প্রলেপ দিলে উহা সম্পূর্ণ নিমজ্জিত অবস্থায় জলে ভাসে। মোমের ঘনত্ব 0·8 g/cm³ হইলে উক্ত ধাতুর ঘনত্ব নির্ণয় কর।

[A metallic sphere of diameter 4 mm sinks in water. If the sphere is coated with wax of 3 mm thickness it floats just immersed. If the density of wax is 0·8 g/cm³, find the density of the metal.] [1·87 g/cm³ (প্রায়)]

7. 1000 লিটার আয়তনের এবং 950 kg ওজনের একটি বয়াকে 1·02 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট সমুদ্রজলে সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত অবস্থায় শিকলের সাহায্যে সমুদ্রের তলদেশে নোঙ্গর করা আছে। শিকলের টান কত হইবে? শিকলের ওজন উপেক্ষা কর।

[A buoy of volume 1000 litres and weighing 950 kg is fully immersed in sea-water of specific gravity 1·02 being anchored to the sea-bottom by a chain. What is the tension on the chain? Ignore the weight of the chain.] [70 kg-wt]

8. একটি ফাঁপা গোলকের আভ্যন্তরীণ ব্যাস ও বহির্ব্যাস যথাক্রমে 10 cm ও 12 cm। ইহা সম্পূর্ণ নিমজ্জিত অবস্থায় জলে ভাসে। গোলকের উপাদানের ঘনত্ব নির্ণয় কর।

[A hollow spherical ball has internal diameter of 10 cm and external diameter of 12 cm. It is found just to float in water. Find the density of the material of the sphere. [2·37 g/cm³]

9. একটি কাঠের ব্লক উহার আয়তনের 80% জলের তলায় রাখিয়া ভাসে। যখন ব্লকটিকে তেলে স্থাপন করা হইল তখন উহার আয়তনের 95% তেলের উপরিপৃষ্ঠের তলায় থাকে। এম. কে. এস. পদ্ধতিতে কাঠের এবং তেলের ঘনত্ব নির্ণয় কর।

[A block of wood floats in water with 80% of its volume below the surface. When the block is placed in oil 95% of its volume is below the surface. Find the densities of the wood and the oil in m. k. s. system.] [$8 \cdot 0 \times 10^2$ kg/m³, $8 \cdot 4 \times 10^2$ kg/m³]

10. একটি হিমশৈলের মোট আয়তনের 10% সমুদ্রপৃষ্ঠের উপরে থাকে। যদি বরফের ঘনত্ব 920 kg/m³ হয় তাহা হইলে এম. কে. এস. পদ্ধতিতে সমুদ্রজলের ঘনত্ব নির্ণয় কর।

[10% of the volume of an iceberg is above the surface of the sea. Calculale the density of the sea-water in m. k. s. system, if the density of ice is 920 kg/m³.] [$1 \cdot 02 \times 10^3$ kg/m³]

11. 5×10^{-4} m³ আয়তনের একটি কাঠের ব্লক 8×10^2 kg/m³ ঘনত্ববিশিষ্ট তরলে ভাসিতেছে, যাহাতে উহার 60% নিমজ্জিত অবস্থায় রহিয়াছে। ইহার পর ব্লকটিকে $1 \cdot 2 \times 10^3$ kg/m³ ঘনত্ববিশিষ্ট তরলে স্থাপন করা হইল। ব্লকটির সহিত $7 \cdot 2 \times 10^3$ kg/m³ ঘনত্ববিশিষ্ট ধাতুর কী আয়তন যুক্ত করিলে এই যুগ্ম-বস্তুটি সম্পূর্ণ নিমজ্জিত অবস্থায় ভাসিবে?

[A wooden block of volume 5×10^{-4} m³ floats in a liquid of density 8×10^2 kg/m³ so that it is 60% immersed. The block is then placed in a liquid of density $1 \cdot 2 \times 10^3$ kg/m³. What is the volume of metal of density $7 \cdot 2 \times 10^3$ kg/m³ which should be attached to the wooden block so that the combination just floats totally immersed in this liquid? [$6 \cdot 0 \times 10^{-5}$ m³]

12. 0·25 g/cm^3 ঘনত্ববিশিষ্ট একটি কাঠের চোঙের এক প্রান্তে একটি ধাতব চোঙ যুক্ত আছে। ধাতুটির ঘনত্ব 8 g/cm^3। চোঙদ্বয়ের ব্যাস 5 cm এবং উহারা সমাক্ষ। কাঠের চোঙ এবং ধাতুর চোঙের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 50 cm এবং 2·5 cm। জলে স্থাপিত করিলে এই যুগ্ম-উপাদানের চোঙটি উহার কতটা দৈর্ঘ্য জলের উপর রাখিয়া ভাসিবে ?

[A cylinder of wood of density 0·25 g/cm^3 has another metal cylinder attached to one end. The density of metal is 8 g/cm^3. The cylinders are 5 cm in diameter, have the same axis and are respectively 50 cm and 2·5 cm long. If the whole is placed in water, how much of it will be above the surface ?] [20 cm]

13. একটি ধাতুখণ্ডের ওজন 41 lb এবং আয়তন 0·09 ft^3। একটি সূতার সাহায্যে ইহাকে 0·76 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট তেলে নিমজ্জিত অবস্থায় ধরা হইল। ধাতুখণ্ডটির উপর ক্রিয়াশীল প্লবতা বলের মান এবং সূতার টান নির্ণয় কর।

[A piece of metal weighs 41 lb and has a volume of 0·09 ft^3. By means of a cord it is held suspended in an oil of specific gravity 0·76. Find the buoyant force acting on it and the tension in the string.] [4·25 lb-wt, 36·75 lb-wt]

14. দেখা গেল যে, 0·00125 g/cm^3 ঘনত্ববিশিষ্ট একটি বস্তুর ওজন 399·8 g-wt। যদি বস্তুটির উপাদানের ঘনত্ব 2·5 g/cm^3 হয় তাহা হইলে 0·00129 g/cm^3 ঘনত্ববিশিষ্ট বায়ুতে বস্তুটির ওজন নির্ণয় কর। ইহার প্রকৃত ওজনও নির্ধারণ কর।

[The weight of a body in air of density 0·00125 g/cm^3 is found to be 399·8 g-wt. If the density of the material of the body is 2·5 g/cm^3, find the weight of the body in air of density 0·00129 g/cm^3 and also its true weight.] [399·7936 g, 400 g]

15. 8 g/cm^3 ঘনত্ববিশিষ্ট একটি ধাতু-নির্মিত ঘনককে একটি সূতার সাহায্যে স্প্রিং-তুলা হইতে এমনভাবে ঝুলান হইল যাহাতে ঘনকটি সম্পূর্ণভাবে জলে নিমজ্জিত অবস্থায় থাকে। এই সময় স্প্রিং-তুলার পাঠ 875 g-wt হইলে ঘনকটির ভর ও আয়তন নির্ণয় কর। ঘনকটিকে 0·8 g/cm^3 ঘনত্ববিশিষ্ট কেরোসিন তেলে সম্পূর্ণ নিমজ্জিত করিলে স্প্রিং-তুলার পাঠ কত হইবে ?

[A metal cube of density 8 g/cm^3 is suspended by means of a thread from a spring balance so as to be completely immersed in water. If the reading of the spring balance be 875 g-wt, calculate the mass and size of the cube. What will be the reading of the spring balance, when the cube is suspended so as to be completely immersed in kerosene of density 0·8 g/cm^3 ?]

[125 cm^3, 1 kg, 900 g-wt]

16. 10 cm দীর্ঘ সম-প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি কাঠের চোঙ উহার 2 cm দৈর্ঘ্য জলপৃষ্ঠের উপরে রাখিয়া জলে ভাসে। লবণ-জলে চোঙটি 3 cm দৈর্ঘ্য তরলপৃষ্ঠের উপরে রাখিয়া ভাসে। লবণ-জলের ঘনত্ব নির্ণয় কর। 1·25 g/cm^3 ঘনত্ববিশিষ্ট তরলে চোঙটি উহার কতটা দৈর্ঘ্য তরলপৃষ্ঠের উপরে রাখিয়া ভাসিবে ?

[A wooden cylinder of uniform cross-section and of length 10 cm floats in water with 2 cm above the surface. In a salt-solution the cylinder floats with 3 cm above the liquid surface. Find the density of the salt-solution. How much of the cylinder

will be above the liquid surface when floating in a liquid of density 1·25 g/cm^3 ?] [1·14 g/cm^3, 3·6 cm]

17. বায়ুতে 20 cm^3 আয়তনবিশিষ্ট একটি বস্তুর ওজন 200 g। জল অপেক্ষা 8 গুণ ঘনত্ববিশিষ্ট কোন তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় অভিকর্ষের প্রভাবে বস্তুটির নিম্নাভিমুখী ত্বরণ কত হইবে? (অভিকর্ষজ ত্বরণ = 32 ft/s^2)

[A body of volume 20 cm^3 weighs 200 g in air. With what acceleration will this body move under gravity in a liquid which is 8 times heavier than water. Acceleration due to gravity = 32 ft/s^2] [6·4 ft/s^2]

18. একটি ধাতব গোলকের বায়ুতে ওজন 200 g, জলে ওজন 175 g এবং একটি তরলে ওজন 150 g। তরলটির আপেক্ষিক গুরুত্ব কত?

[A metallic sphere weighs 200 g in air, 175 g in water and 150 g in a liquid. What is the specific gravity of the liquid ?] [2]

19. 156 g ভরের এবং 7·8 g/cm^3 ঘনত্বের লোহখণ্ড 13·6 g/cm^3 ঘনত্বের পারদে ভাসে। লোহখণ্ডটি পারদে ডুবাইতে ন্যূনতম কত বল প্রয়োগ করিতে হইবে?

[A piece of iron of mass 156 g and density 7·8 g/cm^3 floats on mercury of density 13·6 g/cm^3. What is the minimum force required to submerge it ?] [116 g-wt]

20. একটি বেলুনের আবরণের আয়তন-ধারণক্ষমতা 500 ঘনমিটার। ইহাকে 0·09 g/litre ঘনত্ববিশিষ্ট হাইড্রোজেন দ্বারা পূর্ণ করা হইল। 1·29 g/litre ঘনত্ববিশিষ্ট বায়ুতে এই বেলুনটি মোট কী পরিমাণ ওজন ধারণ করিতে পারে?

বেলুনটি যদি হাইড্রোজেনের দ্বিগুণ ঘনত্ববিশিষ্ট হিলিয়াম গ্যাস দ্বারা পূর্ণ করা হয় তাহা হইলে প্লবতার মান কতটা কমিবে?

[The envelope of a balloon is 500m^3 in capacity and is filled with hydrogen of density 0 09 g/litre. What gross weight can the balloon support in air of density 1·29 g/litre ?

If the envelope were filled with Helium of density double that of hydrogen by what amount would the buoyancy be reduced ?] [600 kg-wt, 45 kg-wt]

21. 8·5 g/cm^3 ঘনত্ববিশিষ্ট পিতলের কতটা আয়তনের সহিত 100 g ভরবিশিষ্ট এবং 0·2 g/cm^3 ঘনত্ববিশিষ্ট কাঠের টুকরা যুক্ত করিলে উহারা উভয়ে ঠিক জলে ডুবিবে?

[What volume of brass of density 8·5 g/cm^3 must be attached to a piece of wood of mass 100 g and density 0·2 g/cm^3 so that the two together will just submerge beneath water ? [$53\frac{1}{3}$ cm^3]

22. 0·25 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট একখণ্ড কর্ক এবং 8·0 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট একখণ্ড ধাতুকে একত্রে বাঁধা হইল। যদি এই সমন্বয় 0·8 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট অ্যালকোহলে ভাসিয়াও না থাকে, আবার ডুবিয়াও না যায়, তবে কর্কের ও ধাতুর ভরের অনুপাত নির্ণয় কর।

[A piece of cork of specific gravity 0·25 and metallic piece of specific gravity 8·0 are bound together. If the combination neither floats nor sinks in alcohol of specific gravity 0·8, calculate the ratio of the masses of cork and the metal.] (Jt. Ent., '81) [9 : 22]

23. 8·9 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট এবং 178 g ভরবিশিষ্ট একটি তামার টুকরার সহিত

60 g ভরবিশিষ্ট একটি কাষ্ঠখণ্ড যুক্ত করা হইল। ইহাদের একত্রে জলে নিমজ্জিত অবস্থায় ওজন 118 g। কাঠের আপেক্ষিক গুরুত্ব কত?

[To a piece of copper (specific gravity 8·9) of mass 178 g is attached a piece of wood of mass 60 g. When totally immersed in water the two together weigh 118 g. What is the specific gravity of the wood?] [0·6]

24. একটি স্প্রিং-তুলা হইতে একখণ্ড সীসাকে বায়ুতে ঝুলাইয়া দিলে উহার পাঠ হয় 200 g-wt। যদি সীসাখণ্ডটি নুন-জলে অর্ধ-নিমজ্জিত করা হয় তাহা হইলে উহার নূতন পাঠ কত হইবে? ধরিয়া লও যে, সীসার আপেক্ষিক গুরুত্ব 11·4 এবং নুন-জলের আপেক্ষিক গুরুত্ব 1·10।

[A spring balance reads 200 g-wt when carrying a lump of lead in air. If the lead is now immersed with half its volume in brine, what will be the new reading of the spring balance? Sp. gravity of lead is 11·4 and that of brine is 1·10] [190·4 g-wt]

25. বায়ুতে একখণ্ড মোমের ওজন 0·1365 N। একটি সূতার সাহায্যে ইহাকে একটি ভারের সহিত বাঁধা হইল এবং এইরূপ ব্যবস্থা করা হইল যাহাতে কেবলমাত্র ভারটিই জলে নিমজ্জিত থাকে। এই অবস্থায় মোম ও নিমজ্জিত ভারের সম্মিলিত ওজন 1·0255 N। যখন মোম এবং ভার উভয়েই জলে নিমজ্জিত অবস্থায় থাকে তখন ইহাদের মোট ওজন 0·8755 N। মোমের ঘনত্ব কত?

[A piece of wax weighs 0·1365 N in air. It is tied by a length of thread to a weight and arranged so that the weight only is immersed in water, when their combined weight is 1·0255 N. When both wax and weight are immersed the combind weight is 0·8755 N. Find the density of wax] [910 kg/m^3]

26. একটি সঙ্কর ধাতুতে আয়তনের হিসাবে 30% সীসা (ঘনত্ব=11400 kg m^{-3}) এবং 70% টিন (ঘনত্ব=7300 kg m^{-3}) আছে। সঙ্কর ধাতুটির ঘনত্ব নির্ণয় কর।

[An alloy contains 30% by volume of lead (density 11400 kg m^{-3}) and 70% by volume of tin (density 7300 kg m^{-3}). Find the density of the alloy.] [8530 kg m^{-3}]

27. 0·8 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট একটি কাঠের টুকরাকে জলের তলায় ধরিয়া রাখা হইল। প্রমাণ কর যে, টুকরাটিকে ছাড়িয়া দিলে উহার প্রারম্ভিক ত্বরণ $g/4$ হইবে। এখানে g হইল অভিকর্ষজ ত্বরণ।

[A piece of wood having specific gravity 0·8 is held under water. Prove that when the piece is released, its initial acceleration is $g/4$, where g is the acceleration due to gravity.] (H.S. '65)

28. একটি তার 180 g ভরবিশিষ্ট একটি লোহার বস্তুকে 800 kg/m^3 ঘনত্ববিশিষ্ট তরলে সম্পূর্ণ নিমজ্জিত অবস্থায় বিধৃত রাখিয়াছে। লোহার ঘনত্ব 8000 kg/m^3 হইলে তারের টান কত হইবে?

[A string supports a solid iron object of mass 180 g totally immersed in a liquid of density 800 kg/m^3. Calculate the tension in the string if the density of iron is 8000 kg/m^3. [1·59 N (প্রায়)

29. কোন বস্তু একটি তরলে উহার আয়তনের $\frac{1}{4}$ অংশ তরলের উপরে রাখিয়া ভাসে। বস্তুটিকে তরলের d গভীরতায় লইয়া গিয়া ছাড়িয়া দেওয়া হইল। দেখাও যে, যে-সময়ের মধ্যে বস্তুটি তরলতলে আসিয়া পৌঁছিবে উহার মান $\sqrt{\frac{6d}{g}}$।

[A body floats in a liquid with $\frac{1}{3}$ of its volume above the liquid surface. The body is taken to a depth d within the liquid and is then released. Show that the taken time by the body to reach the surface is $\sqrt{\frac{6d}{g}}$.]

30. 2·5 g/cm³ ঘনত্ববিশিষ্ট একটি পাথর সমুদ্রজলে সম্পূর্ণ নিমজ্জিত অবস্থায় আছে। স্থির অবস্থা হইতে উহাকে ডুবিয়া যাইতে দেওয়া হইল। দুই সেকেণ্ড সময়ে পাথরটি কতটা গভীরতা পর্যন্ত ডুবিবে তাহা নির্ণয় কর। ঘর্ষণ উপেক্ষা কর। সমুদ্রজলের আপেক্ষিক গুরুত্ব 1·025। অভিকর্ষজ ত্বরণ = 980 cm/s²।

[A stone of density 2·5 g/cm³ completely immersed in sea water is allowed to sink from rest. Calculate the depth to which the stone would sink in 2 s. Neglect the friction. (Specific gravity of sea-water is 1·025. (Acceleration due to gravity = 980 cm/s²)]

(I.I.T. Adm. Test, '69) [11·56 m]

31. 5 cm বাহুবিশিষ্ট একটি ঘনকাকার লোহার ব্লক একটি পাত্রে রক্ষিত পারদে ভাসিতেছে। (i) ব্লকটির কতটা উচ্চতা পারদতলের উপর থাকিবে? (ii) এইবার পারদ পাত্রটিতে জল ঢালা হইল যাহাতে ব্লকটি ঠিক জল দ্বারা আচ্ছাদিত হয়। এই অবস্থায় পাত্রে জলস্তম্ভের উচ্চতা কত হইবে? লোহা এবং পারদের ঘনত্ব যথাক্রমে 7·2 g/cm³ এবং 13·6 g/cm³।

[A cubical block of iron 5 cm on each side is floating on mercury in a vessel. (i) What is the height of the block above the mercury level? (ii) Water is poured into the vessel until it just covers the iron block. What is the height of the water column? The densities of iron and mercury are 7·2 g/cm³ and = 3·6 g/cm³ respectively.] (I. I. T. Adm. Test, '73) [2·35 cm, 2·54 cm]

32. কোন তুলাযন্ত্রে 12 g/cm³ ঘনত্ববিশিষ্ট কোন বস্তুকে 8 g/cm³ ঘনত্ববিশিষ্ট পিতলের বাটখারার সাহায্যে ওজন করিবার সময় বায়ুর প্লবতা উপেক্ষা করিলে পরিমাপে শতকরা ত্রুটি কত হইবে? পরীক্ষাকালে বায়ুর ঘনত্ব = $1·2 \times 10^{-3}$ g/cm³।

[Calculate the percentage error arising from the negligence of the buoyancy of air in weighing an object of density 12 g/cm³ with brass weights of density 8 g/cm³ by a physical balance.

(Density of air during the experiment = $1·2 \times 10^{-3}$ g/cm³)]

(Jt. Entrance, 1981)

[সমাধানের সংকেত: 7·33 নং উদাহরণ অনুসারে,

$$\frac{\text{বস্তুর প্রকৃত ভর, M}}{\text{বস্তুর আপাত ভর, } m} = \left(1-\frac{\rho}{d}\right) \Big/ \left(1-\frac{\rho}{\sigma}\right) \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

এখানে, ρ = বায়ুর ঘনত্ব = $1·2 \times 10^{-3}$ g/cm³ ; d = বাটখারার ঘনত্ব = 8 g/cm³

σ = বস্তুর উপাদানের ঘনত্ব = 12 g/cm³

(i) হইতে পাই, ভর পরিমাপের শতকরা ত্রুটি = $\frac{M-m}{M} \times 100\% = 0·005\%$]

দ্রষ্টব্য: বায়ুমণ্ডলের চাপ-সংক্রান্ত অঙ্ক গ্যাসের প্রসারণ অধ্যায়ে দেওয়া হইয়াছে।

তাপবিজ্ঞান

প্রথম পরিচ্ছেদ

উষ্ণতার বিভিন্ন স্কেল

1.1 উষ্ণতার বিভিন্ন স্কেল (The different scales of temperature) : থার্মোমিটারের দুই স্থিরাঙ্কের মধ্যবর্তী উষ্ণতার ব্যবধানকে বলা হয় প্রাথমিক অন্তর (fundamental interval)। এই প্রাথমিক অন্তরকে বিভিন্নভাবে ভাগ করিয়া বিভিন্ন থার্মোমিটার স্কেল তৈয়ারী হইয়াছে। উষ্ণতা নির্ণয়ের জন্য সাধারণত দুইটি স্কেল ব্যবহৃত হয়। যথা—(i) সেলসিয়াস স্কেল এবং (ii) ফারেনহাইট স্কেল।

(i) **সেলসিয়াস স্কেল (Celsius scale) :** সুইডিস বিজ্ঞানী সেলসিয়াস এই স্কেল প্রবর্তন করেন। এই স্কেলে হিমাঙ্ককে বা নিম্ন-স্থিরাঙ্ককে 0° ডিগ্রী এবং স্বাভাবিক চাপে বিশুদ্ধ জলের স্ফুটনাঙ্ক বা ঊর্ধ্ব-স্থিরাঙ্ককে 100° ধরা হয়। এই স্কেলে প্রাথমিক অন্তরকে 100টি সমান ভাগে ভাগ করা হয়। এইরূপ একটি ভাগকে এক 'সেলসিয়াস ডিগ্রী' বলা হয়। পূর্বে উষ্ণতার এই স্কেলকে **'সেন্টিগ্রেড স্কেল'** বলা হইত। কিন্তু বর্তমানে এই স্কেলটির প্রবর্তক বিজ্ঞানী সেলসিয়াসের নামানুসারে ইহাকে সেলসিয়াস স্কেল বলা হয়। এই স্কেলে উষ্ণতাকে '°C' চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ii) **ফারেনহাইট স্কেল (Fahrenheit scale) :** এই স্কেল-অনুসারে নিম্ন-স্থিরাঙ্ক 32° ডিগ্রী এবং ঊর্ধ্ব-স্থিরাঙ্ক 212° ডিগ্রী। প্রাথমিক অন্তরকে এই স্কেলে 180 ভাগে ভাগ করা হয়। এই স্কেলের এক ভাগকে এক 'ফারেনহাইট ডিগ্রী' বলা হয়। এক ফারেনহাইট ডিগ্রী এক সেলসিয়াস ডিগ্রী অপেক্ষা কম উষ্ণতার ব্যবধান নির্দেশ করে। ফারেনহাইট স্কেলে উষ্ণতাকে '°F' চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

1.1 উষ্ণতার বিভিন্ন স্কেলের সম্পর্ক : নিম্ন- এবং ঊর্ধ্ব-স্থিরাঙ্কের ব্যবধানকে সেলসিয়াস স্কেলে 100টি সমান ভাগে এবং ফারেনহাইট স্কেলে 180টি সমান ভাগে ভাগ করা হয়। এই ব্যবধান উষ্ণতার একটি নির্দিষ্ট পাল্লা (range) বুঝাইতেছে।

সুতরাং বলা যায়, 180 ফারেনহাইট ডিগ্রী = 100 সেলসিয়াস ডিগ্রী

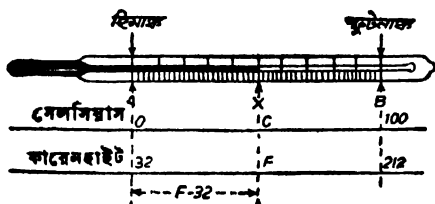
বা, **1 সেলসিয়াস ডিগ্রী = $\frac{9}{5}$ ফারেনহাইট ডিগ্রী** ... (1.1)

ধরি, কোন বস্তুর উষ্ণতা সেলসিয়াস স্কেলের পাঠ C° এবং ফারেনহাইট স্কেলে F° (চিত্র 1.1)। আমরা এইবার সেলসিয়াস স্কেলে পাঠ C-এর সহিত ফরেনহাইট স্কেলের সেলসিয়াস পাঠের সম্পর্ক নির্ণয় করিতে চাই।

ফারেনহাইট স্কেলে হিমাঙ্কের পাঠ 32°

সুতরাং, এই স্কেলে পারদ F-দাগ পর্যন্ত যাইবার অর্থ হিমাঙ্ক হইতে (F−32) ঘর যাওয়া।

এখন, ফারেনহাইট ডিগ্রী= হিমাঙ্ক হইতে স্ফুটনাঙ্ক পর্যন্ত উষ্ণতা ব্যবধানের $\frac{1}{180}$ ভাগ

∴ (F−32) ফারেনহাইট ডিগ্রী=হিমাঙ্ক হইতে স্ফুটনাঙ্ক পর্যন্ত ব্যবধানের $\frac{F-32}{180}$ ভাগ ··· ( )

চিত্র 1.1

আবার, 1 সেলসিয়াস ডিগ্রী=হিমাঙ্ক হইতে স্ফুটনাঙ্ক পর্যন্ত উষ্ণতার ব্যবধানের $\frac{1}{100}$ ভাগ

∴ C সেলসিয়াস ডিগ্রী=হিমাঙ্ক হইতে স্ফুটনাঙ্ক পর্যন্ত উষ্ণতার ব্যবধানে $\frac{C}{100}$ ভাগ ··· (ii)

এখন, C° সেলসিয়াস এবং F° ফারেনহাইট একই উষ্ণতা নির্দেশ করিতেছে বলিয়া (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\frac{C}{100}=\frac{F-32}{180} \quad \text{বা,} \quad \frac{C}{5}=\frac{F-32}{9} \quad \cdots \quad (1.2)$$

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 1.1 100°F উষ্ণতাকে সেলসিয়াস স্কেলে রূপান্তরিত কর।
[Change 100°F to the Celsius scale.]

সমাধান ঃ মনে করি, ফারেনহাইট স্কেলে যে-উষ্ণতার মান 100°, সেলসিয়াস স্কেলে উহার মান C°

কাজেই লেখা যায়, $\frac{C}{5}=\frac{100-30}{9}$ বা, $C=\frac{5}{9}\times 68=37{\cdot}78°$ (প্রায়)

উদাহরণ 1.2 60°C উষ্ণতাকে ফারেনহাইট স্কেলে রূপান্তরিত কর।
[Change 60°C to the Fahrenheit scale.]

সমাধান ঃ মনে করি, সেলসিয়াস স্কেলে যে-উষ্ণতার মান 60° ফারেনহাইট স্কেলে উহার মান F°

$$\text{সুতরাং, } \frac{F-32}{9}=\frac{60}{5}$$

বা, $F-32=12\times 9$ বা, $F=108+32=140°$

উদাহরণ 1.3 একটি ফারেনহাইট থার্মোমিটারের হিমাঙ্ক সঠিকভাবে চিহ্নিত করা আছে। ইহার নলটি সুষম। কিন্তু যখন একটি মানক সেলসিয়াস থার্মোমিটারের পাঠ 20° তখন ইহার পাঠ 67·5°। এই ফারেনহাইট থার্মোমিটারে বিশুদ্ধ জলের স্ফুটনাঙ্কের পাঠ কী হইবে?

[The freezing point of Fahrenheit thermometer has been correctly marked. The bore of its tube is uniform. But when a standard Celsius thermometer reads 20° it reads 67·50°. What will this Fahrenheit thermometer reads at the boiling point of pure water ?

সমাধান ঃ মনে করি, আলোচ্য ফারেনহাইট থার্মোমিটার জলের স্ফুটনাঙ্কের পাঠ $=x°$

কাজেই, এই থার্মোমিটারের প্রাথমিক অন্তর $=(x-32)$ ঘর

$$\therefore \frac{67·5-32}{x-32}=\frac{20}{100} \quad \text{বা,} \quad \frac{35·5}{x-32}=\frac{1}{5}$$

বা, $x-32=177·5$ বা, $x=209·5°$ F

উদাহরণ 1.4 কোন্ উষ্ণতায় ফারেনহাইট এবং সেলসিয়াস থার্মোমিটার একই পাঠ দেয় তাহা নির্ণয় কর।

[Find at what temperature a Fahrenheit thermometer and a Celsius thermometer would give the same reading.] (H. S. 1960)

সমাধান ঃ মনে করি, নির্ণেয় উষ্ণতার মান $x°$C বা, $x°$F।

তাহা হইলে লেখা যায়, $\frac{x-32}{9}=\frac{x}{5}$

বা, $5x-160=9x$ বা, $4x=-160$ বা, $x=-40$

সুতরাং, নির্ণেয় উষ্ণতা হইল $-40°$C বা, $-40°$F

উদাহরণ 1.5 কোন ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটারের স্ফুটনাঙ্কের পাঠ 160° এবং হিমাঙ্কের পাঠ 15°। এই থার্মোমিটারের সাহায্যে কোন বস্তুর উষ্ণতার পাঠ 73° হইলে সেলসিয়াস এবং ফারেনহাইট স্কেলে বস্তুটির উষ্ণতা কত ?

[The reading of a faulty thermometer is 160° at the boiling point and 15° at the freezing point. If the temperature of a body as read by this thermometer is 73°, what is its temperature in Celsius and Fahrenheit scales. ?]

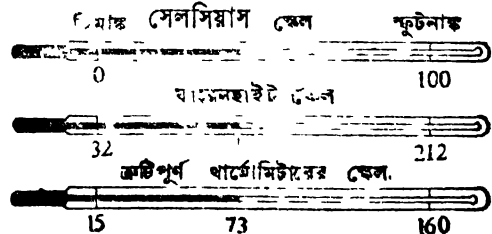
সমাধান ঃ ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটারের প্রাথমিক অন্তর $=160°-15°=145°$

ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটারের পাঠ যখন x, তখন পারদসূত্র প্রকৃতপক্ষে হিমাঙ্ক হইতে $(x-15)$ দাগ গিয়াছে।

এই থার্মোমিটারের এক দাগ = হিমাঙ্ক হইতে স্ফুটনাঙ্ক পর্যন্ত উষ্ণতার $\frac{1}{145}$ দাগ

$\therefore$ এই থার্মোমিটারের $(x-15)$ দাগ = হিমাঙ্ক হইতে স্ফুটনাঙ্ক পর্যন্ত উষ্ণতার $\frac{x-15}{145}$ ভাগ

চিত্র 1.2

সেলসিয়াস এবং ফারেনহাইট স্কেলে বস্তুটির উষ্ণতার পাঠ যথাক্রমে C এবং F হইলে

লেখা যায়, $\frac{x-15}{145}=\frac{C}{100}=\frac{F-32}{180}$

$x=73$ বসাইয়া পাই, $\frac{73-15}{145}=\frac{C}{100}=\frac{F-32}{180}$

$\therefore \quad C=40$ এবং $F=104$

কাজেই, সেলসিয়াস এবং ফারেনহাইট স্কেলে বস্তুটির উষ্ণতা যথাক্রমে 40°C এবং 104°F।

উদাহরণ 1.6 একটি সেলসিয়াস থার্মোমিটারকে দুধে প্রবেশ করান আছে এবং ইহা 56°C পাঠ দিতেছে। একটি ফারেনহাইট থার্মোমিটারকে উষ্ণ জলে প্রবেশ করান আছে এবং উহা 202°F পাঠ দিতেছে। থার্মোমিটারদ্বয়ের স্থান-বদল করিলে উহাদের পাঠ কীরূপ হইত?

[A Celsius thermometer placed in milk reads 56°C, whilst a Fahrenheit thermometer placed in hot water reads 202°F. What would the thermometers read if they were interchanged ?]

সমাধান: সেলসিয়াস থার্মোমিটারটিকে দুধের পরিবর্তে উষ্ণ জলে ডুবাইলে উহার যে-পাঠ হইবে তাহা 202°F-এর তুল্য। মনে করি, এই সময় সেলসিয়াস থার্মোমিটারের পাঠ C° সেলসিয়াস

$$\frac{C}{5}=\frac{202-32}{9} \quad \text{বা,} \quad C=\frac{170}{9}\times 5=94\times\frac{4}{9}$$

সুতরাং, সেলসিয়াস থার্মোমিটারের পাঠ হইবে $94\frac{4}{9}$°C

ফারেনহাইট থার্মোমিটারটিকে জলের পরিবর্তে দুধে ডুবাইলে উহার যে-পাঠ হইবে তাহা 56°C-এর তুল্য। মনে করি, এই সময় ফরেনহাইট থার্মোমিটারের পাঠ F° ফারেনহাইট।

কাজেই, $\frac{F-32}{9}=\frac{56}{5}$ বা, $F-32=\frac{504}{5}$ বা, $F=132\frac{4}{5}$ °F

সুতরাং, ফারেনহাইট থার্মোমিটারের পাঠ হইবে $132\frac{4}{5}$°F

উদাহরণ 1.7 একটি ত্রুটিপূর্ণ সেলসিয়াস থার্মোমিটারকে যখন গলন্ত বরফের মধ্যে রাখা হয় তখন উহার পারদতল 5° দাগের নিকট আসিয়া দাঁড়ায়। যখন উহাকে স্বাভাবিক চাপের বাষ্পের সংস্পর্শে রাখা হয় তখন পারদতল 90° দাগে আসিয়া দাঁড়ায়। থার্মোমিটারকে 50°C উষ্ণতাবিশিষ্ট বস্তুর সংস্পর্শে রাখিলে উহার পাঠ কত হইবে?

[Mercury in a faulty Celsius thermometer stands at 5° mark when placed in melting ice and at 90° mark when placed in steam at normal pressure. What will be its reading when placed in contact with a body at 50°C ?]

সমাধান: 50°C উষ্ণতায় আলোচ্য ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটারের পাঠ x° হইলে লেখা যায়,

$$\frac{x-5}{(90-5)}=\frac{50}{100}$$ বা, $x=\frac{1}{2}\times 85+5$ বা, $x=4:75°$

সুতরাং, থার্মোমিটারটির নির্ণেয় পাঠ 47·5°

উদাহরণ 1.8 একটি থার্মোমিটারে হিমাঙ্কে 20° এবং স্ফুটনাঙ্কে 150° দাগ কাটা রহিয়াছে। 45°C উষ্ণতায় এই থার্মোমিটারটিব পাঠ কী হইবে?

[The freezing point on a thermometer is marked 20° and the boiling point is marked 150°. What would be the reading of this thermometer at 45°C ?]

সমাধান: মনে করি, 45°C উষ্ণতায় আলোচ্য থার্মোমিটারের পাঠ $x°$। কাজেই লেখা যাইবে,

$$\frac{45}{100}=\frac{x-20}{150-20} \quad \text{বা,} \quad \frac{45}{100}=\frac{x-20}{130}$$

বা, $x-20=\frac{45\times 130}{100}$ বা, $x=78·5$

সুতরাং, যখন উষ্ণতা 45°C তখন আলোচ্য থার্মোমিটারটির পাঠ 78·5°।

উদাহরণ 1.9 কোন সেলসিয়াস থার্মোমিটারের স্থিরাঙ্কগুলির যাথার্থ্য বিচার করিবার সময় দেখা গেল যে, হিমাঙ্কে ইহার পাঠ 0·5° এবং স্ফুটনাঙ্কে ইহার পাঠ 99·2°। এই সময়ে বায়ুমণ্ডলের চাপ 75 cmHg। যখন এই থার্মোমিটারের পাঠ 15° তখন প্র- - উষ্ণতা কত? কোন্ উষ্ণতায় ইহার পাঠ নির্ভুল হইবে?

[While verifying the fixed points of a Celsius thermometer, it reads 0·5° at the freezing point and 99·2° at the boiling point. The barometric pressure during the time of observation is 75 cmHg. What is the true temperature when this thermometer reads 15° ? At what temperature is it exactly right ?]

সমাধান: পরীক্ষাকালীন বায়ুমণ্ডলীয় চাপ $=75$ cm g

∴ স্বাভাবিক চাপের সহিত এই চাপের পার্থক্য $=76-75$

$=1$ cmHg $=10$ mmHg

আমরা জানি যে, বায়ুমণ্ডলের চাপ 27 mmHg পরিবর্তিত হইলে জলেব স্ফুটনাঙ্কের পরিবর্তন 1°C। চাপ কমিলে স্ফুটনাঙ্ক কমে।

কাজেই, 10 mmHg চাপ হ্রাসের ফলে স্ফুটনাঙ্কেব হ্রা-

$=\frac{1}{27}\times 10°C=0·37°C$ (প্রায়)

কাজেই, 75 cmHg চাপে স্ফুটনাঙ্কের প্রকৃত মান$=(100-0·37)=99·63°C$

ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটারের প্রাথমিক অন্তর$=99·2-0·5=98·$ দাগ।

এই থার্মোমিটারটির পাঠ যখন 15°, তখন প্রকৃত উষ্ণতা x°C হইলে লেখা যায়,

$$\frac{x}{99·63}=\frac{15-0·5}{98·7} \quad \text{বা,} \quad x=14·6°C \text{ (প্রায়)}$$

যে-উষ্ণতায় থার্মোমিটারটি নির্ভুল সেই উষ্ণতায় এই থার্মোমিটারের পাঠের সাংখ্যিক মান এবং সেলসিয়াস থার্মোমিটারের পাঠের সাংখ্যিক মান সমান।

ধরি, এই উষ্ণতা $=y°C$

$$\therefore \quad \frac{y}{99 \cdot 63}=\frac{y-0 \cdot 5}{98 \cdot 7}$$ বা, $y=53 \cdot 76°C$ (প্রায়)

প্রশ্নমালা 1

1. প্রমাণ কর যে, সেলসিয়াস এবং ফারেনহাইট স্কেলে উষ্ণতার পাঠের সম্পর্কটি নিম্নরূপ : $(C+40)=\frac{5}{9}(F+40)$

[Show that the relation between Celsius and Fahrenheit scale is as follows : $(C+40)=\frac{5}{9}(F+40)$]

2. সেলসিয়াস ও ফারেনহাইট থার্মোমিটারের সাহায্যে একই উষ্ণতা মাপিয়া দুই থার্মোমিটারের পাঠে 48° ব্যবধান দেখা গেল। ডিগ্রীতে প্রতিটি থার্মোমিটারের পাঠ কত হইবে ?

[The same temperature when read on Celsius and Fahrenheit thermometer gives a difference of 48°. What is the number of degree indicated by each thermometer ?]

[20°C এবং 68°F বা, −100°C এবং −148°F]

3. যদি কোন থার্মোমিটারের নিম্ন-স্থিরাঙ্ক এবং ঊর্ধ্ব-স্থিরাঙ্ককে যথাক্রমে 20° এবং 140° চিহ্নিত করা থাকে তাহা হইলে 92°F উষ্ণতায় এই থার্মোমিটারটির পাঠ কত হইবে ?

[If the lower and upper fixed points of a thermometer are marked 20° and 140° respectively, what reading would this thermometer indicate for a temperature of 92°F ?]

[60°]

4. কোন একদিন সর্বোচ্চ উষ্ণতা ছিল 120°F। সেলসিয়াস স্কেলে ইহার মান কত ?

[On a certain day the maximum temperature was found to be 120°F. What is it in Celsius scale ?] [48·9°C]

5. মানবদেহের স্বাভাবিক উষ্ণতা 98·4°F। সেলসিয়াস স্কেলে উহার মান কত ?

[The normal temperature of human body is 98·4°F. What is its value is Celsius scale ?] [$36\frac{8}{9}$°C]

6. যে-প্রকোষ্ঠে কোন ফারেনহাইট থার্মোমিটারের পাঠ একটি সেলসিয়াস থার্মোমিটারের পাঠের দ্বিগুণ সেই প্রকোষ্ঠের উষ্ণতা কত ?

[What is the temperature of the enclosure in which the reading of Fahrenheit thermometer is double that of a Celsius thermometer ?] [160°C বা, 320°F]

7. যখন উষ্ণতা 0°C তখন একটি ত্রুটিপূর্ণ পারদ থার্মোমিটার 0·5°C পাঠ দেয় এবং যখন উষ্ণতা 100°C তখন উহা পাঠ দেয় 100·8°C। যখন এই ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটার 20°C পাঠ দেয় তখন প্রকৃত পাঠ কত ?

[When the temperature is 0°C ; a faulty mercury thermometer reads 0·5°C and when the temperature is 100°C, it reads 100·8°C. Find the true temperature when this faulty thermometer reads 20°C.] [19·44°C (প্রায়)]

8. যখন ব্যারোমিটারের পাঠ (i) 72 cmHg, (ii) 77·8 cmHg এবং (iii) 73·5 cmHg তখন জল কোন্ উষ্ণতায় ফুটিবে ?

[At what temperature does water boil when the barometer reads (i) 72 cmHg, (ii) 77·8 cmHg and (iii) 73·5 cmHg.)
[(i) 98·52°C, (ii) 100·67°C, (iii) 99·0°C]

9. কোন ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটারের হিমাঙ্ক 0·5° এবং স্ফুটনাঙ্ক 105·5°। যখন এই থার্মোমিটার 52·5° পাঠ দেখায়, তখন সেলসিয়াস স্কেলে উষ্ণতার প্রকৃত মান নির্ণয় কর।

[A faulty thermometer reads 0·5° at the ice point and 105·5° at the steam point. Find the correct temperature in Celsius scale when this faulty termometer reads 52·5°.] (H. S. 1983) [49·52°C]

10. সেলসিয়াস স্কেলে পরম শূন্য উষ্ণতার মান −273°C হইলে ফারেনহাইট স্কেলে ইহার মান নির্ণয় কর।

[If the value of absolute zero in Celsius scale is −273°C, find its value of Fahrenheit scale.] [−459·4°F]

11. কোন একদিন ফারেনহাইট স্কেলে সর্বোচ্চ পাঠ পাওয়া গেল 120·2° ; এই সময় সেলসিয়াস স্কেলে উষ্ণতার পাঠ কী হইবে ?

[The highest temperature on a certain day was observed to be 120·2° in Fahrenheit scale. What would be the corresponding indication in Celsius scale ?] (H. S. 1961) [49°C]

12. সেন্টিগ্রেড থার্মোমিটার যখন 25°C পাঠ দেখাইতেছে তখন ফারেনহাইট থার্মোমিটারের পাঠ কত হইবে ? (ii) কোন বস্তুর উষ্ণতা 25°C বৃদ্ধি পাইলে ফারেনহাইট স্কেলে এই উষ্ণতা বৃদ্ধির মান কত ?

[(i) What is the reading of a Fahrenheit thermometer when a centigrade thermometer reads 25°C ? (ii) The temperature of a body is raised by 25°C. What is the value of this rise of temperatrue in Fahrenheit scale ? (H. S. 1964)

[77°F, 45 ফারেনহাইট ডিগ্রী]

13. "একটি তাপক-সংস্থায় 59°F উষ্ণতায় যে-জল প্রবেশ করে ঐ সংস্থা সেই জলের উষ্ণতা 45 ফারেনহাইট ডিগ্রী বৃদ্ধি করে।" ফারেনহাইট স্কেলের পরিবর্তে উষ্ণতার সেলসিয়াস স্কেল ব্যবহার করিয়া উক্তিটি নূতনভাবে লিখ।

["A heating system produces a rise of temperature of 45 Fahrenheit degrees in water entering the system at 59°F." Rewrite the above statement using Celsius in place of Fahrenheit scale of temperature.]

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

কঠিন পদার্থের প্রসারণ

2.1 রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক : কোন পদার্থের এক ডিগ্রী উষ্ণতা-বৃদ্ধির ফলে ঐ পদার্থের প্রতি একক দৈর্ঘ্য কোন নির্দিষ্ট দিকে যতটুকু প্রসারিত **হয়** তাহাকে ঐ পদার্থের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক (Coefficient of linear expansion) বলা হয়। অর্থাৎ,

$$\text{রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক} = \frac{\text{দৈর্ঘ্যের প্রসারণ}}{\text{প্রাথমিক দৈর্ঘ্য} \times \text{উষ্ণতা-বৃদ্ধি}}$$

গাণিতিক সঙ্কেতের সাহায্যে লেখা যায়, $\alpha = \dfrac{l_t - l_0}{l_0 t}$ ... (2.1)

এখানে α = রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক

$l_t = t°$C উষ্ণতায় আলোচ্য বস্তুটির দৈর্ঘ্য

$l_0 = 0°$C উষ্ণতায় আলোচ্য বস্তুটির দৈর্ঘ্য

অথবা, লেখা যায় যে, $\alpha = \dfrac{l_2 - l_1}{l_1 (t_2 - t_1)}$ ... (2.2)

এখানে, $l_2 = t_2°$C উষ্ণতায় বস্তুটির দৈর্ঘ্য

$l_1 = t_1°$C উষ্ণতায় বস্তুটির দৈর্ঘ্য

সমীকরণ (2.1) হইতে পাই, $l_t = l_0 (1 + \alpha t)$ ... (2.3)

আবার, সমীকরণ (2.2) হইতে পাই, $l_2 = l_1 \{1 + \alpha(t_2 - t_1)\}$ ... (2.4)

2.2 তল-প্রসারণ গুণাঙ্ক : $t_1°$C উষ্ণতায় কোন কঠিন পদার্থের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল s_1 হইলে এবং $t_2°$C উষ্ণতায় উহার পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল s_2 হইলে ঐ পদার্থের

তল-প্রসারণ গুণাঙ্ক, $\beta = \dfrac{\text{ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধি}}{\text{প্রাথমিক ক্ষেত্রফল} \times \text{উষ্ণতা-বৃদ্ধি}}$

বা, $\beta = \dfrac{s_2 - s_1}{s_1(t_2 - t_1)}$ ... (2.5)

সমীকরণ (2.5) হইতে লেখা যায়, $s_2 = s_1 \{1 + \beta(t_2 - t_1)\}$ ... (2.6)

2.3 আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক : অনুরূপভাবে, t_1 ডিগ্রী উষ্ণতায় কোন পদার্থের আয়তন V_1 এবং t_2 ডিগ্রী উষ্ণতায় উহার আয়তন V_2 হইলে ঐ পদার্থের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক,

$\gamma = \dfrac{\text{আয়তন-বৃদ্ধি}}{\text{প্রাথমিক আয়তন} \times \text{উষ্ণতা-বৃদ্ধি}}$ বা, $\gamma = \dfrac{V_2 - V_1}{V_1(t_2 - t_1)}$ ... (2.7)

সমীকরণ (2.7) হইতে লেখা যায়, $V_2 = V_1 \{1 + \gamma(t_2 - t_1)\}$ ... (2.8)

2.4 α, β এবং γ-এর পারস্পরিক সম্পর্ক : কোন পদার্থের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক α, তল-প্রসারণ গুণাঙ্ক β এবং আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক γ-এর পারস্পরিক সম্পর্কটি নিম্নরূপ : $\alpha = \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\gamma}{3}$ ... (2.9)

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 2.1 100 cm দীর্ঘ একটি দণ্ডকে 14°C হইতে 98°C-এ তোলা হইল। যদি ইহাতে দণ্ডটির দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি 0·14 cm হয় তাহা হইলে দণ্ডের উপাদানের দৈর্ঘ্য প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A bar 100 cm long is heated from 14°C to 98°C. If the increase in length be 0·14 cm, find the coefficient of linear expansion of the material of the bar.]

সমাধান : দণ্ডটির প্রাথমিক দৈর্ঘ্য = 100 cm

উষ্ণতা-বৃদ্ধি, $\theta = (98-14) = 84°C$

দণ্ডটির দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি = 0·14 cm

কাজেই, সংজ্ঞানুসারে দণ্ডটির উপাদানের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক,

$$\alpha = \frac{\text{দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি}}{\text{প্রাথমিক দৈর্ঘ্য} \times \text{উষ্ণতা-বৃদ্ধি}} = \frac{0{\cdot}14}{100 \times 84} = 1{\cdot}67 \times 10^{-5}/°C$$

উদাহরণ 2.2 অবাধে প্রসারণ হইতে দিবার জন্য রেলওয়ে লাইনের মধ্যে ফাঁক থাকে। যদি 15°C উষ্ণতায় 76 ft লম্বা ইস্পাতের লাইনে 0·5 ইঞ্চি ফাঁক থাকে তাহা হইলে কোন্ উষ্ণতায় রেললাইনগুলি পরস্পরকে স্পর্শ করিবে? ইস্পাতের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক = $1{\cdot}1 \times 10^{-5}/°C$।

[Railway lines are laid with gaps in order to allow for expansion. If the gap between steel lines 76 ft long is 0·5 inches at 15°C; at what temperature will the lines touch? The coefficient of linear expansion of steel = $1{\cdot}1 \times 10^{-5}/°C$.]

সমাধান : মনে করি, যে-উষ্ণতায় রেললাইনগুলি প্রসারিত হইয়া পরস্পরকে স্পর্শ করে সেই উষ্ণতার মান = $\theta°C$

কাজেই, 15°C উষ্ণতা হইতে $\theta°C$ উষ্ণতায় আসিতে প্রতিটি রেললাইনের প্রসারণ = 0·5 ইঞ্চি = 0·5/12 ft

$$\text{সংজ্ঞানুসারে, ইস্পাতের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক} = \frac{\text{দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি}}{\text{প্রাথমিক দৈর্ঘ্য} \times \text{উষ্ণতা-বৃদ্ধি}}$$

$$\text{বা, } 1{\cdot}1 \times 10^{-5} = \frac{0{\cdot}5/12}{76 \times (\theta - 15)} \quad \text{বা, } \theta - 15 = \frac{0{\cdot}5}{12 \times 76 \times 1{\cdot}1 \times 10^{-5}}$$

$$= 46{\cdot}84 \quad \text{বা, } \theta = 64{\cdot}84°C$$

উদাহরণ 2.3 একটি কাচের দণ্ডকে একটি দস্তার স্কেলের সাহায্যে মাপিয়া ইহার দৈর্ঘ্য 1 m বলিয়া মনে হইল। এই সময় উভয়ের উষ্ণতা ছিল 20°C। যদি স্কেলটি 0°C উষ্ণতায় নির্ভুল হয় তাহা হইলে 0°C উষ্ণতায় কাচের দণ্ডটির প্রকৃত দৈর্ঘ্য কত হইবে? দস্তার $\alpha = 2{\cdot}8 \times 10^{-5}/°C$ এবং কাচের $\alpha = 8{\cdot}5 \times 10^{-6}/°C$।

[A glass rod when measured with a zinc scale, both being at 20°C appears to be 1 m long. If the scale is correct at 0°C,

what is the true length of the glass rod at 0°C ? (α for zinc$=2{\cdot}8\times10^{-5}/°C$ and α for glass$=8{\cdot}5\times10^{-6}/°C$.]

সমাধান : দস্তার স্কেলটি 0°C উষ্ণতায় সঠিক সময় দেয়। কাজেই, যখন উহা 20°C উষ্ণতায় আছে তখন উহার আপাত-দৈর্ঘ্য অপেক্ষা উহার প্রকৃত দৈর্ঘ্য বেশি হইবে। এই সময় ইহার প্রতিটি সেন্টিমিটার ঘরের প্রকৃত দৈর্ঘ্য

$$(1+2{\cdot}8\times10^{-5}\times20)\text{ cm}=1{\cdot}00056\text{ cm}$$

কাজেই, যে-দৈর্ঘ্যের আপাত-পাঠ 1 m বা, 100 cm উহার প্রকৃত দৈর্ঘ্য,

$$l_1=100\times(1{\cdot}00056)=100{\cdot}056\text{ cm}$$

ইহাই 20°C উষ্ণতায় কাচের দণ্ডের প্রকৃত দৈর্ঘ্য।

সুতরাং, 0°C উষ্ণতায় কাচের দণ্ডটির প্রকৃত দৈর্ঘ্য

$$=\frac{100{\cdot}056}{1+8{\cdot}5\times10^{-6}\times20}=\frac{100{\cdot}056}{1+170\times10^{-6}}$$

$$=100{\cdot}056\,(1+170\times10^{-6})^{-1}=100{\cdot}056\,(1-0{\cdot}000170)$$

$$=100\,(1+0{\cdot}00056)\,(1-0{\cdot}000170)$$

$$=100\,(1+0{\cdot}00056-0{\cdot}000170)$$ ['বলবিজ্ঞান'-অংশের প্রথম পরিচ্ছেদের 8 নং পৃষ্ঠার সমীকরণ (vi) দ্রষ্টব্য]

$$=100\,(1{\cdot}00039)$$

$$=100{\cdot}039\text{ cm}$$

উদাহরণ 2.4 ফ্রান্সের ইফেল মিনারের উচ্চতা 335 m। শীতকালে ইহার সর্বনিম্ন উষ্ণতা 0°F এবং গ্রীষ্মকালে ইহার সর্বোচ্চ উষ্ণতা 100°F। মিনারটি ইস্পাতের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $12\times10^{-6}/°C$ হইলে শীতকাল হইতে গ্রীষ্মকালে ইহার উচ্চতা কতটা বেশি হইবে ?

[The Eiffel tower in France is 335 m high. Its extreme temperature rises from 0°F in winter to 100°F in summer. The tower is made of steel of coefficient of linear expansion $12\times10^{-6}/°C$. How taller is the tower in summer than in winter ?]

সমাধান : সেলসিয়াস স্কেলে ইস্পাতের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$=12\times10^{-6}/°C$

কাজেই, ফারেনহাইট স্কেলে রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$=12\times10^{-6}\times\frac{5}{9}/°F$

ইফেল মিনারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি$=l_0\times\alpha\times(\theta_2-\theta_1)$

$$=335\times12\times10^{-6}\times\tfrac{5}{9}\times(100-0)\text{ m}=\tfrac{335}{3}\times\tfrac{4\cdot5}{}\times10^{-4}\text{ m}$$

$$=0{\cdot}223\text{ m}=22{\cdot}3\text{ cm}$$

উদাহরণ 2.5 0°C উষ্ণতায় 5·01 cm ব্যাসবিশিষ্ট একটি লোহার গোলক একটি পিতলের আংটার উপর স্থাপিত আছে। একই উষ্ণতায় পিতলের আংটার আভ্যন্তরীণ ঠিক ব্যাস 5 cm। উভয়কে কোন্ উষ্ণতা পর্যন্ত উত্তপ্ত করিলে গোলকটি আংটার মধ্য দিয়া ঠিক গলিয়া যাইবে ? (পিতলের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$=18\times10^{-6}/°C$ এবং লোহার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$=12\times10^{-6}/°C$)।

[A spherical iron ball of diameter 5·01 cm at 0°C rests upon a brass ring. The internal diameter of the brass ring at the same temperature is exactly 5 cm. To what temperature must both

be heated in order that the ball may just pass through the ring ? (Coefficient of linear expansion of brass$=18\times10^{-6}/°C$ and that of iron$=12\times10^{-6}/°C$.)]

সমাধান ঃ মনে করি, নির্ণেয় উষ্ণতা$=\theta°C$

$\theta°C$ উষ্ণতায় লোহার গোলকের ব্যাস$=5{\cdot}01\times(1+12\times10^{-6}\times\theta)$ এবং $\theta°C$ উষ্ণতায় পিতলের আংটার ব্যাস$=5\times(1+18\times10^{-6}\times\theta)$

$\theta°C$ উষ্ণতায় গোলকটি ঠিক আংটার মধ্য দিয়া গলিয়া যায় বলিয়া লেখা যায়,

$$5{\cdot}01\times(1+12\times10^{-6}\times\theta)=5\times(1+18\times10^{-6}\times\theta)$$

বা, $\theta(5\times18-5{\cdot}01\times12)\times10^{-6}=(5{\cdot}01-5)$

বা, $\theta=\dfrac{0{\cdot}01}{(90-60{\cdot}12)}\times10^{6}/°C=\dfrac{10^{4}}{29{\cdot}88}=333{\cdot}3°C$

উদাহরণ 2.6 30 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি লোহার চোঙ 0°C উষ্ণতায় পারদের মধ্যে উলম্বভাবে ভাসিতেছে। যদি উষ্ণতা বৃদ্ধি করিয়া 100°C করা হয় তাহা হইলে চোঙের নিমজ্জিত অংশের দৈর্ঘ্য কতটা বাড়িবে ? (0°C উষ্ণতায় পারদ ও লোহার ঘনত্ব যথাক্রমে 13·6 g/cm ও 7·6 g/cm^3 এবং পারদ ও লোহার প্রকৃত আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক যথাক্রমে $1{\cdot}8\times10^{-4}/°C$ ও $3{\cdot}3\times10^{-5}/°C$)

[An iron cylinder of length 30 cm floats vertically in mercury at 0°C. If the temperature is increased to 100°C, what will be the increase of the length of the immersed portion of the cylinder ? (The densities of mercury and iron are 13·6 g/cm^3 and 7·6 g/cm^3, and the coefficient of real expansion of mercury and iron are $1{\cdot}8\times10^{-4}/°C$ and $3{\cdot}3\times10^{-5}/°C$ respectively.)]

সমাধান ঃ মনে করি, 0°C উষ্ণতায় লোহার চোঙের h cm দৈর্ঘ্য পারদে নিমজ্জিত থাকে। সুতরাং. আর্কিমিডিসের সূত্রানুসারে লেখা যায়

লোহার চোঙের ওজন$=$অপসারিত পারদের ওজন

$$\therefore\quad a\times30\times7{\cdot}6\times g=a\times h\times13{\cdot}6\times g$$

এখানে, $a=$চোঙের প্রস্থচ্ছেদ এবং $g=$অভিকর্ষজ ত্বরণ

$$\therefore\quad h=\frac{30\times7{\cdot}6}{13{\cdot}6}=16{\cdot}77\text{ cm}$$

100°C উষ্ণতায় লোহার ঘনত্ব$=7{\cdot}6\times(1-3{\cdot}3\times10^{-5}\times100)$

$$=7{\cdot}6\times0{\cdot}9967\text{ g/cm}^3$$

100°C উষ্ণতায় চোঙের দৈর্ঘ্য$=13{\cdot}6\times(1-1{\cdot}8\times10^{-4}\times100)$

$$=13{\cdot}6\times0{\cdot}982\text{ g/cm}^3$$

100°C উষ্ণতার চোঙের দৈর্ঘ্য$=30\times(1+\alpha\times100)$

$$=30\times\left(1+\frac{\gamma}{3}\times100\right)=30\times\left(1+\frac{3{\cdot}3\times10^{-5}}{3}\times100\right)$$

$$=30\times1{\cdot}0011\text{ cm}$$

মনে করি, 100°C উষ্ণতায় লোহার চোঙের h' cm দৈর্ঘ্য পারদে নিমজ্জিত থাকে। এই সময় চোঙের প্রস্থচ্ছেদ α হইলে লেখা যায়,

$$h' \times \alpha \times 13{\cdot}6 \times 0{\cdot}982 = 30 \times 1{\cdot}0011 \times \alpha \times 7{\cdot}6 \times 0{\cdot}9967$$

বা, $$h' = \frac{30 \times 1{\cdot}0011 \times 7{\cdot}6 \times 0{\cdot}9967}{13{\cdot}6 \times 0{\cdot}982} = 17{\cdot}04 \text{ cm}$$

চোঙের নিমজ্জিত অংশের দৈর্ঘ্য পূর্বাপেক্ষা (17·04 – 16·77) বা, 0·27 cm বৃদ্ধি পায়।

উদাহরণ 2.7 t°C উষ্ণতাবিশিষ্ট একটি নিরেট ঘনকের সকল দিকে P মানের সমান চাপ প্রয়োগ করা হইল। এই চাপ প্রয়োগ করিবার পূর্বে ঘনকটির যে-আয়তন ছিল ঘনকের উষ্ণতা কতটা বৃদ্ধি করিলে উহা পুনরায় ঐ আয়তনে আসিবে? (ঘনকের উপাদানের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক α এবং আয়তন-বিকার গুণাঙ্ক B)

[A uniform pressure P is exerted on all sides of a solid cube at temperature t°C. By what amount should the temperature of the cube be raised in order to bring its volume back to the value it had before the pressure was applied? (The coefficient of volume expansion of the cube is α and the bulk modulus of elasticity is B.)]
(I. I. T. Adm. Test, 1978)

সমাধান : মনে করি, ঘনকটির প্রাথমিক আয়তন = V
P মানের চাপের প্রভাবে ইহার আয়তনের হ্রাস = ΔV
কাজেই, আয়তন বিকার গুণাঙ্কের সংজ্ঞানুসারে লেখা যায়,

$$B = \frac{P}{(\Delta V/V)} \qquad \text{বা,} \quad \Delta V = \frac{PV}{B} \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

এখন, ঘনকটির উপাদানের আয়তন-প্রসারণ গুণাঙ্ক = α
Δt উষ্ণতা-বৃদ্ধিতে ঘনকটির আয়তন-বৃদ্ধি ΔV হইলে লেখা যায়,

$$\Delta V = V \times \alpha \times \Delta t \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়,

$$V \times \alpha \times \Delta t = \frac{PV}{B} \qquad \text{বা,} \quad \Delta t = \frac{P}{B\alpha}$$

ইহাই হইল ঘনকের নির্ণেয় উষ্ণতা-বৃদ্ধি।

উদাহরণ 2.8 সকল উষ্ণতায় A এবং B দণ্ডের দৈর্ঘ্যের অন্তর 20 cm হইলে ইহাদের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। A এবং B দণ্ডের উপাদানের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক যথাক্রমে $11{\cdot}6 \times 10^{-6}$/°C এবং $18{\cdot}7 \times 10^{-6}$/°C।

[Two bars A and B differ in length by 20 cm at all temperatures, calculate the lengths of the bars A and B. The coefficients of linear expansion of the elements of A and B are $11{\cdot}6 \times 10^{-6}$/°C and $18{\cdot}7 \times 10^{-6}$/°C respectively.]

সমাধান : A দণ্ডের উপাদানের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক B দণ্ডের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক অপেক্ষা কম বলিয়া B দণ্ডের দৈর্ঘ্য অপেক্ষা A দণ্ডের দৈর্ঘ্য বেশি হইবে।

মনে করি, ঘরের উষ্ণতায় B দণ্ডের দৈর্ঘ্য $=l_0$ cm

কাজেই, ঐ উষ্ণতায় A দণ্ডের দৈর্ঘ্য $=(l_0+20)$ cm

θ°C উষ্ণতা বৃদ্ধি হইলে A দণ্ডের দৈর্ঘ্য $=(l_0+20)\times 11{\cdot}6\times 10^{-6}\times\theta$ cm (i)

একই উষ্ণতা-বৃদ্ধি B দণ্ডের দৈর্ঘ্য $=l_0\times 18{\cdot}7\times 10^{-6}\times\theta$ cm ··· (ii)

এই প্রসারের মান সমান হইলেই সকল উষ্ণতায় উহাদের দৈর্ঘ্যের অন্তর সমান থাকিবে। কাজেই, প্রশ্নের শর্তানুসারে লেখা যায়,

$$l_0\times 18{\cdot}7\times 10^{-6}\times\theta=(l_0+20)\times 11{\cdot}6\times 10^{-6}\times\theta$$

বা, $l_0\times 187=(l_0+20)\times 11{\cdot}6$ বা, $l_0=\dfrac{20\times 11{\cdot}6}{1{\cdot}7}$

$=32{\cdot}68$ cm (প্রায়)

কাজেই, A দণ্ডের দৈর্ঘ্য $(32{\cdot}68+20)$ বা, $52{\cdot}68$ cm এবং B দণ্ডের দৈর্ঘ্য $32{\cdot}68$ cm।

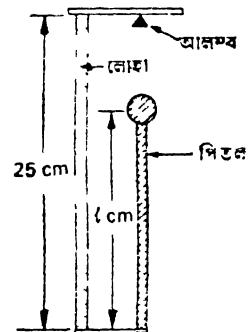
উদাহরণ 2.9 কোন দোলকের আলম্ব হইতে দোলক-পিণ্ডের কেন্দ্রের দূরত্বকে সকল উষ্ণতায় সমান রাখিবার জন্য লোহার ও পিতলের দণ্ডকে 2.1 নং চিত্রের অনুরূপভাবে ব্যবহার করা যায়। যদি 0°C উষ্ণতায় লোহার দৈর্ঘ্য 25 cm হয় তবে ঐ উষ্ণতায় পিতলের দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত হইলে আলম্ব হইতে দোলক-পিণ্ডের কেন্দ্রের দূরত্ব সকল উষ্ণতায় সমান হইবে? (লোহার এবং পিতলের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক যথাক্রমে 12×10^{-6}/°C এবং 19×10^{-6}/°C)

[In order to keep the distance between the fulcrum and the bob centre of a pendulum same at all temperatures, iron and brass may be used as shown in Fig. 2.1. If the iron rod is 25 cm long at 0°C, what must be the length of the brass rod at the same temperature so that the distance between the fulcrum and the bob centre may be same at all temperatures? (Coefficient of linear expansion of iron and brass are 12×10^{-6}/°C and 19×10^{-6}/°C respectively.)]

সমাধান : মনে করি, উভয় দণ্ডের উষ্ণতা θ°C বৃদ্ধি পাইল। এই উষ্ণতা-বৃদ্ধির ফলে উভয় দণ্ডই প্রসারিত হইবে। লোহার দণ্ডের প্রসারণের দরুন দোলক-পিণ্ডের কেন্দ্রটি আলম্ব হইতে দূরে সরিয়া যায়, আবার পিতলের দণ্ডের প্রসারণের জন্য দোলক-পিণ্ডের কেন্দ্র আলম্বের দিকে আগাইয়া যায়। আলম্ব হইতে গোলক-পিণ্ডের কেন্দ্রের দূরত্ব সকল উষ্ণতায় সমান হইতে হইলে উভয় দণ্ডের প্রসারণ সমান হওয়া প্রয়োজন। মনে করি, 0°C উষ্ণতায় পিতলের দণ্ডটির দৈর্ঘ্য $=l$ cm

θ°C উষ্ণতা-বৃদ্ধির ফলে লোহার দণ্ডের দৈর্ঘ্য-বৃদ্ধি

$=25\times 12\times 10^{-6}\times\theta$ ··· (i)

এবং θ°C উষ্ণতা-বৃদ্ধির ফলে পিতলের দণ্ডটির দৈর্ঘ্য-বৃদ্ধি $=l\times 19\times 10^{-6}\times\theta$ ··· (ii)

চিত্র 2.1

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $25 \times 12 \times 10^{-6} \times \theta = l \times 19 \times 10^{-6} \times \theta$

বা, $l = 15{\cdot}8$

কাজেই, পিতলের দণ্ডটির দৈর্ঘ্য $= 15{\cdot}8$ cm

উদাহরণ 2.10 লৌহ-দোলক-নির্মিত একটি ঘড়ি 20°C উষ্ণতার সঠিক সময় রাখে। ইহার উষ্ণতা বাড়িয়া 40°C হইলে ঘড়ি দৈনিক কতক্ষণ স্লো বা ফাস্ট যাইবে ? (লোহার আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক$=0{\cdot}000036/°C$)

[A clock with an irom pendulum keeps correct time at 20°C. How much will it lose or gain a day if the temperature changes to 40°C ? (Coefficient of cubical expansion of iron$=0{\cdot}000036/°C$)]

সমাধান ঃ লোহার আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক, $\gamma = 0{\cdot}000036/°C$

$\therefore$ লোহার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $\alpha = \frac{\gamma}{3} = 0{\cdot}000012/°C$

মনে করি, 20°C উষ্ণতায় দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য l_1 এবং 40°C উষ্ণতায় ইহার কার্যকর দৈর্ঘ্য l_2।

কাজেই, $l_2 = l_1\{1 + \alpha(40 - 20)\}$

বা, $\frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{1 + 0{\cdot}000012 \times 20} = \frac{1}{1{\cdot}00024}$

20°C এবং 40°C উষ্ণতায় ঘড়ির দোলকের দোলনকাল যথাক্রমে T_1 এবং T_2 হইলে লেখা যায়, $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \sqrt{\frac{1}{1{\cdot}00024}}$ ... (i)

উষ্ণতা-বৃদ্ধির ফলে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পায় বলিয়া 40°C উষ্ণতায় দোলকের দোলনকাল বৃদ্ধি পায়, ফলে ঘড়ি স্লো যায়।

মনে করি, ঘড়ি দিনে x s স্লো যায়।

এখন, 1 দিন$= 24 \times 60 \times 60 = 86400$ s

40°C উষ্ণতায় ঘড়ি দৈনিক x s স্লো যায় বলিয়া একদিনে দোলকটির দোলন-সংখ্যা $N = \frac{1}{2}[86400 - x]$

$\therefore$ দোলনকাল, $T_2 = \frac{86400}{\frac{1}{2}(86400 - x)} = \frac{2 \times 86400}{86400 - x}$ s

আবার, $T_1 = 2$ s

কাজেই, $\frac{T_1}{T_2} = \frac{86400 - x}{86400}$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$\frac{86400 - x}{86400} = \sqrt{\frac{1}{1{\cdot}00024}}$ বা, $1 - \frac{x}{86400} = (1 + 0{\cdot}00024)^{-\frac{1}{2}}$

বা, $1-\frac{x}{86400}=1-\frac{1}{2}$ (0·00024) [দ্বিপদ বিস্তারের অন্যান্য পদ উপেক্ষা করিয়া]

বা, $x=-\frac{86400}{2}\times 0{\cdot}00024=10{\cdot}37$ s

অর্থাৎ, ঘড়িটি দৈনিক 10·37 s স্লো যাইবে।

উদাহরণ 2.11 ঘরের উষ্ণতায় 1 mm ব্যাসবিশিষ্ট একটি তামার তারকে একটি লোহার পাতের বৃত্তাকার ছিদ্রের মধ্য দিয়া প্রবেশ করাইতে হইবে। ঘরের উষ্ণতায় এই ছিদ্রের ব্যাস কত হইলে তামার তারের চারিদিকে বলয়াকৃতি উন্মেষ সকল উষ্ণতায় সমান থাকিবে ? তামার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$=17\times10^{-6}K^{-1}$ এবং লোহার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$=12\times10^{-6}K^{-1}$।

[A copper wire of 1 mm diameter at room temperature is to be passed through a circular hole in an iron plate. What must be the diameter of this hole, at room temperature, for the area of the annular aperture surrounding the wire to be constant at all temperatures? Coefficient of linear expansivity of copper $=17\times10^{-6}K^{-1}$, of iron$=12\times10^{-6}K^{-1}$.]

সমাধান ঃ মনে করি, ঘরের উষ্ণতায় লোহার পাতের বৃত্তাকার উন্মেষ বা ছিদ্রের ব্যাস$=d$ mm (চিত্র 2.2)

কাজেই, ঘরের উষ্ণতায় বলয়াকৃতি উন্মেষটির ক্ষেত্রফল

=বৃত্তাকার ছিদ্রের ক্ষেত্রফল – তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল$=\frac{\pi}{4}d^2-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}(d^2-1)$ mm^2

চিত্র 2.2

লোহার পাত এবং তামার তারের উষ্ণতা θ°C বৃদ্ধি পাইলে তারের এবং ছিদ্রের নূতন ব্যাস হইবে যথাক্রমে

$(1+17\times10^{-6}\theta)$ mm এবং

$d(1+12\times10^{-6}\,\theta)$ mm

কাজেই, এই উষ্ণতায় বলয়াকৃতি উন্মেষের ক্ষেত্রফল

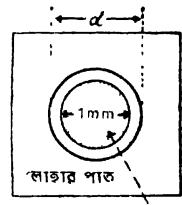
$$=\frac{\pi}{4}d^2(1+12\times10^{-6}\theta)^2-\frac{\pi}{4}(1+17\times10^{-6}\,\theta)^2 \text{ mm}^2$$

$$=\frac{\pi}{4}d^2(1+24\times10^{-6}\theta)-\frac{\pi}{4}(1+34\times10^{-6}\,\theta) \text{ mm}^2$$

$$=\frac{\pi}{4}(d^2-1)+\frac{\pi}{4}(d^2\times24\times10^{-6}\,\theta-34\times10^{-6}\,\theta)$$

কাজেই, সকল উষ্ণতায় বলয়াকৃতি উন্মেষের সমান হইতে হইলে

$$\frac{\pi}{4}(d^2\times24\times10^{-6}\,\theta-34\times10^{-6}\,\theta)=0$$

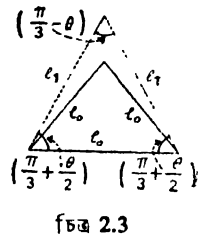
বা, $12d^2-17=0$ বা, $d=\sqrt{\frac{17}{12}}=1{\cdot}19$ mm

উদাহরণ 2.12 θ°C উষ্ণতায় তিনটি দণ্ডের সাহায্যে একটি ত্রিভুজ গঠন করা হইল। দণ্ড তিনটির মধ্যে একটি ইনভারের তৈয়ারী। (ইনভারের তাপীয় প্রসারণ উপেক্ষণীয়) এবং অপর দুইটির উপাদান অভিন্ন। ত্রিভুজটিকে 100°C উষ্ণতায় আনিলে একই উপাদানে গঠিত দণ্ডদ্বয় পরস্পরের সহিত $\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, দণ্ডদ্বয়ের উপাদানের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $\frac{\sqrt{3}}{200}\theta$/°C।

[Three rods form an equilateral tringle at 0°C. The two of the rods are of the same material and the third is of invar (whose thermal expansion may be neglected). If after heating to the steam point, the angle between the identical rods be $(\frac{\pi}{3}-\theta)$, prove that the coefficient of linear expansion of the material of the rod is $\frac{\sqrt{3}}{200}\theta$/°C.] (Joint Entrance, 1976)

সমাধান: মনে করি, 0°C উষ্ণতায় দণ্ডগুলির দৈর্ঘ্য $=l_0$

ইনভারের তাপীয় প্রসারণ উপেক্ষণীয় বলিয়া 100°C উষ্ণতায়ও ইনভারের দণ্ডটির দৈর্ঘ্য l_0 হইবে। কিন্তু উষ্ণতা বাড়িলে অপর দণ্ড দুইটির দৈর্ঘ্য বাড়িবে। 100°C উষ্ণতায় এই দুই দণ্ডের দৈর্ঘ্য $l_1=l_0\,(1+\alpha\times 100)$

এখানে, $\alpha=$ দণ্ড দুইটির উপাদানের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক।

100°C একই উপাদানে গঠিত দণ্ড দুইটির মধ্যবর্তী কোণ $\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$। কাজেই, ইনভার-দণ্ডের সহিত এই দণ্ডদ্বয় উভয়েই $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\theta}{2}\right)$ কোণ উৎপন্ন করিবে (চিত্র 2.3)।

চিত্র 2.3

ত্রিভুজের জ্যামিতিক ধর্মানুসারে লেখা যায়, $\dfrac{l_0}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{l_1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\theta}{2}\right)}$

বা, $$\frac{l_0}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{l_0(1+\alpha\times 100)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

বা, $$[1+100\alpha]\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\theta}{2}\right)$$

বা, $$1+100\alpha)\left[\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta\right]$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\theta}{2}$$

এখন, θ ক্ষুদ্র বলিয়া আমরা লিখিতে পারি, $\sin\theta=\theta$ এবং $\cos\theta=1$

$$\therefore \quad (1+100\alpha)\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\theta}{2}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\theta}{4}$$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\theta}{2}+50\sqrt{3}\alpha-50\theta\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\theta}{4}$ বা, $50\sqrt{3}\alpha=\frac{3}{4}\theta$

[θ এবং α উভয়েই ক্ষুদ্র বলিয়া $50\theta\alpha$ রাশিটিকে উপেক্ষা করা হইয়াছে]

সুতরাং, $\alpha=\frac{3\times\theta}{4\times50\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\theta}{200}/^{\circ}C$

উদাহরণ 2.13 তিনটি সরু দণ্ডকে যুক্ত করিয়া একটি সমবাহু ত্রিভুজাকার ফ্রেম PQR গঠন করা হইল (চিত্র 2.4)। অপর একটি দণ্ড P বিন্দুকে QR-এর মধ্যবিন্দু S-এর সহিত যুক্ত করে। PQ এবং PR দণ্ডের উপাদানের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক α এবং QR দণ্ডের উপাদানের প্রসারণ গুণাঙ্ক β। দেখাও যে, PS দণ্ডের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $\frac{1}{3}(4\alpha-\beta)$ হইলে সামান্য উষ্ণতা-বৃদ্ধির ফলে আলোচ্য সংস্থার বাহুগুলি বাঁকিয়া যাইবার কোন প্রবণতা দেখা যাইবে না।

[Three thin rods are joined together at their ends to form an equilateral frame PQR; another rod connects P to S, the midpoint of QR. The coefficient of linear expansion for the materials of the rods PQ and PR is α and that for QR is β. Show that for a small rise in the temperature of the system there will be no tendency for its sides to buckle provided that the coefficient of linear expansion for the material of the rod PS is $\frac{1}{3}(4\alpha-\beta)$.]

সমাধান : মনে করি, QS এবং SR এর প্রাথমিক দৈর্ঘ্য $=l_0$ (চিত্র 2.4)।

সুতরাং, $PQ=PR=2l_0$ ($\triangle PQR$ সমবাহু ত্রিভুজ বলিয়া)

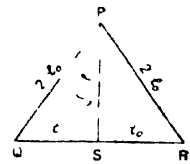
$$PS=\sqrt{PQ^2-QS^2}=\sqrt{3}l_0$$

চিত্র 2.4

মনে করি, PS দণ্ডটির উৎপাদনের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=\gamma$

θ উষ্ণতা-বৃদ্ধি হইলে PQ এর দৈর্ঘ্য $=l_{PQ}=2l_0(1\times\alpha\theta)$

QS-এর দৈর্ঘ্য $=l_{QS}=l_0(1+\beta\theta)$

PS-এর দৈর্ঘ্য $=l_{PS}=\sqrt{3}l_0(1-\gamma\theta)$

উষ্ণতা-বৃদ্ধির পরও PQ এবং PR-এর দৈর্ঘ্য সমান। যদি প্রসারণের পর PS-এর দৈর্ঘ্য এইরূপ হয় যাহাতে S বিন্দুটি QR সরলরেখার উপরে থাকে তবে QR দণ্ডটি P-এর দিকে বা P-বিন্দুর বিপরীত দিকে বাঁকিয়া যাইবে না। এই অবস্থায় $\triangle PQS$ ত্রিভুজটি পূর্ববৎ সমকোণী থাকে বলিয়া পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$l^2_{PQ}=l^2_{PS}+l^2_{QS}$$

l_{PQ}, l_{PS} এবং l_{QS}-এর মান বসাইয়া পাই,

$$[2l_0(1+\alpha\theta)]^2=[l_0(1+\beta\theta)]^2+[\sqrt{3}l_0(1+\gamma\theta)]^2$$

$\therefore\ 4l_0^2(1+2\alpha\theta+\alpha^2\theta^2)$
$=l_0^2\ (1+2\beta\theta+\beta^2\theta^2)+3l_0^2\ (1+2\gamma\theta+\gamma^2\theta^2)$
$\alpha^2\theta^2$, $\beta^2\theta^2$ এবং $\gamma^2\theta^2$—এই পদগুলিকে উপেক্ষা করিয়া লেখা যায়,
$4(1+2\alpha\theta)=1+2\beta\theta+3\ (1+2\gamma\beta)$ বা, $\gamma=\frac{1}{3}\ (4\alpha-\beta)$

প্রশ্নমালা 2

1. 10°C উষ্ণতায় পর পর দুইটি রেল লাইনের মধ্যে ফাঁক 0·5 ইঞ্চি। যদি প্রতিটি রেল লাইনের দৈর্ঘ্য 66 ft হয় তবে কোন্ উষ্ণতায় লাইনগুলির ঐ ফাঁক বুজিয়া যাইবে? (লোহার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=11\times10^{-6}$/°C)

[If the gap between two consecutive rails of a railway line, each 66 ft long, is 0·5 inch at 10°C, at what temperature will the two rails just touch? (Coefficient of iron $=11\times10^{-6}$/°C)]

[67·4°C]

2. 20°C উষ্ণতায় একটি ধাতব স্কেলে দাগ কাটা হইয়াছিল। 50°C উষ্ণতায় উহার সাহায্যে মাপিয়া একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্য পাওয়া গেল 40 cm। 50°C উষ্ণতায় দণ্ডটির প্রকৃত দৈর্ঘ্য কত? (স্কেলের উপাদানের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=16\times10^{-6}$/°C)

[A metallic scale was graduated at 20 C. The length of a rod appears to be 40 cm, when measured with the scale at 50°C. What is the actual length of the rod at 50°C? (The coefficient of linear expansion of the material of the scale $=16\times10^{-6}$/°C)]

[40·0192 cm]

3. 0°C উষ্ণতায় একটি প্লাটিনাম তার এবং একটি দস্তার পাত—ইহাদের উভয়ের দৈর্ঘ্য মাপা হইল। ইহাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 251 cm এবং 250 cm। কোন্ উষ্ণতায় ইহাদের দৈর্ঘ্য সমান হইবে এবং এই উষ্ণতায় ইহাদের সাধারণ দৈর্ঘ্যই বা কী হইবে?

প্লাটিনামের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=8{\cdot}6\times10^{-6}$/°C এবং দস্তার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=2{\cdot}6\times10^{-5}$/°C

[The lengths of a platinum wire and a zinc strip were measured at 0°C. Their lengths are 251 cm and 250 cm respectively. At what temperature will their lengths be equal, and what will be their common length at this temperature?

(α for zinc $=2{\cdot}6\times10^{-5}$/°C and α for platinum $=8{\cdot}6\times10^{-6}$/°C]

[230·34°C, 251·497 cm]

4. ধাতুনির্মিত একটি গোলকের ব্যাস 4·03 cm এবং পিতলের একটি চাকতিতে 4 cm ব্যাসবিশিষ্ট একটি ছিদ্র আছে। উভয়ের উষ্ণতা 30°C। গোলকের উষ্ণতা অপরিবর্তিত রাখিয়া প্লেটটিকে কত ডিগ্রী উষ্ণতায় আনিলে গোলকটি চাকতির ছিদ্রের মধ্য দিয়া গলিয়া যাইবে? পিতলের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=18{\cdot}9\times10^{-6}$/°C।

[The diameter of a metal sphere is 4·03 cm and a brass disc

has a hole of diameter 4 cm. Both the sphere and the disc are at 30°C. At what temperature must the plate be raised so that the sphere can just pass through the hole in the disc? The coefficient of linear expansion of brass$=18\cdot9\times10^{-6}$/°C] [428·6°C]

5. 20°C উষ্ণতায় একটি ইস্পাতনির্মিত চোঙের ব্যাসার্ধ 4·0 cm। এই উষ্ণতায় একটি পিতলের পিস্টন উহার মধ্যে লাগাইলে চারিপার্শ্বে 0·1 mm ফাঁক থাকে। কোন্ উষ্ণতায় উহা ঠিকভাবে লাগিবে? (ইস্পাত ও পিতলের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক যথাক্রমে $1\cdot2\times10^{-5}K^{-1}$ এবং $1\cdot9\times10^{-5}K^{-1}$)

[A steel cylinder has a radius of 4·0 cm at 20°C. A brass piston fits into the cylinder leaving an all-round clearance of 0·1 mm at this temperature. At what temperature will the fit be perfect? (The coefficients of linear expansion of steel and brass are $1\cdot2\times10^{-5}K^{-1}$ and $1\cdot9\times10^{-5}K^{-1}$ respectively)] [380°C]

5. যে-ইস্পাতের স্কেল 68°F উষ্ণতায় সঠিক পাঠ দেয় উহার সাহায্যে 50°C উষ্ণতায় একটি পিতলের দণ্ডের দৈর্ঘ্য মাপিয়া 1·5 m পাঠ পাওয়া গেল। 50°C উষ্ণতায় পিতলের দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত? (ইস্পাতের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=11\cdot2\times10^{-6}$/°C)

[The length of a brass rod is seen to be 1·5 m at 50°C, when measured by a steel scale that gives correct reading at 68°F. Find the length of the brass rod at 50°C. (The coefficient of linear expansion of steel$=11\cdot2\times10^{-6}$/°C]

[1·500504 cm]

6. সকল উষ্ণতায় একটি পিতলের দণ্ড এবং একটি লৌহদণ্ডের দৈর্ঘ্যের অন্তর 5 cm হইলে উহাদের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। পিতলের এবং লোহার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক যথাক্রমে $18\times10^{-6}K^{-1}$ এবং $12\times10^{-6}K^{-1}$.]

[Find the lengths of a brass rod and an iron rod such that they have a constant difference of length of 5 cm at all temperatures. Coefficient of linear expansivity of brass and iron are $18\times10^{-6}K^{-1}$ and $12\times10^{-6}K^{-1}$.]

[পিতলের দণ্ডের দৈর্ঘ্য$=10$ cm এবং লোহার দণ্ডের দৈর্ঘ্য$=15$ cm]

7. অবাধে প্রসারিত হইতে দিবার জন্য রেললাইনের মধ্যে ফাঁক থাকে। যদি 10°C উষ্ণতায় 66 ft লম্বা ইস্পাতের লাইনে 0·5 ইঞ্চি ফাঁক থাকে তাহা হইলে কোন্ উষ্ণতায় রেললাইনগুলি পরস্পরকে স্পর্শ করিবে? ইস্পাতের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$=1\cdot1\times10^{-5}$/°C।

[Railway lines are laid with gaps to allow for expansion. If the gap between the steel lines 66 ft long is 0·5 inches at 10°C, at what temperature will the lines touch? The coefficient of linear expansion of steel$=1\cdot1\times10^{-5}$/°C]

[67·39°C (প্রায়)]

8. 120°F উষ্ণতায় একটি ধাতুদণ্ডের দৈর্ঘ্য 50 ft। 40°F উষ্ণতায় ইহার

দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, দণ্ডটির উপাদানের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $12 \times 10^{-6}/°C$।

[A metallic rod is 50 ft long at 120°F. Find its length at 40°F, if the coefficient of linear expansion of the material of the rod is $12 \times 10^{-6}/°C$] [49·75 ft (প্রায়)]

9. একটি পিতলের স্কেল-অনুসারে কোন ব্যারোমিটারের পারদস্তম্ভের উচ্চতা 76·4 cm। স্কেলটি 0°C-উষ্ণতায় সঠিক পাঠ দেয়। যদি পাঠ লইবার সময় উষ্ণতা 30°C হয় তাহা হইলে পারদস্তম্ভের প্রকৃত উচ্চতা কত? (পিতলের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=18 \times 10^{-6}/°C$)

[The length of the mercury column in a barometer is 76·4 cm according to a brass scale which gives correct reading at 0°C. If the temperature at the time of reading the barometer is 30°C, what is the actual height of the mercury column? (The coefficient of linear expansion of brass $=18 \times 10^{-6}/°C$)] [76·44 cm (প্রায়)]

10. একটি প্রতিবিহিত দোলক চারিটি পিতলের দণ্ড এবং পাঁচটি লৌহদণ্ড দ্বারা তৈয়ারী। প্রতিটি লৌহদণ্ডের দৈর্ঘ্য 50 cm হইলে প্রতিটি পিতলের দণ্ডের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। লোহার দৈর্ঘ্য প্রসারণ গুণাঙ্ক $=12 \times 10^{-6}/°C$ এবং পিতলের দৈর্ঘ্য প্রসারণ গুণাঙ্ক $=19 \times 10^{-6}/°C$।

[A compensated pendulum is made of 4 brass rods and 5 iron rods. The length of each iron rod is 50 cm. Find the length of each brass rod. The coefficient of linear expansion of iron $=12 \times 10^{-6}/°C$ and that of brass $=19 \times 10^{-6}/°C$.] [47·37 cm]

11. ইস্পাতনির্মিত একটি ফিতা 0°C উষ্ণতায় সঠিক পাঠ দেয়। 25°C উষ্ণতায় ইহাকে দৈর্ঘ্য মাপিবার জন্য ব্যবহৃত হইল। ইহাতে লব্ধ ফলাফলের শতকরা ত্রুটি কত হইবে? ইস্পাতের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=12 \times 10^{-6}/°C$।

[A steel tape is correct at 0°C. It is used for measuring a length at 25°C. What percentage error will result? The coefficient of linear expansion of steel is $12 \times 10^{-6}/°C$] [0·03%]

12. পিতলের সেকেণ্ড দোলকযুক্ত একটি ঘড়ি 30°C উষ্ণতায় সঠিক সময় দেয়। যদি উষ্ণতা 20°C-এ স্থির থাকে তাহা হইলে ঘড়িটি দিনে কতক্ষণ স্লো বা ফাস্ট যাইবে? পিতলের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=18 \times 10^{-6}/°C$।

[A clock whose brass pendulum beats seconds is correct at 30°C. How many seconds will it lose or gain a day if the temperature is kept constant at 20°C? The coefficient of linear expansion of brass $=18 \times 10^{-6}/°C$.] (C. U. (I. Sc.) 1944)

[ঘড়িটি দিনে 7·78 s (প্রায়) ফাস্ট যাইবে]

13. 15°C উষ্ণতায় একটি ইস্পাত-দণ্ডের দৈর্ঘ্য 90 cm। উহাকে 90°C পর্যন্ত উত্তপ্ত করিলে উহার দৈর্ঘ্য হয় 90·081 cm। ইস্পাতের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The length of a steel rod at 15°C is 90 cm. When it is heated to 90°C, its length becomes 90·081 cm. Find the coefficient of linear expansion of steel.] [12×10^{-6}/°C]

14. 0°C উষ্ণতায় একটি চাকার ব্যাসার্ধ 3 ft এবং একটি লোহার বেড়ের ব্যাসার্ধ 2·992 ft। ন্যূনতম কোন্ উষ্ণতায় ঐ বেড়টি চাকায় পরান যাইবে? (লোহার $\alpha = 12 \times 10^{-6}$/°C)

[At 0°C the radius of a wheel is 3 ft and the radius of an iron hoop is 2·992 ft. At what temperature will the wheel just fit into the hoop? α for iron is 12×10^{-6}/°C.] [222·8°C]

15. 0°C উষ্ণতায় একটি লৌহদণ্ড এবং একটি দস্তা-দণ্ডের দৈর্ঘ্য 2 m। 50°C উষ্ণতায় তুলিলে লৌহদণ্ড অপেক্ষা দস্তা-দণ্ডের 0·181 cm বেশি দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি হয়। যদি দস্তার দৈর্ঘ্য-প্রসারণ গুণাঙ্ক $29{\cdot}8 \times 10^{-6}$/°C হয় তাহা হইলে লোহার দৈর্ঘ্য-প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The length of each of an iron rod and a zinc rod is 2 m at 0°C. When raised to a temperature of 50°C, the zinc rod is seen to expand by 0·181 cm more than the iron rod. If the coefficient of linear expansion of zinc is $29{\cdot}8 \times 10^{-6}$/°C, find the coefficient of linear expansion of iron.] [$11{\cdot}7 \times 10^{-6}$/°C]

16. লোহার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $11{\cdot}7 \times 10^{-6}$/°C। একটি লোহার ব্লকের উষ্ণতা কতটা বৃদ্ধি করিলে উহার আয়তন 1% বৃদ্ধি পাইবে?

[The coefficient of linear expansion of iron is $11{\cdot}7 \times 10^{-6}$/°C. By how much the temperature of a block of iron is to be raised in order to increase its volume by 1%] [285°C (প্রায়)]

17. 29·95 cm আভ্যন্তরীণ ব্যাসবিশিষ্ট লৌহনির্মিত একটি রিং-কে 30 cm ব্যাসবিশিষ্ট একটি কাঠের চোঙে পরাইতে হইবে। রিংটির উষ্ণতা-বৃদ্ধি কত হইলে ইহা কোনক্রমে সম্ভব হইবে? লোহার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$=0{\cdot}000012$ K^{-1}।

[An iron ring of internal diameter 29·95 cm is to be fitted on a wooden cylinder of diameter 30 cm. Find the range of temperature through which the ring must be heated in order that this is just possible. Coefficient of linear expansion of iron$=0{\cdot}000012$ K^{-1}.] [139·1°C]

18. 20 mm × 25 mm ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ইস্পাত-দণ্ডকে উত্তপ্ত করিয়া 20°C হইতে 100°C উষ্ণতায় আনা হইল। যদি ইহাকে প্রসারিত হইতে না দেওয়া হয় তাহা হইলে উহাতে কী বলের উদ্ভব হইবে? ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক $2{\cdot}0 \times 10^{11}$ N/m², ইস্পাতের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $1{\cdot}2 \times 10^{-5}$ K^{-1}।

[A steel rod of cross-section 20 mm × 25 mm is heated from 20°C to 100°C. What force is set up if it is prevented from expanding? Young's modulus for steel is $2{\cdot}0 \times 10^{11}$ N/m², the coefficient of linear expansion steel is $1{\cdot}2 \times 10^{-5}$ K^{-1}.] [$9{\cdot}6 \times 10^{4}$ N]

19. 15°C উষ্ণতায় একটি পিতলের ঘনকের একটি ধারের দৈর্ঘ্য 10 cm। 60°C উষ্ণতায় ইহার প্রতিটি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল এবং ইহার আয়তন কত হইবে? (পিতলের $\alpha = 19\cdot1 \times 10^{-6}/°C$)

[A brass cube has an edge 10 cm long at 15°C. What will be the area of each of its face and its volume at 60°C ? (α of brass $= 19\cdot1 \times 10^{-6}/°C$] [$100\cdot1719$ cm^2, $1002\cdot5780$ cm^3]

20. 59°F হইতে দস্তার একটি দণ্ডের উষ্ণতাকে বাড়াইয়া 100°C-এ আনা হইল। ইহাতে দস্তাটির দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধি হইল 0·5 cm। দস্তার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $2\cdot9 \times 10^{-5}/°C$ হইলে দস্তার দণ্ডটির প্রাথমিক দৈর্ঘ্য কত?

[The temperature of a zinc rod is increased from 59°F to 100°C. This causes an increase in length of the rod by 0·5 cm. If the coefficient of linear expansion of zinc is $2\cdot9 \times 10^{-5}/°C$, find the initial length of the rod.] (H. S. 1960) [202·9 cm]

21. 30 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি লোহার চোঙ 0°C উষ্ণতায় পারদের মধ্যে খাড়াভাবে ভাসিতেছে। যদি উষ্ণতা বৃদ্ধি করিয়া 100°C করা হয় তাহা হইলে চোঙের নিমজ্জিত অংশের দৈর্ঘ্য কতটা বাড়িবে? 0°C উষ্ণতায় পারদ ও লোহার ঘনত্ব যথাক্রমে $13\cdot6$ g/cm^3 এবং $7\cdot6$ g/cm^3 এবং পারদ ও লোহার প্রকৃত আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক যথাক্রমে $1\cdot8 \times 10^{-4}/°C$ এবং $3\cdot3 \times 10^{-5}/°C$।

[An iron cylinder of length 30 cm is floating vertically in mercury at 0°C. What will be the increase in length of the immersed portion, if the temperature is increased to 100°C ? The densities of mercury and iron are $13\cdot6$ g/cm^3 and $7\cdot6$ g/cm^3 respectively and the coefficients of real expansion of mercury and iron are $1\cdot8 \times 10^{-4}/°C$ and $3\cdot3 \times 10^{-5}/°C$ respectively.] [0·27 cm]

22. সকল উষ্ণতায় একটি ইস্পাত-দণ্ডের দৈর্ঘ্য একটি তামার দণ্ডের দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 5 cm বেশি হইলে 0°C উষ্ণতায় উহাদের দৈর্ঘ্য কত হইবে? তামার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$= 1\cdot7 \times 10^{-5}/°C$ এবং লোহার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$= 1\cdot1 \times 10^{-5}/°C$।

[What should be the lengths of a steel rod and a copper rod at 0°C so that the length of the steel rod is 5 cm longer than the copper rod at any temperature ? The coefficient of linear expansion of copper$= 1\cdot7 \times 10^{-5}/°C$ and the coefficient of linear expansion for iron$= 1\cdot1 \times 10^{-5}/°C$.] (I. I. T. Adm. Test, 1957)

[$9\frac{1}{6}$ cm, $14\frac{1}{6}$ cm]

23. দেখাও যে, যদি কোন প্রাথমিক উষ্ণতায় দুইটি বিভিন্ন কঠিন পদার্থের তৈয়ারী দণ্ডের দৈর্ঘ্য উহাদের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্কের ব্যস্তানুপাতিক হয় তাহা হইলে সকল উষ্ণতায় উহাদের দৈর্ঘ্যের পার্থক্য সমান থাকিবে।

[Show that if the lengths of two rods of different solids are inversely proportional to their respective coefficient of linear expansion at some initial temperature, the difference in their length will remain constant at all temperatures.]

24. প্রমাণ কর যে, উষ্ণতার $\triangle T$ পরিবর্তন হইলে ঘনত্ব ρ-এর পরিবর্তন হইবে $\Delta\rho = -\gamma\rho\Delta T$,

এখানে γ হইল আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক। ঋণাত্মক চিহ্নটির তাৎপর্য ব্যাখ্যা কর।

[Prove that the change in density with the change in temperature $\triangle T$ is given by $\angle\rho = -\gamma\rho\triangle T$

where γ is the volume coefficient of expansion. Explain the signification of the minus sign.]

25. দেখাও যে, অতি ক্ষুদ্র রাশি উপেক্ষা করিলে $\triangle T$ উষ্ণতা-বৃদ্ধির দরুন কোন কঠিন পদার্থের আয়তন-বৃদ্ধি

$\triangle V = 3 \alpha V \triangle T$, এখানে α হইল রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক।

[Show that, if we neglect extremely small quantities, the change in volume of a solid on expansion through a temperature rise $\triangle T$ is given by $\triangle V = 3\alpha V\triangle T$, where α is the coefficient of linear expansion.]

26. ধরিয়া লও যে, একটি কাচনির্মিত পারদ-থার্মোমিটারের কৈশিক নলের ক্ষেত্রফল A_0-এর মান স্থির আছে এবং 0°C উষ্ণতায় ইহার পারদ-কুণ্ডের আয়তন V_0। যদি 0°C উষ্ণতায় পারদ-কুণ্ডটিকে ঠিক ভর্তি করে তাহা হইলে দেখাও যে, θ°C উষ্ণতায় কৈশিক নলের পারদ স্তম্ভের দৈর্ঘ্য

$$l = \frac{V_0}{A_0}(\gamma - 3\alpha)\,\theta.$$

এখানে γ হইল পারদের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক এবং α হইল কাচের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক।

[Assume that the cross-section of the capillary of a mercury-in-glass thermometer is constant at A and that the volume of its bulb of mercury at 0°C is V_0. If the mercury just fills the bulb at 0°C, show that the length of the mercury column in the capillary at θ°C is

$$l = \frac{V_0}{A}(\gamma - 3\alpha)\,\theta$$

where γ is the coefficient of cubical expansion of mercury and α is the linear expansion of glass.]

তৃতীয় পরিচ্ছেদ
তরল পদার্থের প্রসারণ

3.1 তরলের প্রকৃত ও আপাত প্রসারণ গুণাঙ্কের সম্পর্ক : যদি কোন তরলের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক γ, আপাত প্রসারণ গুণাঙ্ক γ' এবং আধারের উপাদানের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক γ_g হয় তাহা হইলে লেখা যায়,

$$\gamma = \gamma' + \gamma_g \qquad (3.1)$$

3.2 উষ্ণতার সহিত কোন তরলের ঘনত্বের পরিবর্তন : t_1°C এবং t_2°C উষ্ণতায় কোন তরলের ঘনত্ব যথাক্রমে ρ_1 এবং ρ_2 হইলে লেখা যায়,

$$\rho_1=\rho_2\{1+\gamma(t_2-t_1)\}$$

এখানে, γ হইল তরলের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক।

কাজেই লেখা যায়, $\gamma=\dfrac{\rho_1-\rho_2}{\rho_2(t_2-t_1)}$ ... (3.2)

3.3 ভার-থার্মোমিটারের সাহায্যে γ'-নির্ণয়ের সমীকরণ : ভার থার্মোমিটারের কুণ্ডে t_1°C উষ্ণতায় যে-পরিমাণ তরল থাকে তাহার ভর যদি M_1 হয় এবং t_2°C$(t_2>t_1)$ উষ্ণতায় উহাতে যে-পরিমাণ তরল থাকে তাহার ভর যদি M_2 হয় তাহা হইলে দেখান যায় যে, তরলের আপাত-প্রসারণ গুণাঙ্ক,

$$\gamma'=\frac{M_1-M_2}{M_2\times(t_2-t_1)} \quad \cdots \quad (3.3)$$

$$=\frac{\text{যে-পরিমাণ তরল বাহির হইয়া যায় উহার ভর}}{\text{অবশিষ্ট তরলের ভর}\times\text{উষ্ণতা-বৃদ্ধি}} \quad \cdots \quad (3.4)$$

3.4 ডুলোঁ ও পেতির পদ্ধতিতে γ' নির্ণয়ের সমীকরণ : ঠাণ্ডা ও উষ্ণ বাহুর তরলস্তম্ভের উচ্চতা যথাক্রমে h_1 এবং h_2 হইলে তরলের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক,

$$\gamma'=\frac{h_2-h_1}{h_1(t_2-t_1)} \quad \cdots \quad (3.5)$$

$$=\frac{\text{দুই তরলস্তম্ভের দৈর্ঘ্যের পার্থক্য}}{\text{ঠাণ্ডা তরলস্তম্ভের দৈর্ঘ্য}\times\text{উষ্ণতার পার্থক্য}} \quad \cdots \quad (3.6)$$

3.5 বিভিন্ন উষ্ণতার তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় বস্তুর ওজনের আপাত-হ্রাস : মনে করি, বায়ুতে কোন কঠিন পদার্থের ওজন W_0 এবং θ_1°C উষ্ণতাবিশিষ্ট কোন তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় ইহার আপাত ওজন W_1। কাজেই, বস্তুটির ওজনের আপাত-হ্রাস, $w_1=(W_1-W_0)$

θ_1°C উষ্ণতায় কঠিন বস্তুটির আয়তন V_1 এবং তরলটির ঘনত্ব ρ_1 হইলে লেখা যায়, $w_1=V_1\rho_1 g$ ... (i)

অনুরূপভাবে, ধরা যাক্ যে, θ_2°C উষ্ণতাবিশিষ্ট তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় বস্তুটির আপাত ওজন W_2। কাজেই, এই সময় বস্তুটির ওজনের আপাত-হ্রাস $=(W_2-W_0)=w_2$ (ধরি)।

যদি θ_2°C উষ্ণতায় বস্তুটির আয়তন V_2 হয় এবং তরলের ঘনত্ব ρ_2 হয় তাহা হইলে, $w_2=V_2\rho_2 g$ ... (ii)

যদি তরলের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক γ_r হয় এবং কঠিনের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক γ হয় তাহা হইলে, $\rho_1=\rho_2(1+\gamma_r\theta)$ ... (iii)

এবং $V_2=V_1(1+\gamma\theta)$ ... (iv)

এখানে $(\theta_2-\theta_1)$-কে θ ধরা হইয়াছে।

কাজেই সমীকরণ (ii) হইতে পাই, $w_2=V_2\rho_2 g$

$=V_1(1+\gamma\theta)\rho_1(1+\gamma_r\theta)^{-1}g$

$=V_1\rho_1 g(1+\gamma\theta)(1-\gamma_r\theta)$ [অন্যান্য পদ উপেক্ষা করিয়া]

$=w_1\{1-(\gamma_r-\gamma)\theta\}$ [$\gamma\gamma_r\theta^2$ উপেক্ষা করিয়া] (3.7)

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 3.1 0°C উষ্ণতায় পারদের ঘনত্ব 13·6 g/cm³ এবং 100°C উষ্ণতায় ইহার ঘনত্ব 13·35 g/cm³। পারদের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The density of mercury at 0°C is 13·6 g/cm³ and at 100°C is 13·35 g/cm³. Find the coefficient of real expansion of mercury.]

সমাধান : 0°C উষ্ণতায় পারদের ঘনত্ব, $\rho_0=13{\cdot}6$ cm³

এবং 100°C উষ্ণতায় পারদের ঘনত্ব, $\rho_{100}=13{\cdot}35$ g/cm

পারদের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক γ হইলে লেখা যায়,

$$\rho_0=\rho_{100}\{1+\gamma\times(100-0)\}$$

$$\therefore\ \gamma=\frac{\rho_0-\rho_{100}}{\rho_{100}\times100}=\frac{13{\cdot}6-13{\cdot}35}{13{\cdot}35\times100}=\frac{0{\cdot}25}{13{\cdot}35\times100}$$

$$=18{\cdot}7\times10^{-5}/°C$$

উদাহরণ 3.2 0°C উষ্ণতায় কোন তরলের 60 cm উচ্চতাবিশিষ্ট স্তম্ভ যে-চাপ প্রয়োগ করে 100°C উষ্ণতায় ঐ তরলের 65 cm উচ্চতাবিশিষ্ট স্তম্ভ সেই চাপ প্রয়োগ করে। তরলটির প্রকৃত-প্রসারণ গুণাঙ্কের মান নির্ণয় কর।

[The pressure exerted by a column of liquid of height 65 cm at 100°C is the same as the pressure exerted by the same liquid of height 60 cm at 0°C. Calculate the coefficient of real expansion of liquid.]

সমাধান : মনে করি, 0°C উষ্ণতায় তরলটির ঘনত্ব $=\rho_0$

এবং 100°C উষ্ণতায় তরলটির ঘনত্ব $=\rho_{100}$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, ρ_0 ঘনত্ববিশিষ্ট তরলের 60 cm উচ্চতাবিশিষ্ট স্তম্ভের চাপ $=\rho_{100}$ ঘনত্ববিশিষ্ট তরলের 65 cm উচ্চতাবিশিষ্ট স্তম্ভের চাপ

অর্থাৎ, $60\times\rho_0\times g=65\times\rho_{100}\times g$

এখানে, g হইল অভিকর্ষজ ত্বরণ

বা, $\rho_0=\rho_{100}\times\frac{65}{60}$ (i)

কিন্তু আমরা জানি যে, তরলের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক γ হইলে,

$\rho_0=\rho_{100}(1+100\gamma)$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়,

$1+100\gamma=\frac{65}{60}\quad\therefore\ \gamma=\frac{65-60}{60\times100}=8{\cdot}33\times10^{-4}/°C$

উদাহরণ 3.3 ডুলোঁ ও পেতির পরীক্ষায় শীতল ও উষ্ণ তরলস্তম্ভের উচ্চতা যথাক্রমে 90 cm এবং 91·6 cm। যদি প্রথম তরলস্তম্ভের উষ্ণতা 1°C হয় তাহা

হইলে অপর তরলস্তম্ভের উষ্ণতা নির্ণয় কর। (তরলটির প্রকৃত আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক$=18\times10^{-6}/°C$)

[In a Dulong and Petit's experiment, the heights of the cold and hot liquid columns are found to be 90 cm and 91·6 cm respectively. If the first column is at 1°C, find the temperature of the other. (Coefficient of real expansion of the liquid is $18\times10^{-6}/°C$)]

সমাধান : মনে করি, উষ্ণ তরলস্তম্ভটির উষ্ণতা$=\theta°C$

দুই তরলস্তম্ভের উচ্চতার পার্থক্য$=(91·6-90)=1·6$ cm

শীতলতর তরলস্তম্ভের উচ্চতা$=90$ cm

আমরা জানি যে, তরলের আপাত প্রসারণ গুণাঙ্ক=

$$\frac{\text{তরলস্তম্ভদ্বয়ের উচ্চতার পার্থক্য}}{\text{শীতল তরলস্তম্ভের উচ্চতা}\times\text{উষ্ণতার পার্থক্য}}$$

$\therefore\quad 18\times10^{-5}=\dfrac{1·6}{90\times(\theta-1)}$ বা, $\theta-1=\dfrac{1·6}{90\times18\times10^{-6}}=98·8$

অর্থাৎ, উষ্ণ তরলস্তম্ভের উষ্ণতা, $\theta=98·8°C$

উদাহরণ 3.4 একটি পারদপূর্ণ কাচ থার্মোমিটারের কুণ্ডের আয়তন 1 cm^3। ইহাতে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস দাগের দৈর্ঘ্য 1 mm হইবে এইরূপ স্থির করা হইল। ব্যবহৃত কৈশিক নলটির প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। পারদের আপাত প্রসারণ গুণাঙ্ক$=0·00016/°C$।

[A mercury-in-glass thermometer has a bulb 1 cm^3 in capacity. It is desired to make each Celsius degree 1 mm long on the scale. Calculate the area of cross-section of the capillary tube used. Coeffieient of apparent expansion of mercury$=0·00016/°C$.]

সমাধান : মনে করি, কৈশিক নলের ক্ষেত্রফল$=\alpha$ cm^2

প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস উষ্ণতা-বৃদ্ধির দরুন পারদের প্রসারণ$=\alpha\times0·1$

$=0·1\alpha cm^3$

পারদকুণ্ডের আয়তন$=1$ cm^3

এখন, পারদের আপাত প্রসারণ

=পারদের আয়তন × পারদের আপাত প্রসারণ গুণাঙ্ক × উষ্ণতা-বৃদ্ধি

$\therefore\quad 0·1\alpha=1\times0·00016\times1$

কাজেই, $\alpha=0·0016$ $cm^2=0·16$ mm^2

উদাহরণ 3.5 একটি ফ্লাস্কের আভ্যন্তরীণ আয়তন 720 cm^3। উহার মধ্যে কতখানি পারদ রাখিলে বাকি অংশের আয়তন উষ্ণতার পরিবর্তনে অপরিবর্তিত থাকিবে? পারদের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক$=1·8\times10^{-4}/°C$ এবং কাচের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক$=2·5\times10^{-5}/°C$।

[The internal volume of a glass flask is 720 cm³. What volume of mercury must be kept inside the flask so that the rest of its volume does not change with the change of temperature? The coefficient of real expansion $=1{\cdot}8\times10^{-4}/°C$ and the coefficient of cubical expansion of glass is $2{\cdot}5\times10^{-5}/°C$.]

সমাধান ঃ উষ্ণতা বাড়িলে কাচের পাত্রের আয়তন বাড়ে। ফলে পারদশূন্য অংশের আয়তনও বাড়িয়া যায়। কিন্তু পারদের প্রসারণের ফলে পারদশূন্য অংশের আয়তন কমে। সুতরাং, কাচের ফ্লাস্কের আয়তন-প্রসারণ পারদের প্রসারণের সমান হইলে সকল উষ্ণতায় ফ্লাস্কের পারদশূন্য অংশের আয়তন সমান হইবে।

মনে করি, পারদের আয়তন $=V$ cm³

সুতরাং, t°C উষ্ণতা-বৃদ্ধির দরুন উহার আয়তনের প্রসারণ

$$=V\times1{\cdot}8\times10^{-4}\times t \text{ cm}^3 \quad \cdots \quad (i)$$

t°C উষ্ণতা-বৃদ্ধির দরুন কাচের পাত্রের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক

$$=720\times\gamma\times t=720\times2{\cdot}5\times10^{-5}\times t \text{ cm}^3 \quad \cdots \quad (ii)$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $V\times1{\cdot}8\times10^{-4}\times t=720\times2{\cdot}5\times10^{-5}\times t$

বা, $V=100$ cm³

উদাহরণ 3.6 একটি নিমজ্জক সিলিকন (যাহার প্রসারণ উপেক্ষণীয়) দ্বারা তৈয়ারী। বায়ুতে ইহার ওজন 110·505 g-wt। 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট জলে ইহার আপাত ওজন 60·515 g-wt এবং 50°C উষ্ণতাবিশিষ্ট জলে ইহার আপাত ওজন 61 g-wt। 0°C এবং 50°C উষ্ণতার মধ্যে জলের গড় আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A sinker made of silica (whose expansion is negligible) weighs 110·505 g-wt in air. Its apparent weight in water at 0°C is 60·515 g-wt and in water at 50°C is 61 g-wt. Find the mean coefficient of expansion of water between 0°C and 50°C.]

সমাধান ঃ মনে করি, নিমজ্জকটির আয়তন $=V$ cm³

প্রশ্নের শর্তানুসারে, V cm³ আয়তন 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট জলের ওজন

$$=(110{\cdot}505-60{\cdot}515)=49{\cdot}99 \text{ g-wt}$$

$\therefore$ 0°C উষ্ণতায় জলের ঘনত্ব, $\rho_0=\dfrac{49{\cdot}99}{V}$ g/cm³

V cm³ আয়তন 50°C উষ্ণতাবিশিষ্ট জলের ওজন

$$=(110{\cdot}505-61)=49{\cdot}505 \text{ g-wt}$$

$\therefore$ 50°C উষ্ণতায় জলের ঘনত্ব, $\rho_{50}=\dfrac{49{\cdot}505}{V}$ g/cm³

0°C হইতে 50°C উষ্ণতার মধ্যে জলের গড় আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক γ হইলে

$\rho_0=\rho_{50}(1+\gamma\times50)$ বা, $\dfrac{49{\cdot}99}{V}=\dfrac{49{\cdot}505}{V}(1+\gamma\times50)$

বা, $\dfrac{49{\cdot}99}{49{\cdot}505}=1+\gamma\times50$ বা, $\dfrac{0{\cdot}485}{49{\cdot}505}=\gamma\times50$

বা, $\gamma = 1{\cdot}96 \times 10^{-4}/°C$

অতএব, জলের গড় আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক $= 1{\cdot}96 \times 10^{-4}/°C$

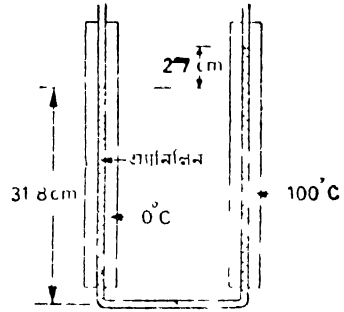
উদাহরণ 3.7 একটি U-নলে অ্যানিলিন রহিয়াছে। ইহার একটি বাহু গলন্ত বরফ দ্বারা এবং অপরটি বাষ্প দ্বারা আবৃত। শীতল স্তম্ভটির দৈর্ঘ্য 31·8 cm এবং দুই বাহুর তরলস্তম্ভের উচ্চতার পার্থক্য 2·7 cm। অ্যানিলিনের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A U-tube contains aniline, one limb being surrounded by melting ice and the other limb by steam. The cold column is 31·8 cm long and the difference between the heights of the columns is 2·7 cm. Find the coefficient of expansion of aniline.]

সমাধান ঃ স্পষ্টতই, উষ্ণতর তরলস্তম্ভের উচ্চতা অপেক্ষাকৃত বেশি হইবে (চিত্র 3.1)।

কাজেই, উষ্ণতর তরলস্তম্ভের উচ্চতা $= (31{\cdot}8 + 2{\cdot}7) = 34{\cdot}5$ cm

U-নলে অ্যানিলিন সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া উভয় বাহুর তরলস্তম্ভের ভূমিতে চাপ সমান।

মনে করি, 0°C এবং 100°C উষ্ণতায় অ্যানিলিনের ঘনত্ব যথাক্রমে d_0 g/cm³ এবং d_1 g/cm³

চিত্র 3.1

শীতল তরলস্তম্ভের ভূমিতে চাপ $= 31{\cdot}8 \times d_0 \times g$ dyn/cm²

অনুরূপভাবে, উষ্ণ তরলস্তম্ভের ভূমিতে চাপ $= 34{\cdot}5 \times d_1 \times g$ dyn/cm²

এই দুই চাপ সমান বলিয়া লেখা যায়, $31{\cdot}8 \times d_0 = 34{\cdot}5 \times d_1$ ··· (i)

কিন্তু, $d_1 = d_0(1+\gamma\theta)^{-1}$ ··· (ii)

এখানে γ = অ্যানিলিনের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক এবং θ = উষ্ণতা-বৃদ্ধি = 100°C

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $31{\cdot}8 \times d_0 = 34{\cdot}5 \times \dfrac{d_0}{(1+\gamma\theta)}$

বা, $31{\cdot}8 \times (1 + \gamma \times 100) = 34{\cdot}5$ বা, $1 + 100\gamma = \dfrac{34{\cdot}5}{31{\cdot}8}$

সুতরাং, অ্যানিলিনের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক, $\gamma = 8{\cdot}49 \times 10^{-4}/°C$

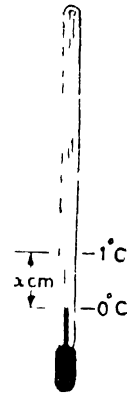
উদাহরণ 3.8 একটি পারদ থার্মোমিটারের কুণ্ডে এবং ইহার কৈশিক নলের শূন্য দাগ পর্যন্ত 0·5 cm³ পারদ রহিয়াছে। যদি নলের আভ্যন্তরীণ ব্যাস 0·2 mm হয় তাহা হইলে স্কেলে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াসের দৈর্ঘ্য কত? (পারদের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক $= 18 \times 10^{-5}/°C$ এবং কাচের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $= 8 \times 10^{-6}/°C$)

[The bulb and stem of a mercury thermometer contain 0·5 cm³

of mercury up to the zero mark. If the stem is 0·2 mm in internal diameter, what is the length of the Celsius degree in the scale? Coefficient of real expansion of mercury $=18\times10^{-5}/°C$ and coefficient of linear expansion of glass $=8\times10^{-6}/°C$.]

সমাধান ঃ কাচের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক $=3\times8\times10^{-6}=24\times10^{-6}/°C$
কাচের সাপেক্ষে পারদের আপাত প্রসারণ গুণাঙ্ক
$=(18\times10^{-5}-24\times10^{-6})/°C=15·6\times10^{-5}/°C$
0°C উষ্ণতায় পারদের আয়তন $=0·5$ cm³
1°C উষ্ণতা-বৃদ্ধিতে পারদের আপাত আয়তন-বৃদ্ধি
$=0·5\times15·6\times10^{-5}\times1=78\times10^{-6}$ cm³
কাজেই, থার্মোমিটারের নলের 0°C দাগ হইতে 1°C দাগ পর্যন্ত আয়তন $=78\times10^{-6}$ cm³ ... (i)
ধরি, স্কেলে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াসের দৈর্ঘ্য $=x$ cm (চিত্র 3.2)
নলের আভ্যন্তরীণ ব্যাসার্ধ $=0·1$ mm $=0·01$ cm
কাজেই, 0°C দাগ হইতে 1°C দাগ পর্যন্ত নলের আভ্যন্তরীণ আয়তন $=x\times\pi\times(0·01)^2$ cm³ ... (ii)
সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়, $x=\pi\times0·0001$
$=78\times10^{-6}$
বা, $x=0·248$ cm

চিত্র 3·2

সুতরাং, থার্মোমিটারটির স্কেলে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াসের দৈর্ঘ্য 2·48 mm।

উদাহরণ 3.9 একটি পাত্রে 0°C উষ্ণতার 8·45 g জল রহিয়াছে এবং উহার বাকি অংশ প্যারাফিনে পূর্ণ রহিয়াছে। যখন ঐ জল 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট বরফে পরিণত হইল তখন 0·62 g প্যারাফিন বাহির হইয়া গেল। 20°C উষ্ণতায় প্যারাফিনের আপেক্ষিক গুরুত্ব 0·80 এবং ইহার আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক $9\times10^{-4}/°C$। এই সকল উপাত্ত হইতে বরফের আপেক্ষিক গুরুত্ব নির্ণয় কর।

[A vessel contains 8·45 g of water at 0°C and the remainder of the vessel is filled with paraffin. If the water is turned to ice at 0°C, 0·62 g of paraffin is expelled. The specific gravity of paraffin at 20°C is 0·80 and its coefficient of cubical expansion is $9\times10^{-4}/°C$. Find the specific gravity of ice from the above data.]

সমাধান ঃ 0°C উষ্ণতায় প্যারাফিনের আপেক্ষিক গুরুত্ব
$=0·8(1+20\times9\times10^{-4})=0·8\times1·018=0·8144$

বহিষ্কৃত গ্লিসারিনের আয়তন $=\dfrac{0·62}{0·8144}=0·76$ cm³

কাজেই, 8·45 g জল বরফে পরিণত হইবার ফলে ইহার প্রসারণ হয় 0·76 cm³
অর্থাৎ, 8·45 g বরফের আয়তন $=(8·45+0·76)=9·21$ cm³

কাজেই, বরফের আপেক্ষিক গুরুত্ব$=\frac{8\cdot45}{9\cdot21}=0\cdot917$

উদাহরণ 3.10 0°C উষ্ণতায় একটি পারদপূর্ণ কাচ থার্মোমিটারে পারদের আয়তন $0\cdot50$ cm^3 এবং ইহার ঊর্ধ্ব-স্থিরাঙ্ক ও নিম্ন-স্থিরাঙ্কের মধ্যবর্তী দূরত্ব 15·0 cm। থার্মোমিটারের নলের ব্যাস কত? কাচের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=8\times10^{-6}$K^{-1} এবং পারদের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক$=18\cdot1\times10^{-5}$K^{-1}।

[The volume of the mercury in a mercury-in-glass thermometer is 0·50 cm^3 at 0°C and the distance between the upper and lower fixed points is 15·0 cm. What is the diameter of the bore of the stem of the thermometer? Coefficient of linear expansion of glass$=8\times10^{-6}$K^{-1} and coefficient of cubical expansion of mercury$=18\cdot1\times10^{-5}$K^{-1}.]

সমাধান: পারদের আপাত প্রসারণ গুণাঙ্ক (γ')=পারদের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক (γ) − কাচের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক$=18\cdot1=10^{-5}-3\times8=10^{-6}$

$$=15\cdot7\times10^{-5}\text{K}^{-1}$$

ধরি, V_0=0°C দাগ পর্যন্ত থার্মোমিটারের আভ্যন্তরীণ আয়তন এবং V_{100}=100°C-এর দাগ পর্যন্ত থার্মোমিটারের আভ্যন্তরীণ আয়তন (চিত্র 3.3)।

চিত্র 3.3

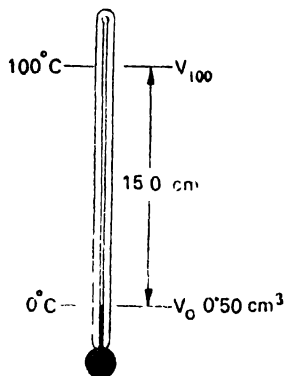
কাজেই লেখা যায়, $V_{100}=V_0\ (1+\gamma' t)$

বা, $V_{100}-V_0$
$$=0\cdot5\times15\cdot7\times10^{-5}\times100\text{ cm}^3$$

কিন্তু, $V_{100}-V_0=\frac{\pi d^2}{4}\times15,$

d cm হইল থার্মোমিটারের নলের ব্যাস।

সুতরাং, $\pi d^2\times\frac{15}{4}$
$=0\cdot5\times15\cdot7\times10^{-5}\times100$

$$\text{বা,}\quad d=\sqrt{\frac{4\times0\cdot5\times15\cdot7\times10^{-5}\times100}{15\pi}}=0\cdot026\text{ cm}$$

উদাহরণ 3.11 নিচ হইতে উপরের দিকে অংশাঙ্কিত একটি সেণ্টিমিটার স্কেল-সম্বলিত একটি বেলনাকৃতি কাচের নল উহার 20 cm দাগ পর্যন্ত নিমজ্জিত রাখিয়া 10°C উষ্ণতাবিশিষ্ট জলে ভাসিতেছে। যখন নলটি 20·1 cm দাগ পর্যন্ত ডুবিয়া থাকে তখন জলের উষ্ণতা কত? (জলের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক$=42\times10^{-5}$K^{-1} এবং কাচের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$=8\times10^{-6}$K^{-1})

[A cylindrical glass tube, provided with a centimeter scale reading from the bottom of the tube, floats vertically in water at the 20 cm mark when the temperature of water is 10°C. What

will be the temperature of water when the tube floats at the 20·1 cm mark ? (Coefficient of cubical expansivity of water $=42\times10^{-5}K^{-1}$ and coefficient of linear expansivity of glass $=8\times10^{-6}K^{-1}$)]

সমাধান ঃ মনে করি, 10°C উষ্ণতায় কাচের নলে প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল S এবং জলের ঘনত্ব $=d_{10}$

চোঙটি যখন সাম্যাবস্থায় ভাসিতেছে তখন নল-কর্তৃক অপসারিত জলের ওজন নলের ওজনের সমান। এখন, 10°C উষ্ণতাবিশিষ্ট জলে নিমজ্জিত অবস্থায় নল-কর্তৃক অপসারিত জলের ওজন $=20\times S\times d_{10}\times g$ ($g=$ অভিকর্ষজ ত্বরণ)

নলের ওজন W হইলে লেখা যায়, $W=20\times S\times d_{10}\times g$ ... (i)

মনে করি, জলের উষ্ণতা θ°C বৃদ্ধি পাইলে নলটি উহার দৈর্ঘ্যের 20·1 cm নিমজ্জিত রাখিয়া ভাসে।

এই সময় জলের ঘনত্ব $=d_{10}(1-42\times10^{-5}\theta)$

এবং কাচের নলের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, $S'=S[1+\beta\theta]$,

এখানে $\beta=$ কাচের তলমাত্রিক প্রসারণ গুণাঙ্ক।

কিন্তু আমরা জানি যে, $\beta=2\alpha=2\times8\times10^{-6}K^{-1}$

$\therefore\ S'=S(1+16\times10^{-6}\theta)$

এই অবস্থায় নল-কর্তৃক অপসারিত জলের ওজন

$=20{\cdot}1\times d_{10}(1-42\times10^{-5}\theta)\times S(1+1{\cdot}6\times10^{-5}\theta)\times g$

ইহাও নলের ওজনের সমান বলিয়া লেখা যায়,

$W=20{\cdot}1\times d_{10}\times S\times(1-42\times10^{-5}\theta)(1+1{\cdot}6\times10^{-5}\theta)g$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$20{\cdot}1\times d_{10}\times S\times(1-42\times10^{-5}\theta)(1+1{\cdot}6\times10^{-5}\theta)g$
$=20\times d_{10}\times S\times g$

বা, $20{\cdot}1\times(1-42\times10^{-5}\theta)(1+1{\cdot}6\times10^{-5}\theta)=20$

বা, $[1-42\times10^{-5}\theta+1{\cdot}6\times10^{-5}\theta]=\dfrac{20}{20{\cdot}1}$

[যেহেতু, α এবং β যদি 1 অপেক্ষা খুব ছোট হয় তাহা হইলে
$(1-\alpha)(1+\beta)=(1-\alpha+\beta)$ ('বলবিজ্ঞান'-এর প্রথম পরিচ্ছেদ দ্রষ্টব্য)]

সুতরাং, $1-40{\cdot}4\times10^{-5}\theta=1-\dfrac{0{\cdot}1}{20{\cdot}1}$

বা, $40{\cdot}4\times10^{-5}\theta=\dfrac{0{\cdot}1}{20{\cdot}1}$ বা, $\theta=\dfrac{10^4}{40{\cdot}4\times20{\cdot}1}=12{\cdot}31$°C

কাজেই, জলের অন্তিম উষ্ণতা $=(10+12{\cdot}31)=22{\cdot}31$°C

উদাহরণ 3.12 একটি পাত্র 500 g জল এবং 1000 g পারদ দ্বারা সম্পূর্ণ ভর্তি রহিয়াছে। যখন ইহাতে 21,200 cal তাপ দেওয়া হইল তখন 3·52 g জল পাত্র

হইতে বাহির হইয়া গেল। পারদের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। পাত্রের প্রসারণ উপেক্ষা করা যাইতে পারে। (জলের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক $=1.5\times10^{-4}/°C$, পারদের ঘনত্ব $=13.6$ g/cm^3, জলের ঘনত্ব $=1$ g/cm^3 এবং পারদের আপেক্ষিক তাপ $=0.03$ cal g^{-1}°C^{-1}.)

[A vessel is filled completely with 500 g of water and 1000 g of mercury. When 21,200 cal of heat are given to it, water of mass 3·52 g overflows. Calculate the coefficient of volume expansion of mercury. Expansion of the vessel may be neglected. (Coefficient of volume expansion of water $=1.5\times10^{-4}/°C$, density of mercury $=13.6$ g/cm^3, density of water $=1$ g/cm^3 and specific heat of mercury $=0.03$ cal g^{-1}°C^{-1}).]

সমাধান: মনে করি, জল এবং পারদের উষ্ণতা-বৃদ্ধি $=\theta°C$

কাজেই, $500\,\theta+1000\times0.03\times\theta=21200$ cal

বা, $530\,\theta=21200$ বা, $\theta=40°C$

জলের প্রাথমিক আয়তন $=500$ cm^3

এবং পারদের প্রাথমিক আয়তন $=\dfrac{1000}{13.6}$cm^3

40°C উষ্ণতা-বৃদ্ধির আয়তনের মোট বৃদ্ধি,

$$\triangle V=500\times1.5\times10^{-4}\times40+\frac{1000}{13.6}\times\gamma\times40$$

এখানে, γ হইল পারদের আয়তন গুণাঙ্ক।

$$\text{বা,}\quad \triangle V=3+\frac{4\times10^4}{13.6}\times\gamma \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

এখন, যে-পরিমাণ জল তরল হইতে বাহির হইয়া যায় উহার আয়তন

$$=\frac{3.52}{\rho'}\text{cm}^3$$

ρ' g/cm^3 হইল 40°C উষ্ণতা-বৃদ্ধির পর জলের ঘনত্ব।

$$\rho'=\frac{1}{(1+1.5\times10^{-4}\times40)}$$

বহিষ্কৃত জলের আয়তন $=3.52\times(1+1.5\times10^{-4}\times40)=3.54$ cm^3 ··· (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়, $3+\dfrac{4\times10^4}{13.6}\times\gamma=3.54$

$$\text{বা,}\ \gamma=\frac{0.54\times13.6}{4\times10^4}=1.8\times10^{-4}/°C$$

উদাহরণ 3.13 বায়ুতে একটি ধাতুখণ্ডের ওজন 46 g-wt; 27°C উষ্ণতায় 1·24 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় ইহার ওজন 30g-wt। যখন তরলের উষ্ণতা বৃদ্ধি করিয়া 42°C করা হয় তখন ধাতুখণ্ডের ওজন হয় 30·5 g-wt। 42°C

উষ্ণতায় আলোচ্য তরলের আপেক্ষিক গুরুত্ব 1·20। ধাতুটির রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A piece of metal weighs 46 g-wt in air. When it is immersed in a liquid of specific gravity 1·24 at 27°C, it weighs 30 g-wt. When the temperature of the liquid is raised to 42°C, the metal piece weighs 30·5 g-wt. The specific gravity of the liquid at 42°C is 1·20. Calculate the coefficient of linear expansion of the metal.]

সমাধান : তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় ধাতুখণ্ডটির আপাত ভার-হ্রাস উহার সম-আয়তন তরলের ওজনের সমান। মনে করি, 27°C উষ্ণতায় ধাতুখণ্ডটির আয়তন $=V\ cm^3$

27°C উষ্ণতাবিশিষ্ট তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় ধাতুখণ্ডের ভার হ্রাস

$$=46-30=16\ \text{g-wt}$$

কাজেই, ধাতুখণ্ডের সম-আয়তন তরলের ওজন $=16$ g-wt

স্পষ্টতই, $V\times 1{\cdot}24=16$ ... (i)

ধাতুখণ্ডটি যখন 42°C উষ্ণতাবিশিষ্ট তরলে নিমজ্জিত রহিয়াছে তখন ইহার ভার-হ্রাস $=(46-30{\cdot}5)=15{\cdot}5$ g-wt

এই সময় ধাতুখণ্ডের আয়তন

$$V'=V\{1+\gamma\times(42-27)\}$$ [$\gamma=$ধাতুর আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক]

বা, $V'=W\ (1+15\gamma)$

এক্ষেত্রে, অপসারিত তরলের ওজন $=V(1+15\gamma)\times 1{\cdot}2$ ... (iii)

(ii) এবং (iii) হইতে লেখা যায়, $V(1+15\gamma)\times 1{\cdot}20=15{\cdot}5$ ... (iv)

(iv) নং সমীকরণকে (i) নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{1{\cdot}2\times(1+15\gamma)}{1{\cdot}24}=\frac{15{\cdot}5}{16}\quad \text{বা, } \gamma=6{\cdot}94\times10^{-5}/°C$$

কিন্তু আমরা জানি যে, রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক, $\alpha=\frac{\gamma}{3}$

কাজেই, ধাতুটির রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক

$$=\frac{6{\cdot}94}{3}\times10^{-5}/°C=2{\cdot}31\times10^{-5}/°C$$

উদাহরণ 3.14 7 cm ব্যাসবিশিষ্ট এবং 266·5 g ভরবিশিষ্ট একটি গোলক একটি তরল-গাহে ভাসিতেছে। উষ্ণতা বৃদ্ধি করিতে থাকিলে গোলকটি 35°C-এ তরলে ডুবিতে আরম্ভ করে। যদি 0°C উষ্ণতায় তরলের ঘনত্ব 1·527 g/cm³ হয় তাহা হইলে তরলের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। গোলকের প্রসারণ উপেক্ষা কর।

[A sphere of diameter 7 cm and mass 266·5 g floats in a liquid bath. As the temperature is raised, the sphere begins to sink at a

temperature of 35°C. If the density of the liquid at 0°C is 1·527 g/cm³, find the coefficient of cubical expansion of the liquid. Neglect the expansion of the sphere.]

সমাধান : গোলকটির আয়তন, $V=\frac{4}{3}\pi\times(\frac{7}{2})^3=179\cdot59$ cm³

35°C উষ্ণতায় তরলের ঘনত্ব D g/cm³ হইলে এই উষ্ণতার তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় গোলক-কর্তৃক অপসারিত তরলের ওজন $=V\times D=179\cdot59$ D g-wt

প্রশ্নের শর্তানুসারে, ইহা গোলকের ওজনের সমান হইবে।

কাজেই, $179\cdot59D=266\cdot5$ বা, $D=\frac{266\cdot5}{179\cdot59}$ g/cm³

মনে করি, তরলটির আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক $=\gamma$

সুতরাং, লেখা যায়, $D=1\cdot527\,(1-\gamma\times35)$

বা, $\frac{266\cdot5}{179\cdot59}=1\cdot527\,(1-\gamma\times35)$ বা, $(1-\gamma\times35)=\frac{266\cdot5}{179\cdot59\times1\cdot527}$

বা, $1-\gamma\times35=0\cdot9718$ বা, $\gamma=8\cdot06\times10^{-4}/°C$ (প্রায়)

উদাহরণ 3.15 শূন্য অবস্থায় একটি আপেক্ষিক গুরুত্ব বোতলের ওজন 26·71 g-wt এবং যখন উহা 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট কোহল দ্বারা পূর্ণ তখন উহার ওজন 66·36 g-wt। ইহাকে 40°C উষ্ণতাবিশিষ্ট জল-গাহে স্থাপন করা হইল। ইহার পর ইহাকে সরাইয়া ঠাণ্ডা করিতে দেওয়া হইল। শীতল হইবার পর উহাকে ভালভাবে মুছিয়া পুনরায় উহার ওজন লওয়া হইল। দেখা গেল যে, এই ওজন 64·53 g-wt। কোহলের আপাত প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A specific gravity bottle weighed 26·71 g-wt when empty and 66·36 g-wt when filled with alcohol at 0°C. It was placed in a water-bath at 40°C, then removed and allowed to cool. When cool, the bottle was carefully wiped and weighed again. Its weight was found to be 64·53 g-wt. Calculate the coefficient of apparent expansion of alcohol.]

সমাধান : শূন্য অবস্থায় আপেক্ষিক গুরুত্ব বোতলের ওজন $=26\cdot71$ g-wt

0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট কোহলপূর্ণ অবস্থায় ইহার ওজন $=66\cdot36$ g-wt

∴ আপেক্ষিক গুরুত্ব বোতলের 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট কোহলের ওজন

$=66\cdot36-26\cdot71=39\cdot65$ g-wt

উষ্ণ করিয়া পুনরায় শীতল করিবার পর কোহল-সহ বোতলের ওজন

$=64\cdot53$ g-wt

কাজেই, উষ্ণ করিবার পর বোতলে বিদ্যমান কোহলের ওজন $=64\cdot53-26\cdot71$

$=37\cdot82$ g-wt

∴ বহিষ্কৃত কোহলের ভর $=(39\cdot65-37\cdot82)=1\cdot83$ g

কোহলের উষ্ণতা-বৃদ্ধি $=40°C$

মনে করি, 0°C উষ্ণতায় কোহলের ঘনত্ব$=d$ g/cm³

কাজেই, 0°C উষ্ণতায় বোতলের অবশিষ্ট কোহলের আয়তন$=\frac{1 \cdot 83}{d}$ cm³

কাজেই, $(37 \cdot 82/d)$ cm³ আয়তনের তরলের 40°C উষ্ণতা-বৃদ্ধি হইলে উহার আপাত আয়তন প্রসারণ হয় $(1 \cdot 83/d)$ cm³ ; অতএব, আপাত প্রসারণ গুণাঙ্কের সংজ্ঞানুসারে,

কোহলের আপাত প্রসারণ গুণাঙ্ক, $\gamma=\frac{(1 \cdot 83/d)}{40 \times (37 \cdot 82/d)}=0 \cdot 001209/°C$

প্রশ্নমালা 3

1. কাচের সাপেক্ষে পারদের আপাত-প্রসারণ গুণাঙ্ক 153×10^{-6}/°C এবং উহার প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক 180×10^{-6}/°C। কাচের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The coefficient of apparent expansion of mercury with respect to glass is 153×10^{-6}/°C and the coefficient of its real expansion is 180×10^{-6}/°C. Find the coefficient of linear expansion of glass.]
[9×10^{-6}/°C]

2. 40°C উষ্ণতায় জলের ঘনত্ব 0·992 g/cm³ এবং 20°C উষ্ণতায় জলের ঘনত্ব 0·998 g/cm³। উষ্ণতার এই পাল্লায় জলের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The density of water at 40°C is 0·992 g/cm³ and the density of water at 20°C is 0·998 g/cm³. Find the coefficient of cubical expansion of water between these two temperatures.]
[3×10^{-4}/°C (প্রায়)]

3. 20°C উষ্ণতায় কোন তরলের 30 cm উচ্চতাবিশিষ্ট স্তম্ভ যে-চাপ প্রয়োগ করে 70°C উষ্ণতায় ঐ তরলের 31·25 cm উচ্চতাবিশিষ্ট স্তম্ভ সেই চাপ প্রয়োগ করে। তরলটির প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্কের মান নির্ণয় কর।

[The pressure exerted by a column of liquid 31·25 cm at 70°C is the same as that exerted by a column of the same liquid of height 30 cm at 20°C. Calculate the coefficient of real expansion of liquid.] [$8 \cdot 33 \times 10^{-4}$/°C]

4. একটি কাচের ফ্লাস্কের আভ্যন্তরীণ আয়তন 300 cm³ ; উহার মধ্যে কত আয়তনের পারদ রাখিলে ফ্লাস্কের বাকি অংশের আয়তন সকল উষ্ণতায় সমান থাকিবে ? পারদের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক$=18 \times 10^{-5}$/°C এবং কাচের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$=9 \times 10^{-6}$/°C.

[The internal volume of a glass flask is 300 cm³. What volume of mercury must be kept inside the flask so that the volume of the rest of the flask remains same at all temperature ? The coefficient of cubical expansion of mercury$=18 \times 10^{-5}$/°C and the coefficient of linear expansion of glass$=9 \times 10^{-6}$/°C.]
(Utkal Univ., 1957) [45 cm³]

5. এক লিটার আয়তনের একটি কাচের ফ্লাস্কে কিছু পরিমাণ পারদ আছে। দেখা গেল যে, বিভিন্ন উষ্ণতায় ফ্লাস্কের মধ্যবর্তী বায়ুর আয়তন সমান থাকে। ফ্লাস্কে পারদের আয়তন কত? (কাচের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=9\times10^{-6}/^{\circ}C$, পারদের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক $=1.8\times10^{-4}{}^{\circ}C$)

[A one litre glass flask contains some mercury. It is found that at different temperatures the volume of air inside the flask remains the same. What is the volume of mercury in this flask? (Coefficient of linear expansion of glass $=9\times10^{-6}/^{\circ}C$ and coefficient of volume expansion of mercury $=1.8\times10^{-4}/^{\circ}C$.)

[150 cm^3]

6. শূন্য অবস্থায় একটি ফ্লাস্কের ওজন 12·2 g-wt। 10°C উষ্ণতাবিশিষ্ট পারদ দ্বারা পূর্ণ অবস্থায় ইহার ওজন 159·6 g-wt। 95°C উষ্ণতায় তুলিতে 2·05 g পারদ বহিষ্কৃত হয়। পারদের আপাত প্রসারণ গুণাঙ্ক কত?

[A glass flask weighs 12·2 g-wt when empty and 159·6 g-wt when filled with mercury at 10°C. When the temperature of the flask is raised to 95°C, 2·05 g of mercury is expelled. Find the coefficient of apparent expansion of mercury.] [$16.6\times10^{-5}/^{\circ}C$]

7. শূন্য অবস্থায় কোন কাচ-নির্মিত ভার-থার্মোমিটারের ওজন 51 g-wt। 0°C এবং 100°C উষ্ণতায় গ্লিসারিনপূর্ণ অবস্থায় ইহার ওজন যথাক্রমে 164·13 এবং 158·65 g-wt। গ্লিসারিনের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। (কাচের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=9\times10^{-6}/^{\circ}C$)

[A glass weight thermometer weighs 51 g-wt when empty. When filled with glycerine at 0°C and at 100°C, it weighs 164·13 g-wt and 158·65 g-wt respectively. Find the coefficient of real expansion of glycerine. (The coefficient linear expansion of glass $=9\times10^{-6}/^{\circ}C$.)] [$53.6\times10^{-5}/^{\circ}C$]

8. একটি কাচের বোতলকে 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট তরল দ্বারা পূর্ণ করা হইল। উহার উষ্ণতা বৃদ্ধি করিয়া 40°C করা হইলে বোতলটি হইতে 0·12 g তরল বাহির হইয়া যায়। ইহার পর উষ্ণতাকে 100°C-এ তুলিতে অতিরিক্ত 0·17 g তরল বাহির হইয়া যায়। (i) বোতলে গৃহীত তরলের প্রাথমিক ভর এবং (ii) তরলটির প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, কাচের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক $=10^{-5}K^{-1}$।

[A glass bottle is filled with a liquid at 0°C. When its temperature is raised to 40°C, 0·12 g of the liquid is expelled. On now raising the temperature to 100°C a further 0·17 g of the liquid is expelled. Calculate (a) the mass of the liquid originally in the bottle, (b) the coefficient of real cubic expansivity of the liquid. Assume the coefficient of cubic expansivity of glass as $10^{-5}K^{-1}$] [5·22 g, $6\times10^{-4}K^{-1}$]

9. 20°C উষ্ণতায় একটি কাচের ফ্লাস্কের আয়তন 1 লিটার। দেখাও যে, যদি ইহার উষ্ণতা বাড়াইয়া 40°C করা হয় তাহা হইলে ফ্লাস্কটির আয়তন প্রায় অর্ধমিলিমিটার বৃদ্ধি পায়। দেওয়া আছে যে, কাচের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=8\times10^{-6}$/°C

[A glass flask is 1 litre in capacity at 20°C. Show that its volume increases by about half millilitre when its temperature is raised to 40°C. Given that coefficient of linear expansion of glass $=8\times10^{-6}$/°C.]

10. একটি ফ্লাস্ক 27×10^{-6}/°C আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক-বিশিষ্ট পদার্থের তৈয়ারী এবং ইহার আয়তনের $\frac{3}{20}$ অংশ পারদ দ্বারা পূর্ণ রহিয়াছে (পারদের প্রকৃত আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক $=180\times10^{-6}$/°C)। দেখাও যে, উষ্ণতার পরিবর্তনের সহিত ফ্লাস্কের বাকি অংশের আয়তন পরিবর্তিত হয় না।

[A flask is made of a material having coefficient of volume expansion equal to 27×10^{-6}°C and $\frac{3}{20}$ of its volume is occupied by mercury (coefficient of real expansion of mercury $=180\times10^{-6}$/°C). Show that the volume of the remaining space will not change with the change of temperature.] (H. S., 1963)

11. পিতলের স্কেলযুক্ত যে-ব্যারোমিটার 20°C উষ্ণতায় সঠিক পাঠ দেয় 30°C উষ্ণতায় উহাতে 70 cmHg পাঠ পাওয়া গেল। বায়ুমণ্ডলের সঠিক পাঠ 0°C উষ্ণতায় কত উচ্চতাবিশিষ্ট পারদস্তম্ভের চাপের সমান নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, পিতলের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=18\times10^{-6}$/°C এবং পারদের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক $=18\times10^{-5}$/°C।

[A barometer with a brass scale correct at 20°C reads 70 cmHg, the temperature of air being 30°C. Find the true barometric pressure in terms of mercury at 0°C. Assume that coefficient of linear expansion of brass $=18\times10^{-6}$/°C and coefficient of real expansion of mercury $=18\times10^{-5}$/°C.]

[**সমাধানের ইঙ্গিত ঃ** 30°C-এ সঠিক উষ্ণতার পাঠ

$=70[1+18\times10^{-6}\times(30-20)]=70{\cdot}0216$ cm

কাজেই, $H\times d_0\times g=70{\cdot}0126\times d_{30}\times g$

এখানে d_0 এবং d_{30} হইল যথাক্রমে 0°C এবং 30°C উষ্ণতায় পারদের ঘনত্ব।

পারদস্তম্ভের নির্ণেয় উচ্চতা H=69·64 cm (প্রায়)]

12. এক ভার-থার্মোমিটারে 0°C উষ্ণতায় m গ্রাম ভরবিশিষ্ট তরল থাকে। দেখাও যে, যখন থার্মোমিটারটিকে উত্তপ্ত করিয়া উহাকে θ°C উষ্ণতায় তোলা হয় তখন উহা হইতে $m\gamma'\theta(1-\gamma'\theta)$ গ্রাম পরিমাণ তরল বাহির হইয়া আসে; এখানে γ হইল তরলের আপাত প্রসারণ গুণাঙ্ক।

[A weight thermometer contains m g of a liquid at 0°C. Show that if the thermometer is heated to θ°C, the mass of the liquid

expelled is giveu by $m\gamma'\theta(1-\gamma'\theta)$ g, where γ' is the coefficient of apparent expansion of the liquid.]

13. একটি বেলনাকৃতি কাচের নলে 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট পারদ আবদ্ধ আছে। ইহার উষ্ণতা 50°C বৃদ্ধি করিলে (i) পারদস্তম্ভের উচ্চতা এবং (ii) নলের তলদেশে পারদ-কর্তৃক প্রযুক্ত চাপের শতকরা পরিবর্তন কী হইবে? (কাচের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক $24\times10^{-6}K^{-1}$ এবং পারদের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক $18\times10^{-5}K^{-1}$)

[A cylindrical glass tube contains mercury at 0°C. What will be the percentage change (i) in the height of the mercury column, (ii) in the pressure exerted by the mercury at the bottom of the tube, on raising the temperature by 50°C? (Coefficient of cubic expansivity of glass is $24\times10^{-6}K^{-1}$ and that of mercury is is $18\times10^{-5}K^{-1}$.) [(i) 0·9% বৃদ্ধি, (ii) 0·0016% হ্রাস]

14. একটি পারদ থার্মোমিটারের পিতলের স্কেল রহিয়াছে। এই স্কেলের দাগগুলি 0°C উষ্ণতায় সঠিক। কোন একদিন উষ্ণতা যখন 20°C তখন ব্যারোমিটারের পাঠ পাওয়া গেল 74·865 cm। এই উষ্ণতায় প্রকৃত পাঠ কত এবং 0°C উষ্ণতার পারদস্তম্ভের হিসাবে এই ব্যারোমিটারের পাঠ কত হইবে? (পিতলের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=19\times10^{-6}K^{-1}$ এবং পারদের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক $=18{\cdot}1\times10^{-5}K^{-1}$)

[A mercurial barometer is provided with a brass-scale the markings on which are correct at 0°C. On a day when the temperature is 20°C this barometer reads 74·865 cm. What is the true reading at this temperature, and what will the barometer reading be when reduced to 0°C? Coefficient of linear expansivity of brass $=19\times10^{-6}K^{-1}$ and coefficient of cubic expansivity of mercury $=18{\cdot}1\times10^{-5}K^{-1}$)] [74·893 cm, 74·624 cm]

15. বায়ুতে একখণ্ড কাচের ওজন 3·35 N, 4°C উষ্ণতাবিশিষ্ট জলে নিমজ্জিত অবস্থায় ইহার ওজন 2·079 N এবং জলের উষ্ণতা বৃদ্ধি করিয়া 100°C-এ তুলিলে নিমজ্জিত অবস্থায় ইহার ওজন হয় 2·127 N। কাচের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক $24\times10^{-6}K^{-1}$ হইলে 100°C উষ্ণতায় জলের ঘনত্ব নির্ণয় কর।

[A piece of glass weighs 3·35 N in air, 2·079 N when fully immersed in water at 4°C and 2·127 N when the water is raised to 100°C. If the coefficient of cubic expansivity of glass is $24\times10^{-6}K^{-1}$, find the density of water at 100°C.] [0·961 g/cm^3]

16. এক খণ্ড লৌহ উহার আয়তনের 0·575 অংশ জলে নিমজ্জিত রাখিয়া 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট পারদে ভাসে। যদি সমগ্র সংস্থাটির উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইয়া 220°C হয় তাহা হইলে লৌহখণ্ডটির আয়তনের কত ভগ্নাংশ পারদে নিমজ্জিত থাকিবে? দেওয়া আছে যে, লোহার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=1{\cdot}2\times10^{-5}/°C$ এবং পারদের প্রকৃত প্রসারণ গুণাঙ্ক $1{\cdot}82\times10^{-4}/°C$।

[A piece of iron floats on mercury at 0°C with 0·575 of its volume immersed. What fraction of the volume will remain

immersed when the temperature of the whole system is raised to 220°C ? Given that the coefficient of linear expansion of iron $= 1{\cdot}2\times10^{-5}/°C$ and the coefficient of real expansion of mercury $= 1{\cdot}82\times10^{-4}/°C$.] [0·593]

17. দেখাও যে, যদি ব্যারোমিটারের তরলের উষ্ণতার $\triangle T$ পরিবর্তন হয় এবং চাপ অপরিবর্তিত থাকে তখন ব্যারোমিটারের তরলস্তম্ভের উচ্চতা h-এর পরিবর্তন হয় $\triangle h=\gamma h\triangle T$, এখানে γ হইল আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক।

[Show that if the temperature of a liquid in a barometer changes by $\triangle T$, and the pressure is constant, the height h changes by $\triangle h=\gamma h\triangle T$, where γ is the coefficient of volume expansion.]

18. 0·4 mm ব্যাসবিশিষ্ট কাচের নলের সাহায্যে একটি থার্মোমিটারকে এমনভাবে তৈয়ারী করিতে হইবে যাহাতে উহার ঊর্ধ্ব-স্থিরাঙ্ক এবং নিম্ন-স্থিরাঙ্কের মধ্যে দূরত্ব হয় 10 cm। গঠিত থার্মোমিটারের কুণ্ড এবং নলের নিম্ন-স্থিরাঙ্ক পর্যন্ত আয়তন কত হওয়া প্রয়োজন তাহা নির্ণয় কর। পারদের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক $=18{\cdot}1\times10^{-5}K^{-1}$ এবং কাচের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $=8\times10^{-6}K^{-1}$।

[A mercury thermometer is to be made with glass tubing having internal diameter 0·4 mm so that the distance between the upper and the lower fixed points is 10 cm. Calculate what the internal volume of the bulb and stem below the lower fixed point must be in the thermometer formed. Coefficient of real expansion of mercury $=18{\cdot}1\times10^{-5}K^{-1}$ and coefficient linear expansion of glass $=8\times10^{-6}K^{-1}$] [0·805 cm³]

19. বায়ুতে একটি ধাতব পিণ্ডের ওজন 50 g-wt। বস্তুটিকে 25°C উষ্ণতা-বিশিষ্ট একটি তরলে নিমজ্জিত করা হইলে উহার ওজন হয় 45 g-wt। যখন ইহার উষ্ণতা 100°C-এ তোলা হয় তখন উহার ওজন হয় 45·1 g-wt। ধাতুটির রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $12\times10^{-6}/°C$ হইলে তরলটির আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A metallic bob weighs 50 g-wt in air. If it is immersed in a liquid at a temperature of 25°C, it weighs 45 g-wt. When the temperature of the liquid is raised to 100°C it weighs 45·1 g-wt. Calculate the coefficient of cubical expansion of the liquid assuming the linear expansion of the metal to be $12\times10^{-6}/°C$.]

[$3\times10^{-4}/°C$]

20. শূন্য অবস্থায় একটি আপেক্ষিক গুরুত্ব বোতলের ওজন 38·50 g-wt। যখন ইহাকে 25°C উষ্ণতাবিশিষ্ট পারদ দ্বারা ভর্তি করা হয় তখন ইহার ওজন 360·25 g-wt। এইবার ইহাকে 100°C উষ্ণতা পর্যন্ত উত্তপ্ত করিয়া ঠাণ্ডা করা হইল এবং এই সময় ইহার ওজন হইল 356·67 g-wt। এই দুই উষ্ণতার মধ্যে পারদের আপাত প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[An empty specific gravity bottle weighs 38·50 g-wt. When filled with mercury at 25°C it weighs 360·25 g-wt. It is now

heated to 100°C and cooled, when it is found to weigh 356·67 g-wt. Calculate the coefficient of apparent expansion of mercury between the above temperatures.] (Oxford School Certificate) [0·00015/°C]

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

গ্যাসীয় পদার্থের প্রসারণ

4.1 বয়েলের সূত্র ঃ উষ্ণতা স্থির থাকিলে কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের আয়তন উহার চাপের সহিত ব্যস্তানুপাতে পরিবর্তিত হয়। গ্যাসের চাপকে P দ্বারা, আয়তনকে V দ্বারা এবং উষ্ণতাকে T দ্বারা সূচীত করিলে গাণিতিক সঙ্কেতের সাহায্যে বয়েলের সূত্রটিকে নিম্নরূপে লেখা যায় :

$$V \propto \frac{I}{P} \text{ (T স্থির থাকিলে)} \quad \cdots \quad (4.1)$$

অর্থাৎ, উষ্ণতা স্থির থাকিলে PV=ধ্রুবক হইবে। স্থির উষ্ণতায় কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের প্রাথমিক চাপ ও আয়তন যথাক্রমে P_1 ও V_1 হইলে এবং অন্তিম চাপ ও আয়তন যথাক্রমে P_2 এবং V_2 হইলে বয়েলের সূত্রানুসারে,

$$P_1V_1 = P_2V_2 = \text{ধ্রুবক} \quad \cdots \quad (4.2)$$

ইহার তাৎপর্য এই যে, **সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায়** (isothermal process) নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের চাপ ও আয়তনের গুণফল একটি ধ্রুবক।

সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় চাপ ও ঘনত্ব ঃ (4.2) নং সমীকরণকে আলোচ্য গ্যাসের ভর *m* দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{P_1V_1}{m} = \frac{P_2V_2}{m} = \text{ধ্রুবক} \quad \text{বা,} \quad \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{P_2}{\rho_2} \quad \cdots \quad (4.3)$$

কেননা, $\frac{m}{V_1} = \rho_1$ (P_1 চাপে গ্যাসের ঘনত্ব) এবং $\frac{m}{V_2} = \rho_2$ (P_2 চাপে গ্যাসের ঘনত্ব)

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, স্থির উষ্ণতায় কোন গ্যাসের ঘনত্ব উহার চাপের সমানুপাতিক।

4.2 চার্লসের সূত্র ঃ চাপ স্থির রাখিয়া কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের উষ্ণতা বৃদ্ধি করিলে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস উষ্ণতা-বৃদ্ধির জন্য উহার আয়তন 0°C-এর আয়তনের $\frac{1}{273}$ ভাগ বৃদ্ধি পায়।

0°C সেলসিয়াসে কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের আয়তন V_0 এবং $t°$ সেলসিয়াস উষ্ণতায় ঐ গ্যাসের আয়তন V হইলে চার্লসের সূত্রানুসারে,

$$V = V_0 (1 + \gamma_p t) \quad \cdots \quad (4.4)$$

এখানে, γ_p (গ্যাসের আয়তন গুণাঙ্ক) $=\frac{V-V_0}{V_0 t}=\frac{1}{273}/°C$

কাজেই, $V=V_0\left(1+\frac{t}{273}\right)$ ... (4.5)

বা, $V=V_0\left(\frac{t+273}{273}\right)$ ... (4.6)

কিন্তু, $t°C=(t+273)$ K (কেলভিন) $=T$ K (ধরি)

এবং $0°C=273$ K $=T_0$K (ধরি)

কাজেই, (4.6) নং সমীকরণ হইতে পাই, $V=V_0\frac{T}{T_0}$ বা, $\frac{V}{T}=\frac{V_0}{T_0}$ (4.7)

কিন্তু (V_0/T_0) অনুপাতটি একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের জন্য ধ্রুবক। সুতরাং বলা যায়, চাপ অপরিবর্তিত থাকিবে $(V/T)=$ধ্রুবক বা, $V \propto T$ ... (4.8)

সুতরাং, চার্লসের সূত্রটিকে নিম্নরূপেও প্রকাশ করা যায়—

চাপ অপরিবর্তিত থাকিলে কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের আয়তন উহার পরম উষ্ণতার (absolute temperature) সমানুপাতিক।

স্থির চাপে উষ্ণতা ও গ্যাসের ঘনত্ব : স্থির চাপ নির্দিষ্ট ভরের কোন গ্যাসের প্রাথমিক উষ্ণতা (পরম স্কেলে) ও আয়তন যথাক্রমে T_1 ও V_1 হইলে এবং অন্তিম উষ্ণতা (পরম স্কেলে) ও আয়তন যথাক্রমে T_2 ও V_2 হইলে চার্লসের সূত্র হইতে লেখা যায়,

$$\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2} \quad \cdots \quad (4.9)$$

এই সমীকরণটিকে আলোচ্য গ্যাসের ভর m দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{V_1}{mT_1}=\frac{V_2}{mT_2} \text{ বা, } \frac{T_1 m}{V_1}=\frac{T_2 m}{V_2} \quad \cdots \quad (4.10)$$

কিন্তু, $\frac{m}{V_1}=T_1$K উষ্ণতায় গ্যাসের ঘনত্ব$=\rho_1$ (ধরি)

এবং, $\frac{m}{V_2}=T_2$K উষ্ণতায় গ্যাসের ঘনত্ব$=\rho_2$ (ধরি)

সমীকরণ (4.10) হইতে পাই, $\rho_1 T_1=\rho_2 T_2$ ... (4.11)

কাজেই, স্থির চাপে গ্যাসের ঘনত্ব ও উহার পরম উষ্ণতার গুণফল ধ্রুবক। অর্থাৎ, স্থির চাপে গ্যাসের ঘনত্ব উহার পরম উষ্ণতার ব্যস্তানুপাতিক।

4.3 রেনোঁর সূত্র (Regnault's Law) : কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের আয়তন অপরিবর্তিত থাকিলে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস উষ্ণতা-বৃদ্ধির বা হ্রাসের জন্য চাপ 0°C-এর চাপে $\frac{1}{273}$ অংশ বাড়িবে বা কমিবে।

ধরি, স্থির আয়তন 0°C উষ্ণতায় কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের চাপ$=P_0$

এবং t°C উষ্ণতায় ঐ গ্যাসের চাপ$=$P

তাহা হইলে, উপরি-উক্ত সূত্রানুসারে, $P=P_0(1+\gamma_v t)$ ... (4.12)

এখানে, γ_v (গ্যাসের চাপ গুণাঙ্ক)$=\dfrac{P-P_0}{P_0 t}=\dfrac{1}{273}/°C$

$$\therefore \quad P=P_0\left(1+\frac{1}{273}t\right)=P_0\left(\frac{t+273}{273}\right)$$

এখন, $t+273=TK$; $273=T_0K$ লিখিয়া পাই, $P=P_0\dfrac{T}{T_0}$

$$\text{বা,} \quad \frac{P}{T}=\frac{P_0}{T_0}=\text{ধ্রুবক} \qquad \cdots \quad (4.13)$$

কাজেই, আয়তন স্থির থাকিলে কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের চাপ উহার পরম উষ্ণতার সমানুপাতিক।

4.4 গ্যাসের সূত্রগুলির সম্মিলিত রূপ (Combined gas law) :

বয়লের সূত্রানুসারে, $V\propto\dfrac{1}{P}$ (T স্থির থাকিলে) ... (i)

চার্লসের সূত্রানুসারে, $V\propto T$ (P স্থির থাকিলে) ... (ii)

সুতরাং, যখন চাপ এবং উষ্ণতা উভয়েই পরিবর্তিত হইলে লেখা যায়,

$$V\propto\frac{T}{P} \quad \text{বা,} \quad \frac{PV}{T}=\text{ধ্রুবক} \qquad \cdots \quad (4.14)$$

গ্যাসের ভর এক গ্রাম-অণু হইলে এই ধ্রুবকটিকে R অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ইহাকে **গ্যাস ধ্রুবক** (gas constant) বলা হয়। অর্থাৎ, এক গ্রাম-অণু গ্যাসের ক্ষেত্রে,

$$\frac{PV}{T}=R \quad \text{বা,} \quad PV=RT \qquad \cdots \quad (4.15)$$

যদি গ্যাসের ভর m হয় এবং ঐ গ্যাসীয় পদার্থের আণবিক ওজন M হয় তবে এক গ্রাম-অণুতে প্রকাশ করিলে গ্যাসের ভর হইবে $\dfrac{m}{M}$। এক্ষেত্রে লেখা যায়,

$$\frac{PV}{T}=\frac{m}{M}R \quad \text{বা,} \quad \frac{PV}{T}=nR \qquad \cdots \quad (4.16)$$

গ্যাস ধ্রুবকের মান : স্বাভাবিক উষ্ণতা ও চাপে যে-কোন গ্যাসের এক গ্রাম-অণুর আয়তন, $V_0=22{\cdot}4$ litres$=22400$ cm^3

স্বাভাবিক চাপ$=76$ cmHg$=76\times13{\cdot}59\times981$ dyn/cm^2

$=1{\cdot}013\times10^6$ dyn/cm^2

স্বাভাবিক উষ্ণতা, $T_0=0°C=273$ K

কাজেই, $R=\dfrac{P_0V_0}{T_0}=\dfrac{1{\cdot}013\times10^6\times22400}{273}=8{\cdot}31\times10^7$ erg/°C

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 4.1 একটি পাত্রে 0°C উষ্ণতায় 760 mmHg চাপে 100 লিটার বায়ু আবদ্ধ আছে। উষ্ণতা বৃদ্ধি করিয়া 27°C করা হইলে গ্যাসের চাপ কী হইবে? ধরিয়া লও যে, আয়তন অপরিবর্তিত রহিয়াছে।

[A vessel contains 100 litres of air at 0°C and 760 mmHg. What will be the pressure of the air if the temperature is raised to 27°C ? Assume that the volume remains constant.]

সমাধান ঃ আয়তন অপরিবর্তিত আছে বলিয়া লেখা যায়, $\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}$

এখানে, $P_1=760$ mmHg $\quad T_1=0+273=273$ K

এবং $T_2=27+273=300$ K

$\therefore \frac{760}{273}=\frac{P_2}{300}$ বা, $P_2=\frac{300\times 760}{273}=835{\cdot}16$ mmHg

উদাহরণ 4.2 কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাস 27°C উষ্ণতায় আছে। (i) চাপ স্থির রাখিলে কোন্ উষ্ণতায় ইহার আয়তন দ্বিগুণিত হইবে; (ii) আয়তন স্থির রাখিলে কোন্ উষ্ণতায় ইহার চাপ ত্রিগুণিত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

[A certain quantity of gas is at 27°C. Find (i) the temperature at which its volume gets doubled, the pressure remaining the same, (ii) the temperature at which its pressure is tripled, the volume remaining the same.]

সমাধান ঃ (i) চাপ স্থির থাকিলে লেখা যায়, $\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2}$

$$\text{বা,}\quad T_2=\frac{V_2}{V_1}\cdot T_1$$

এখন $V_2=2V_1$ এবং $T_1=27+273=300$ K

$$\therefore\quad T_2=\frac{2V_1}{V_1}\cdot 300=600 \text{ K}$$

সেলসিয়াস স্কেলে নির্ণেয় উষ্ণতার মান $=600-273=327$°C

(ii) আয়তন অপরিবর্তিত থাকিলে লেখা যায়, $\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}$

$$\text{বা,}\quad T_2=\frac{P_2}{P_1}\cdot T_1$$

এখন, $P_2=3P_1$ এবং $T_1=300$ K

$$\therefore\quad T_2=\frac{3P_1}{P_1}\times 300=900 \text{ K}$$

কাজেই, সেলসিয়াস স্কেলে নির্ণেয় উষ্ণতার মান $=900-273=627$°C

উদাহরণ 4.3 একটি কর্কের সাহায্যে একটি ফ্লাস্কে 20°C উষ্ণতায় কিছু পরিমাণ বায়ু আবদ্ধ আছে। বায়ুর চাপ এক অ্যাটমসফিয়ার। চাপ যখন 1·7

অ্যাটমস্‌ফিয়ার হয় তখন আবদ্ধ গ্যাস কর্কটিকে ঠেলিয়া বাহির করিয়া দেয়। কোন্ উষ্ণতায় ইহা ঘটিবে?

[Some air is enclosed in a flask at 20°C by a cork. The pressure of the enclosed air is one atmosphere. The cork is pushed out when the pressure of the enclosed air becomes 1·7 atmosphere. At what temperature will this happen ?]

সমাধান : ফ্লাস্কের আয়তন প্রসারণ উপেক্ষণীয় বলিয়া এক্ষেত্রে আবদ্ধ গ্যাসের আয়তন অপরিবর্তিত আছে বলিয়া মনে করা যায়। কাজেই লেখা যায়,

$$\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2} \qquad \cdots \qquad (i)$$

এখানে, P_1 = গ্যাসের প্রাথমিক চাপ = 1 অ্যাটমস্‌ফিয়ার

T_1 = গ্যাসের প্রাথমিক উষ্ণতা $=20+273=293$ K

$P_2=1\cdot7$ অ্যাটমস্‌ফিয়ার

$$\therefore \quad T_2=\frac{P_2}{P_1}\cdot T_1=\frac{1\cdot7}{1}\times 293=498\cdot1 \text{ K}$$

কাজেই, সেলসিয়াস স্কেলে নির্ণেয় উষ্ণতা $=498\cdot1-273=225\cdot1$°C

উদাহরণ 4.4 একটি ঘরের উষ্ণতা 20°C হইতে বৃদ্ধি করিয়া 25°C-এ তোলা হইলে ঘরের বায়ুর শতকরা কত ভাগ নিষ্ক্রান্ত হইবে?

[What percentage of air in a room will be expelled if the temperature of the room is increased from 20°C to 25°C ?]

সমাধান : এক্ষেত্রে, চাপ স্থির রহিয়াছে বলিয়া ধরা যায়।

কাজেই লেখা যায় যে, $\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2}$

এখানে, V_1 = 20°C উষ্ণতায় ঘরে আবদ্ধ বায়ুর আয়তন

V_2 = 25°C উষ্ণতায় ঐ বায়ুর আয়তন

কাজেই, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{T_1}{T_2}=\frac{20+273}{25+273}=\frac{293}{298}$

$$\therefore \quad \frac{V_2-V_1}{V_2}=\frac{298-293}{298}=\frac{4}{298}$$

সুতরাং বহিষ্কৃত বায়ুর শতকরা পরিমাণ

$$=\frac{(V_2-V_1)}{V_2}=100=\frac{5}{298}\times 100=1\cdot68\% \text{ (প্রায়)}$$

উদাহরণ 4.5 স্বাভাবিক উষ্ণতা ও চাপে 1 লিটার হাইড্রোজেনের ভর 0·0895 g হইলে গ্যাস ধ্রুবক R-এর মান নির্ণয় কর।

[If the mass of 1 litre of hydrogen gas at N. T. P. is 0·0895 g calculate the value of the gas constant R.]

সমাধান ঃ প্রশ্নের শর্তানুসারে, স্বাভাবিক উষ্ণতা ও চাপে $1000\ cm^3$ হাইড্রোজেন গ্যাসের ভর $=0{\cdot}0895$ g

সুতরাং, স্বাভাবিক উষ্ণতা ও চাপে 1 গ্রাম-অণু বা, 2 g হাইড্রোজেন গ্যাসের আয়তন, V_0

$$\frac{1000}{0{\cdot}0895}\times 2=22{\cdot}35\times 10^3\ cm^3 \quad (\text{প্রায়})$$

চাপ, $P_0=76\ cmHg=76\times 13{\cdot}6\times 981=1{\cdot}013\times 10^6\ dyn/cm^2$

এবং উষ্ণতা, $T_0=0°C=273\ K$

কাজেই, গ্যাস ধ্রুবক, $R=\frac{P_0V_0}{T_0}=\frac{1{\cdot}013\times 10^6\times 22{\cdot}35\times 10^3}{273}$

$=8{\cdot}29\times 10^7\ erg\ K^{-1}$

উদাহরণ 4.6 0°C উষ্ণতায় এবং 76 cmHg চাপে 1 লিটার গ্যাসের ভর 1·562 g ; 250°C উষ্ণতায় এবং 78 cmHg চাপে একই আয়তন গ্যাসের ভর কত হইবে ?

[The mass of 1 litre of a gas at 0°C and at a pressure of 76 cmHg is 1·562 g. What is the mass of the same volume of the gas at 250°C and at a pressure of 78 cmHg ?]

সমাধান ঃ ধরি, 250°C উষ্ণতায় এবং 78 cmHg চাপের 1 লিটার গ্যাস 0°C উষ্ণতায় এবং 76 cmHg চাপে V লিটার আয়তন লাভ করে।

গ্যাসের সমীকরণ হইতে পাই, $\frac{1\times 78}{(250+273)}=\frac{V\times 76}{273}$

$\therefore\quad V=\frac{273\times 78}{76\times 523}$ লিটার $=0{\cdot}536$ লিটার (প্রায়)

কাজেই, এই গ্যাসের ভর $=V\times 1{\cdot}562$ g

$=0{\cdot}536\times 1{\cdot}562\ g=0{\cdot}837\ g$ (প্রায়)

উদাহরণ 4.7 0°C উষ্ণতায় একটি পাত্রে কিছু পরিমাণ বায়ু রহিয়াছে। চাপ অপরিবর্তিত রাখিয়া উহাকে কোন্ উষ্ণতায় তুলিলে $\frac{1}{5}$ পরিমাণ বায়ু পাত্র হইতে বাহির হইয়া যাইবে ?

[A vessel contains some gas at 0°C. To what temperature must it be heated in order to expel $\frac{1}{5}$th of the gas from the vessel, pressure remaining constant.]

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে চাপ অপরিবর্তিত রহিয়াছে বলিয়া লেখা যায়,

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{T_1}{T_2}$$

এখানে, গ্যাসের প্রাথমিক উষ্ণতা, $T_1=0+273=273\ K$

কাজেই, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{273}{T_2}$ বা, $\frac{V_2-V_1}{V_2}=\frac{T_2-273}{T_2}$ ... (i)

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\frac{V_2-V_1}{V_2}=\frac{1}{5}$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\frac{T_2-273}{T_2}=\frac{1}{5} \quad \text{বা,} \quad 5T_2-5\times 273=T_2$$

$$\text{বা,} \quad 4T_2=5\times 273 \quad \text{বা,} \quad T_2=341{\cdot}25\ K$$

কাজেই, সেলসিয়াস স্কেলে গ্যাসের অন্তিম উষ্ণতা $=341{\cdot}25-273=68{\cdot}25°C$

উদাহরণ 4.8 20°C উষ্ণতায় এবং 76 cmHg চাপে জলের উপর 1 লিটার গ্যাস সংগ্রহ করা হইল। ঐ স্থানটি জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত ছিল। স্বাভাবিক উষ্ণতা ও চাপে শুষ্ক অবস্থায় ঐ গ্যাসের আয়তন নির্ণয় কর। 20°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ 1·74 cmHg।

[1 litre of gas was collected in a closed space above water at 20°C and at a pressure of 76 cmHg. The space was saturated with water vapour. Calculate the volume of the gas when dry at normal temperature and pressure. The saturated vapour pressure of water at 20°C is 1·74 cmHg.]

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে, আবদ্ধ (শুষ্ক) গ্যাসের চাপ+বাষ্পের চাপ (1·74 cmHg) $=76$ cmHg

কাজেই শর্তানুসারে, আবদ্ধ গ্যাসের চাপ, $P_1=(76-1{\cdot}74)$ cmHg $=74{\cdot}26$ cmHg

আবদ্ধ গ্যাসের আয়তন, $V_1=1$ লিটার $=1000\ cm^2$

গ্যাসের উষ্ণতা, $T_1=(20+273)=293$ K

ধরি, স্বাভাবিক চাপ (76 cmHg) এবং উষ্ণতায় (273 K) শুষ্ক বায়ুর আয়তন $=V\ cm^3$

$$\frac{76\times V}{273}=\frac{74{\cdot}26\times 1000}{293}$$

$$\text{বা,} \quad V=\frac{74{\cdot}26\times 1000\times 273}{293\times 76}=910{\cdot}4\ cm^3$$

উদাহরণ 4.9 একটি মোটরগাড়ির টায়ারের আভ্যন্তরীণ আয়তন 15 লিটার। ইহাতে 17°C উষ্ণতাবিশিষ্ট এবং বায়ুমণ্ডলীর চাপের 2·5 গুণ চাপের বায়ু রহিয়াছে। উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইয়া যখন 37°C হইল তখন টায়ারের আয়তন হইল 15·5 লিটার। $lb\text{-}wt/in^2$ এককে টায়ারের বায়ুর চাপ নির্ণয় কর। (বায়ুমণ্ডলীর চাপ $=14{\cdot}5\ lb\text{-}wt/in^2$)

[The internal volume of a motor tyre is 15 litres. It contains air at 17°C at a pressure 2·5 times the atmospheric pressure. When the temperature is raised to 37°C, the volume of the tyre becomes 15·5 litres. Find the consequent pressure in $lb\text{-}wt/in^2$ unit. (Atmospheric pressure $=14{\cdot}5\ lb\text{-}wt/in^2$)]

সমাধান ঃ টায়ারে আবদ্ধ বায়ুর প্রাথমিক চাপ, $P_1=2{\cdot}5\times14{\cdot}5$ lb-wt/in²
আয়তন, $V_1=15$ লিটার ; উষ্ণতা, $T_1=17+273=290$ K
অন্তিম আয়তন, $V_2=15{\cdot}5$ লিটার
অন্তিম উষ্ণতা, $T_2=37+273=310$ K
মনে করি, অন্তিম চাপ $=P_2$

এখন, $\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}$ বা, $P_2=\frac{P_1V_1}{T_1}\times\frac{T_2}{V_2}$

$=\frac{2{\cdot}5\times14{\cdot}5\times15}{290}\times\frac{310}{15{\cdot}5}=37{\cdot}5$ lb-wt/in²

উদাহরণ 4.10 14 cm³ আয়তনবিশিষ্ট একটি বায়ু-বুদ্‌বুদ্‌ 34 m গভীর একটি হ্রদের তলদেশ হইতে হ্রদের উপরিতলে উঠিয়া আসিল। হ্রদের তলদেশের উষ্ণতা 7°C এবং হ্রদের উপরিতলের উষ্ণতা এবং চাপ যথাক্রমে 27°C ও 75 cmHg। বায়ু-বুদ্‌বুদ্‌টি যখন হ্রদের উপরিতলে আসে তখন উহার আয়তন নির্ণয় কর। পারদের ঘনত্ব $=13{\cdot}6$ g/cm³।

[An air bubble of volume 14 cm³ rose to the surface from the bottom of a lake 34 m deep. The temperature at the bottom was 7°C and the temperature and pressure at the surface were 27°C and 75 cmHg respectively. Find the volume of the air bubble when it reaches the surface of the lake. Density of mercury is 13·6 g/cm³.]

সমাধান ঃ 34 m জলস্তম্ভের চাপ $=\frac{3400}{13{\cdot}6}$ cmHg $=250$ cmHg

কাজেই, হ্রদের তলদেশের চাপ, $P_1=(75+250)=325$ cmHg
হ্রদের তলদেশের উষ্ণতা, $T_1=(7+273)$ K $=280$ K
হ্রদের তলদেশে বায়ু-বুদ্‌বুদের আয়তন, $V_1=14$ cm³
হ্রদের উপরিতলে চাপ, $P_2=75$ cmHg এবং উষ্ণতা, $T_2=(27+273)=300$ K
মনে করি, নির্ণেয় আয়তন $=V_2$

এখন, $\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}$

বা, $V_2=\frac{P_1V_1}{T_1}\times\frac{T_2}{P_2}=\frac{325\times14}{280}\times\frac{300}{75}=65$ cm³

উদাহরণ 4.11 27°C উষ্ণতাবিশিষ্ট এবং 2 অ্যাটমস্‌ফিয়ার চাপের 1 লিটার হিলিয়াম গ্যাসকে এমনভাবে উত্তপ্ত করা হইল যাহাতে উহার আয়তন এবং চাপ— উভয়ই দ্বিগুণিত হইল। চূড়ান্ত উষ্ণতাটি নির্ণয় কর।

[A litre of helium at 27°C and 2 atmospheric pressure is so heated that its volume and pressure are both doubled. Find the final temperature.]

সমাধান ঃ আমরা জানি যে, $\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}$

বা, $T_2=\frac{P_2V_2}{P_1V_1}.T_1$ ... (i)

শর্তানুসারে, $P_2=2P_1$ এবং $V_2=2V_1$

$T_1=(27+273)=300$ K

$\therefore$ (i) হইতে পাই, $T_2=\frac{(2P_1)\times(2V_1)}{P_1V_1}\times 300\text{ K}=1200\text{ K}$

$\therefore$ গ্যাসের অন্তিম উষ্ণতা $=(1200-273)=927^\circ$C

উদাহরণ 4.12 1000 lb-wt/in² চাপ সহ্য করিবার উপযোগী করিয়া একটি হাইড্রোজেন সিলিণ্ডার তৈয়ারী হইয়াছে। যখন উষ্ণতা 15°C তখন ঐ সিলিণ্ডারে 240 lb-wt in² চাপ প্রয়োগ করে। কোন্ উষ্ণতায় প্রথম বিস্ফোরণের সম্ভাবনা সৃষ্টি হয় ?

[A hydrogen cylinder is designed to withstand an internal pressure of 1000 lb-wt/in². When the temperature is 15°C the hydrogen gas in the cylinder exerts a pressure of 240 lb-wt/in². At what temperature does the danger of an explosion first set in ?]

সমাধান ঃ হাইড্রোজেন সিলিণ্ডারটির প্রসারণ উপেক্ষা করিয়া লেখা যায় যে,

$\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}$ (আয়তন স্থির বলিয়া)

এখানে, $P_1=240$ lb wt/in², $T_1=15+273=288$ K

$P_2=1000$ lb-wt/in²

কাজেই, $T_2=\frac{P_2}{P_1}\times T_1=\frac{1000}{240}\times 288=1200$ K

$\therefore$ নির্ণেয় উষ্ণতা $=1200-273=927^\circ$C

উদাহরণ 4.13 একটি পর্বতের উপরে থার্মোমিটারের পাঠ 7°C এবং ব্যারোমিটারের পাঠ 70 cmHg ; ঐ পাহাড়ের তলদেশে থার্মোমিটার ও ব্যারোমিটারের পাঠ যথাক্রমে 27°C এবং 76 cmHg। পর্বতের উপরে এবং নিচে বায়ুর-ঘনত্বের তুলনা কর।

[At the top of a mountain a thermometer reads 7°C and a barometer reads 70 cmHg. At the bottom of the mountain they read 27°C and 76 cmHg respectively. Compare the density of air at the top with that at the bottom of the mountain.]

সমাধান ঃ মনে করি, পর্বতের উপরে *m* ভরবিশিষ্ট গ্যাসের চাপ, আয়তন এবং উষ্ণতা যথাক্রমে P_1, V_1 এবং T_1। অনুরূপভাবে, পর্বতের তলদেশে *m* ভরবিশিষ্ট গ্যাসের চাপ, আয়তন এবং উষ্ণতা যথাক্রমে P_2, V_2 এবং T_2।

গ্যাসের সমীকরণ হইতে লেখা যায়, $P_1V_1/T_1=P_2V_2/T_2$ ... (i)

পর্বতের উপরে এবং তলদেশে বায়ুর ঘনত্ব যথাক্রমে ρ_1 এবং ρ_2 হইলে লেখা যায়,

$$\rho_1=\frac{m}{V_1} \text{ এবং } \rho_2=\frac{m}{V_2}$$

কাজেই, সমীকরণ (i) হইতে লেখা যায়,

$$\frac{P_1}{T_1}\cdot\frac{m}{\rho_1}=\frac{P_2}{T_2}\cdot\frac{m}{\rho_2} \quad \text{বা,} \quad \frac{P_1}{P_2}=\frac{\rho_1 T_2}{\rho_2 T_1} \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

এখানে $P_1=70$ cmHg, $P_2=76$ cmHg,

$T_1=7+273=280$ K এবং $T_2=27+273=300$ K

$\therefore$ সমীকরণ (ii) হইতে পাই, $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{70\times 300}{76\times 280}=\frac{75}{76}$

উদাহরণ 4.14 তৈয়ারী করিবার সময় 250 cm³ আয়তনবিশিষ্ট একটি বৈদ্যুতিক বাল্‌বকে 27°C উষ্ণতায় 10^{-3} mmHg চাপে সীল করা হইল। এই বাল্‌বে বায়ুর অণুর সংখ্যা নির্ণয় কর। (অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা $=6\cdot0\times10^{23}$)।

[An electric bulb of volume 250 cm³ was sealed off during manufacture at a pressure of 10^{-3} mmHg at 27°C. Compute the number of air molecules contained in the bulb. (Avagadro number $=6\cdot0\times10^{23}$)]

সমাধান : গ্যাসের সমীকরণ হইতে লেখা যায়,

$$\frac{PV}{T}=\frac{m}{M}\cdot R \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

$m=$ গ্যাসের ভর এবং M হইল গ্যাসের আণবিক ওজন

এখন, অ্যাভোগাড্রো সংখ্যাকে N দ্বারা এবং আলোচ্য গ্যাসের অণু-সংখ্যাকে n দ্বারা সূচিত করিলে লেখা যায়, $\frac{m}{M}=\frac{n}{N}$ $\qquad \cdots \quad$ (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $\frac{PV}{T}=\frac{n}{N}R$

কাজেই, আলোচ্য গ্যাসের অণু-সংখ্যা, $n=\frac{PV}{T}\times\frac{N}{R}$

এখানে $P=10^{-3}$ mmHg $=10^{-4}\times13\cdot6\times980$ dyn/cm²

$V=250$ cm³, $T=27+273=300$ K

$R=8\cdot3\times10^{7}$ erg K⁻¹ এবং $N=6\cdot0\times10^{23}$

$$\therefore \quad n=\frac{10^{-4}\times13\cdot6\times980\times250\times6\cdot0\times10^{23}}{300\times8\cdot3\times10^{7}}=8\cdot0\times10^{15}$$

উদাহরণ 4.15 *একটি প্রকোষ্ঠে P_1 চাপে m_1 ভরবিশিষ্ট গ্যাস এবং অপর* একটি প্রকোষ্ঠে P_2 চাপে m_2 ভরবিশিষ্ট গ্যাস আছে। এই প্রকোষ্ঠ দুইটির মধ্যে যাতায়াতের পথ উন্মুক্ত করিলে উৎপন্ন গ্যাস মিশ্রণের চাপ কত হইবে নির্ণয় কর।

[A chamber contains a gas mass m_1 at a pressure P_1 and another chamber contains a gas of mass m_2 at a pressure P_2.

Find the pressure of the mixture when two chambers are put into communication.]

সমাধান ঃ মনে করি, প্রথম প্রকোষ্ঠে m_1 ভরবিশিষ্ট গ্যাসে আয়তন V_1 এবং দ্বিতীয় প্রকোষ্ঠে m_2 ভরবিশিষ্ট গ্যাসের আয়তন V_2। ধরা হইল যে, উষ্ণতা অপরিবর্তিত রহিয়াছে। উষ্ণতা অপরিবর্তিত রাখিয়া দ্বিতীয় পাত্রের গ্যাসের চাপ P_2 হইতে পরিবর্তন করিয়া P_1 করিলে উহার আয়তন পরিবর্তিত হইয়া V হয়।

কাজেই, বয়েলের সূত্রানুসারে $P_2V_2=P_1V'$

বা, $V'=\frac{P_2}{P_1}\cdot V_2$ ... (i)

সুতরাং, P_1 চাপে V_1 আয়তন গ্যাস+P_2 চাপে চাপে V_2 আয়তন গ্যাস

$=P_1$ চাপে $\left(V_1+\frac{P_2}{P_1}\cdot V_2\right)$ আয়তন গ্যাস

দুই প্রকোষ্ঠের মধ্যবর্তী স্টপ্-কক খুলিয়া দিলে পাত্রদ্বয়ের মোট আয়তন হয় (V_1+V_2)। এই সময় গ্যাসের চাপ=P (ধরি)।

উষ্ণতা অপরিবর্তিত রহিয়াছে বলিয়া বয়েলের সূত্র হইতে পাই,

$$P_1\times\left(V_1+\frac{P_2}{P_1}\cdot V_2\right)=P.(V_1+V_2)$$

বা, $P=\frac{P_1V_1+P_2V_2}{V_1+V_2}$ ... (ii)

উষ্ণতা অপরিবর্তিত আছে বলিয়া লেখা যায়, $P_1V_1=K.m_1$ ... (iii)

এবং $P_2V_2=K.m_2$ ... (iv)

$\therefore\ V_1=K\left(\frac{m_1}{P_1}\right)$ এবং $V_2=K\left(\frac{m_2}{P_2}\right)$

$\therefore\ V_1V_2=K\left(\frac{m_1}{P_1}+\frac{m_2}{P_2}\right)=K\left(\frac{m_1P_2+m_2P_1}{P_1P_2}\right)$ ... (v)

(iii) এবং (iv) হইতে লেখা যায়,

$P_1V_1+P_2V_2=K(m_1+m_2)$ ... (vi)

(ii), (iv) এবং (v) হইতে,

$$P=\frac{K(m_1+m_2)}{\left(\frac{m_1P_2+m_2P_1}{P_1P_2}\right)}=\frac{P_1P_2(m_1+m_2)}{(m_1P_2+m_2P_1)}$$

উদাহরণ 4.16 দুইটি কাচের বাল্‌ব A এবং B-এর আয়তন যথাক্রমে 500 cm³ এবং 200 cm³ ; ইহারা একটি ছোট কৈশিক নল দ্বারা পরস্পর যুক্ত। সীল-করা এই যন্ত্রে 76 cmHg চাপে এবং 27°C উষ্ণতায় শুষ্ক বায়ু আবদ্ধ আছে। অপর বাল্‌বটিকে 27°C উষ্ণতায় রাখিয়া যদি বৃহত্তর বাল্‌বটিকে 127°C-এ তোলা হয় তাহা হইলে আলোচ্য আবদ্ধ বায়ুর চাপ কত হইবে ?

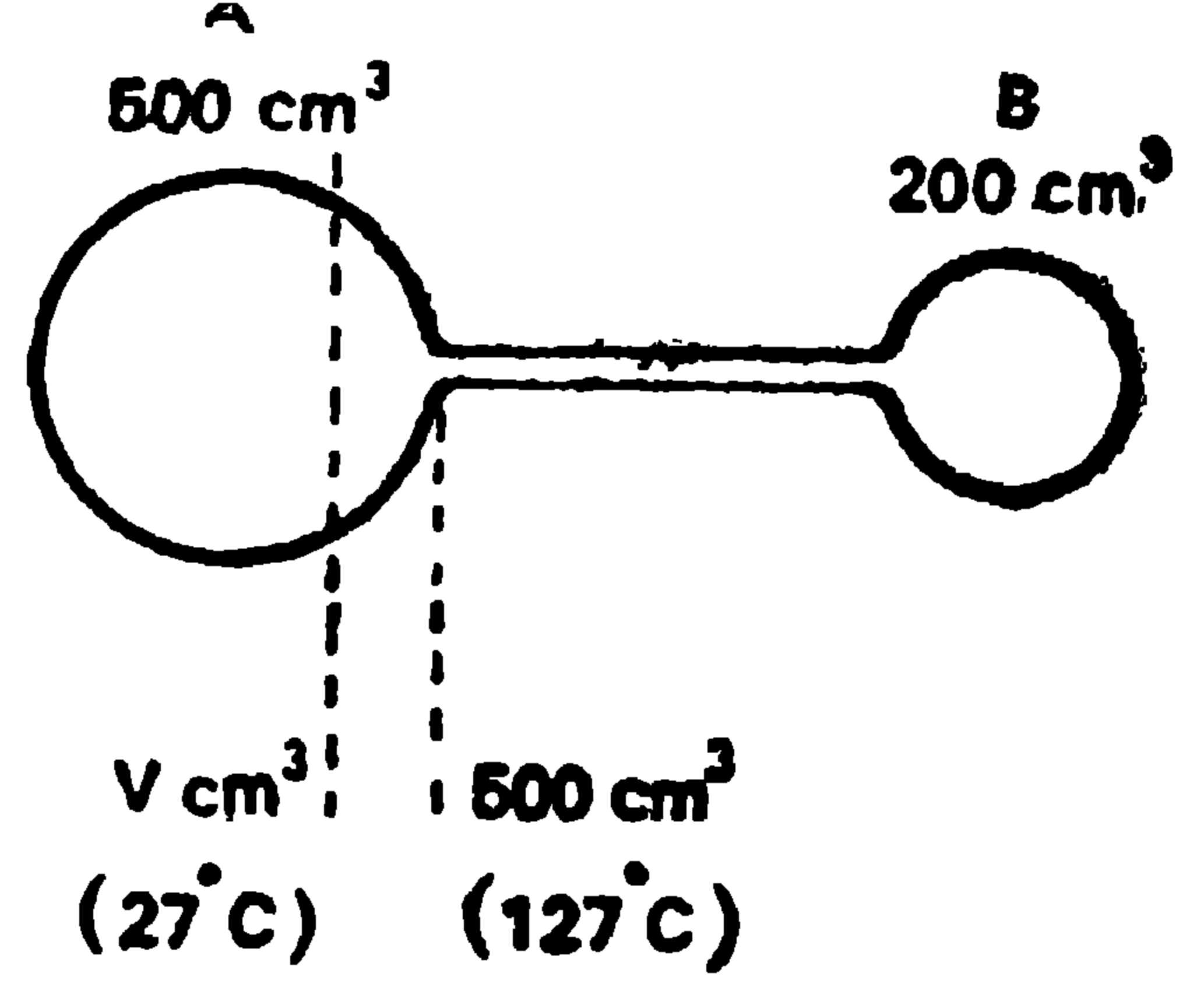
[Two glass bulbs, A and B, of volumes 500 cm³ and 200 cm³ *respectively* are connected by a short capillary tube and the

apparatus, which is sealed, contains dry air at a pressure of 76 cmHg and at a temperature of 27°C. What will be the pressure of the air in the apparatus if the temperature of the larger bulb is raised to 127°C, keeping the temperature of the other bulb at 27°C ?]

সমাধান : A বাল্‌বকে উত্তপ্ত করার ফলে এই বাল্‌ব হইতে কিছু পরিমাণ বায়ু B নলে চলিয়া যাইবে। মনে করি, 27°C উষ্ণতাবিশিষ্ট V cm^3 আয়তন বায়ু 127°C উষ্ণতায় সম্পূর্ণ A বাল্‌বকে পূর্ণ করে। ধরি, এই সময় চাপ P cmHg হইলে লেখা যায়,

চিত্র 4.1

$$\frac{P \times 500}{(127+273)} = \frac{76 \times V}{(27+273)}$$

বা, $\frac{P \times 500}{400} = \frac{76 \times V}{300}$ ... (i)

27°C উষ্ণতার ও 76 cmHg চাপের { (500−V)+200 } cm^3 আয়তনের বায়ু P cmHg চাপে 200 cm^3 আয়তন (B বাল্‌বের আয়তন) লাভ করে। কাজেই লেখা যায়, $\{(500-V)+200\} \times 76 = 200 \times P$

বা, $(700-V) \times 76 = 200 \times P$

বা, $76V = 700 \times 76 - 200P$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে V অপনয়ন করিয়া পাই,

$$P \times \frac{500}{400} = \frac{700 \times 76 - 200P}{300} \quad বা, \ P = \frac{28 \times 76}{23} = 92{\cdot}5 \text{ cmHg}$$

উদাহরণ 4.17 3 লিটার এবং 1 লিটার আয়তনের দুইটি কাচের বাল্‌বকে একটি কৈশিক নল দ্বারা যুক্ত করা হইল। যখন ইহা 76 cmHg চাপ-সম্পন্ন এবং 30°C উষ্ণতাবিশিষ্ট বায়ু দ্বারা পূর্ণ আছে তখন ইহাকে গ্যাসনিরুদ্ধভাবে সীল করা হইল। যদি 3 লিটার আয়তনবিশিষ্ট বাল্‌বটিকে 100°C উষ্ণতার বাষ্পে নিমজ্জিত করা হয় এবং অপরটিকে 30°C উষ্ণতাতেই থাকে তাহা হইলে বাল্‌বগুলিতে বায়ুর চাপ কত হইবে ? (3 লিটার আয়তনের বাল্‌টির আয়তন-বৃদ্ধি উপেক্ষা কর)

[Two glass bulbs of volume 3 litres and 1 litre respectively are connected by a capillary tube. Air at a pressure of 76 cmHg and at 30°C is contained in the apparatus which is then hermetically sealed. If the 3 litre bulb be immersed in steam at 100°C, the other remaining at 30°C, what would be the air pressure in the bulbs ? (Neglect the increase in volume of the 3 litre bulbs.)]

সমাধান : প্রথম ক্ষেত্রে, বায়ুর চাপ, $P_1 = 76$ cmHg ; বায়ুর মোট আয়তন $=(3+1)=4$ লিটার এবং উষ্ণতা $=30+273=303$°C

আমরা জানি যে, $PV = nRT$ বা, $\frac{PV}{RT} = n$ ... (i)

প্রথম ক্ষেত্রে, বায়ুর চাপ, $P_1=76$ cmHg ; আয়তন, $V_1=(3+1)=4$ লিটার ; উষ্ণতা, $T_1=273+30=303$ K

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, বৃহত্তর বাল্‌বটিতে বিদ্যমান বায়ুর আয়তন $V_2=3$ লিটার এবং উষ্ণতা, $T_2=(273+100)$ বা 373 K। এই সময় ক্ষুদ্রতর বাল্‌বটিতে বিদ্যমান বায়ুর আয়তন $V_3=1$ লিটার এবং উষ্ণতা, $T_3=273+30=303$ K।

ধরি, এক্ষেত্রে বায়ুর চাপ $=P$ cmHg

এখন, প্রথম ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে আবদ্ধ বায়ুর গ্রাম-অণু সংখ্যার কোনরূপ পরিবর্তন হয় না বলিয়া লেখা যায়,

$$\frac{P_1V_1}{RT_1}=\frac{PV_2}{RT_2}+\frac{PV_3}{RT_3} \quad \text{বা,} \quad \frac{P_1V_1}{T_1}=P\left(\frac{V_2}{T_2}+\frac{V_3}{T_3}\right)$$

$$\text{বা,} \quad \frac{76\times4}{303}=P\left(\frac{3}{373}+\frac{1}{303}\right) \quad \text{বা,} \quad \frac{76\times4}{303}=P\left(\frac{909+373}{373\times303}\right)$$

$$\text{বা,} \quad P=\frac{76\times4\times373}{1282}\text{ cmHg}=88{\cdot}44\text{ cmHg}$$

বায়ুমণ্ডলের চাপ-সংক্রান্ত অঙ্ক

উদাহরণ 4.18 একটি ব্যারোমিটার নলের প্রস্থচ্ছেদ 1 cm^2। ইহার টরিসেলীর শূন্যস্থানের দৈর্ঘ্য 6 cm। এই শূন্যস্থানে কিছুটা বায়ু প্রবেশ করায় পারদস্তম্ভের উচ্চতা 75 cm হইতে 65 cm-এ নামিয়া আসিল। ব্যারোমিটারে যে-বায়ু প্রবেশ করিল স্বাভাবিক বায়ুমণ্ডলীর চাপে উহার আয়তন কত ?

[The area of cross section of a barometer tube is 1 cm^2. The length of its Torricellian vacuum is 6 cm. When some amount of air is introduced into this vacuum the height of the mercury column falls from 75 cm to 65 cm. What is the volume of the air introduced at standard atmospheric pressure ?]

সমাধান : ব্যারোমিটার নলে বায়ু প্রবেশ করিবার ফলে পারদস্তম্ভের উচ্চতা 75 cm হইতে 65 cm-এ আসিল। কাজেই, আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য $=16$ cm (চিত্র 4.2)।

ব্যারোমিটার নলের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল 1 cm^2 বলিয়া আবদ্ধ বায়ুর আয়তন

$=16\times1=16$ cm^3

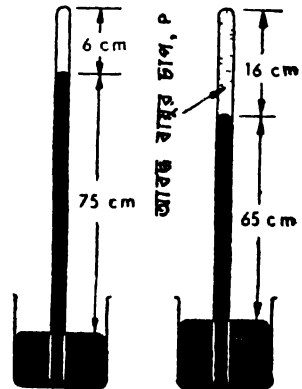
এই অবস্থায় আবদ্ধ বায়ুর উপর ক্রিয়াশীল চাপের মান P হইলে লেখা যায় যে,

(P+65) cm পারদস্তম্ভের চাপ $=75$ cm পারদস্তম্ভের চাপ (বায়ুমণ্ডলের চাপ)

$\therefore\ P=(75-65)$ বা, 10 cmHg

মনে করি, স্বাভাবিক বায়ুমণ্ডলীয় চাপে অর্থাৎ 76 cmHg চাপে আবদ্ধ বায়ুর আয়তন $=V$ cm^3

$\therefore$ বয়েলের সূত্রানুসারে, $76\times V=10\times16$

বা, $V=\frac{10\times16}{76}=2{\cdot}105$ cm^3

চিত্র 4.2

উদাহরণ 4.19 একটি উচ্চ অট্টালিকার পাদদেশে এবং শীর্ষে একটি ব্যারোমিটারের পাঠ যথাক্রমে 760 mmHg এবং 750 mmHg। বায়ুর গড় ঘনত্ব নির্ণয় করিবার জন্য অ্যাভোগাড্রোর প্রকল্প প্রয়োগ কর এবং অট্টালিকার উচ্চতা নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, পারদের ঘনত্ব $=13\cdot7$ g/cm^3।

[The barometer readings at the foot and at the top of a tall building are 760 mmHg and 750 mmHg respectively. Apply Avagadro's hypothesis to find the mean density of air assuming the temperature to be 0°C and hence find the height of the building. Given that the density of mercury is 13·7 g/cm^3.]

সমাধান ঃ বায়ুতে অক্সিজেন ও নাইট্রোজেনের অনুপাত প্রায় 1 : 4

কাজেই, 1 গ্রাম-মোল বায়ুতে $\frac{1}{5}$ গ্রাম-মোল অক্সিজেন এবং $\frac{4}{5}$ গ্রাম-মোল নাইট্রোজেন থাকে।

1 গ্রাম মোল অক্সিজেনের ভর 32 g এবং এক গ্রাম-মোল নাইট্রোজেনের ভর 28 g। কাজেই, 1 গ্রাম-মোল বায়ুর ওজন

$=\frac{1}{5}$ গ্রাম-মোল অক্সিজেনের ওজন $+\frac{4}{5}$ গ্রাম-মোল নাইট্রোজেনের ওজন

$=(\frac{1}{5}\times32+\frac{4}{5}\times28)$ g $=28\cdot8$ g

অট্টালিকার মধ্যবর্তী বায়ুর গড় চাপ, $p=(760+750)/2=755$ mmHg

ধরি, স্বাভাবিক উষ্ণতা ও চাপে (N.T.P.) এক গ্রাম-মোল বায়ুর আয়তন V_0 এবং 0°C উষ্ণতায় এবং p চাপে উহার আয়তন V হইলে লেখা যায়,

$$760\times V_0=pV=755V \quad \text{বা,} \quad V=\frac{760\times V_0}{755}$$

অ্যাভোগাড্রোর প্রকল্প-অনুসারে, $V_0=22400$ cm^3

$$\therefore \quad V=\frac{760\times22400}{755}=22548\cdot34 \text{ cm}^3$$

কাজেই, অট্টালিকার মধ্যবর্তী বায়ুর গড় ঘনত্ব, $\rho=\frac{28\cdot8}{V}$ g/cm^3

$$=\frac{28\cdot8}{22548\cdot34}=0\cdot001277 \text{ g/cm}^3$$

মনে করি, বাড়ির উচ্চতা h cm। তাহা হইলে ইহার পাদদেশের বায়ুমণ্ডলের চাপ = ইহার শীর্ষে বায়ুমণ্ডলের চাপ + h উচ্চতাবিশিষ্ট বায়ুস্তম্ভের চাপ

বা, $76\times13\cdot7\times g=75\times13\cdot7\times g+h\times\rho\times g$

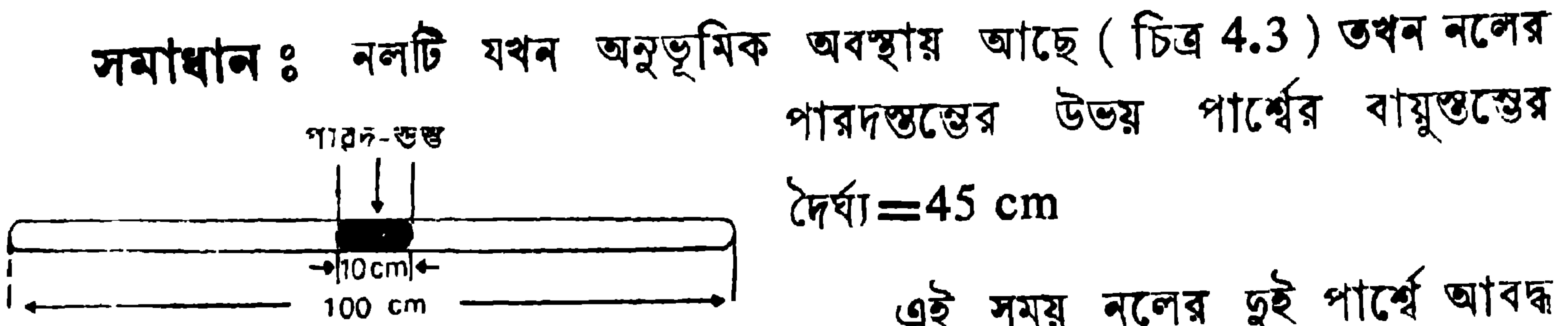
বা, $h=\frac{(76-75)\times13\cdot7}{\rho}$ cm $=\frac{13\cdot7}{0\cdot001277}=10728$ cm (প্রায়)

$=107\cdot28$ m (প্রায়)

উদাহরণ 4.20 দুই প্রান্ত সীল-করা একটি সরু অনুভূমিক নলের মধ্যস্থলে 10 cm দীর্ঘ একটি পারদস্তম্ভ আছে। উভয় অর্ধে 76 cmHg চাপে বায়ু আবদ্ধ

আছে। যদি নলটিকে উল্লম্ব অবস্থায় রাখা হয় তাহা হইলে পারদস্তম্ভটি কতটা সরিবে ? নলের দৈর্ঘ্য 100 cm।

[In the middle of a narrow horizontal tube sealed at both ends is a column of mercury of 10 cm in length. Both halves of the tube contain air at a pressure of 76 cm of mercury. By what distance will the mercury column be displaced if the tube is held vertically ? The length of tube is 100 cm.]

সমাধান ঃ নলটি যখন অনুভূমিক অবস্থায় আছে (চিত্র 4.3) তখন নলের পারদস্তম্ভের উভয় পার্শ্বের বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য$=45$ cm

চিত্র 4.3

এই সময় নলের দুই পার্শ্বে আবদ্ধ গ্যাসের চাপ$=76$ cm পারদস্তম্ভের চাপ।

মনে করি, যখন নলটিকে খাড়াভাবে রাখা হইল তখন পারদস্তম্ভ x cm নিচের দিকে নামিয়া আসিল (চিত্র 4.4)। অর্থাৎ, পারদের নিচের গ্যাসের আয়তন

$=(45-x)\times\alpha$ cm^3 [α cm$^2=$নলের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল]

পারদের উপরের গ্যাসের আয়তন$=(45+x)\times\alpha$

উপরের অংশের চাপ, P cmHg এবং নিচের অংশের গ্যাসের চাপ P_1 cmHg.

$\therefore$ বয়েলের সূত্রানুসারে,

$P_1\times(45-x)\,\alpha=45\times76\alpha$ ... (i)

এবং $P\times(45+x)\,\alpha=45\times76\alpha$ ... (ii)

আবার, P_1 cmHg$=$P$+10$ cmHg

অর্থাৎ, $P_1=P+10$ ... (iii)

এখন, (i) এবং (ii) হইতে,

$P_1=\frac{45\times76}{45-x}$ এবং $P=\frac{45\times76}{45+x}$ ... (iv)

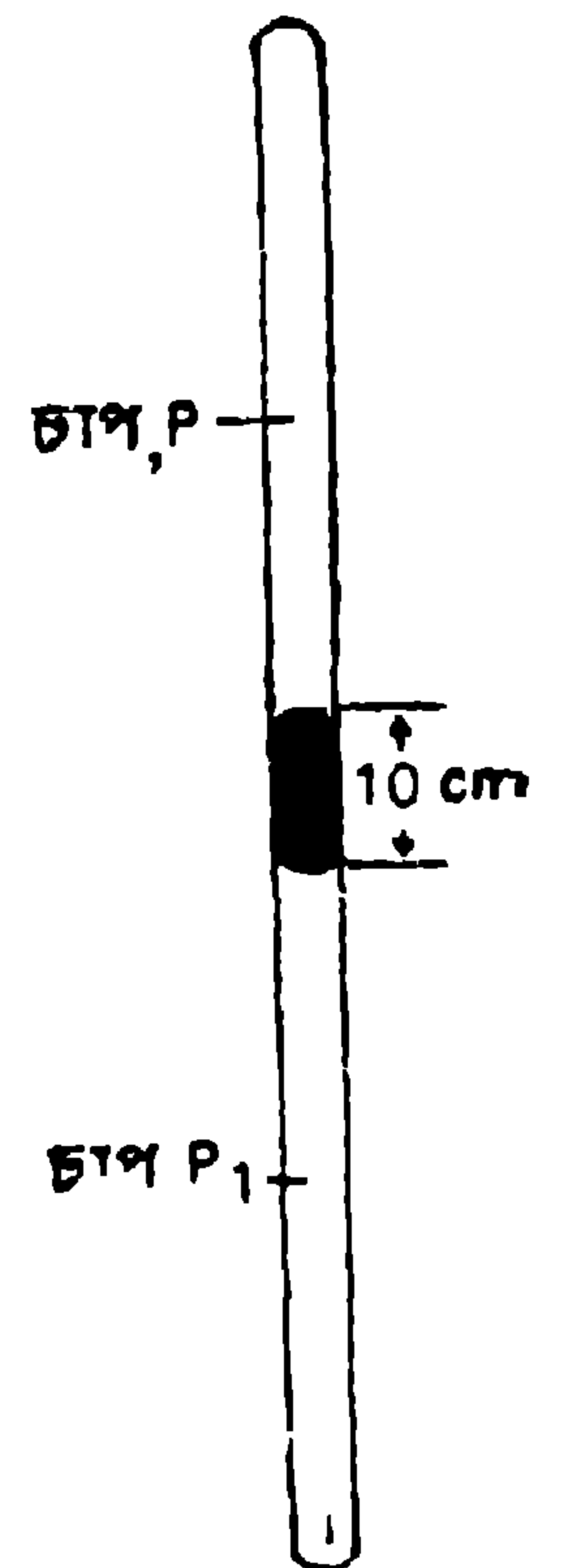
চিত্র 4.4

$\therefore$ (iii) ও (iv) হইতে

$\frac{45\times76}{45-x}=\frac{45\times76}{45+x}+10$ বা, $10=45\times76\left(\frac{1}{45-x}-\frac{1}{45+x}\right)$

বা, $1=\frac{9\times76x}{45^2-x^2}$ বা, $x^2+684x-2025=0$

বা, $x=\frac{-684\pm\sqrt{684^2+4\times2025}}{2}$

বা, $x=2{\cdot}95$ এবং $-686{\cdot}95$

কিন্তু x-এর মান ঋণাত্মক হইতে পারে না। কাজেই x-এর গ্রহণযোগ্য মান 2·95 cm

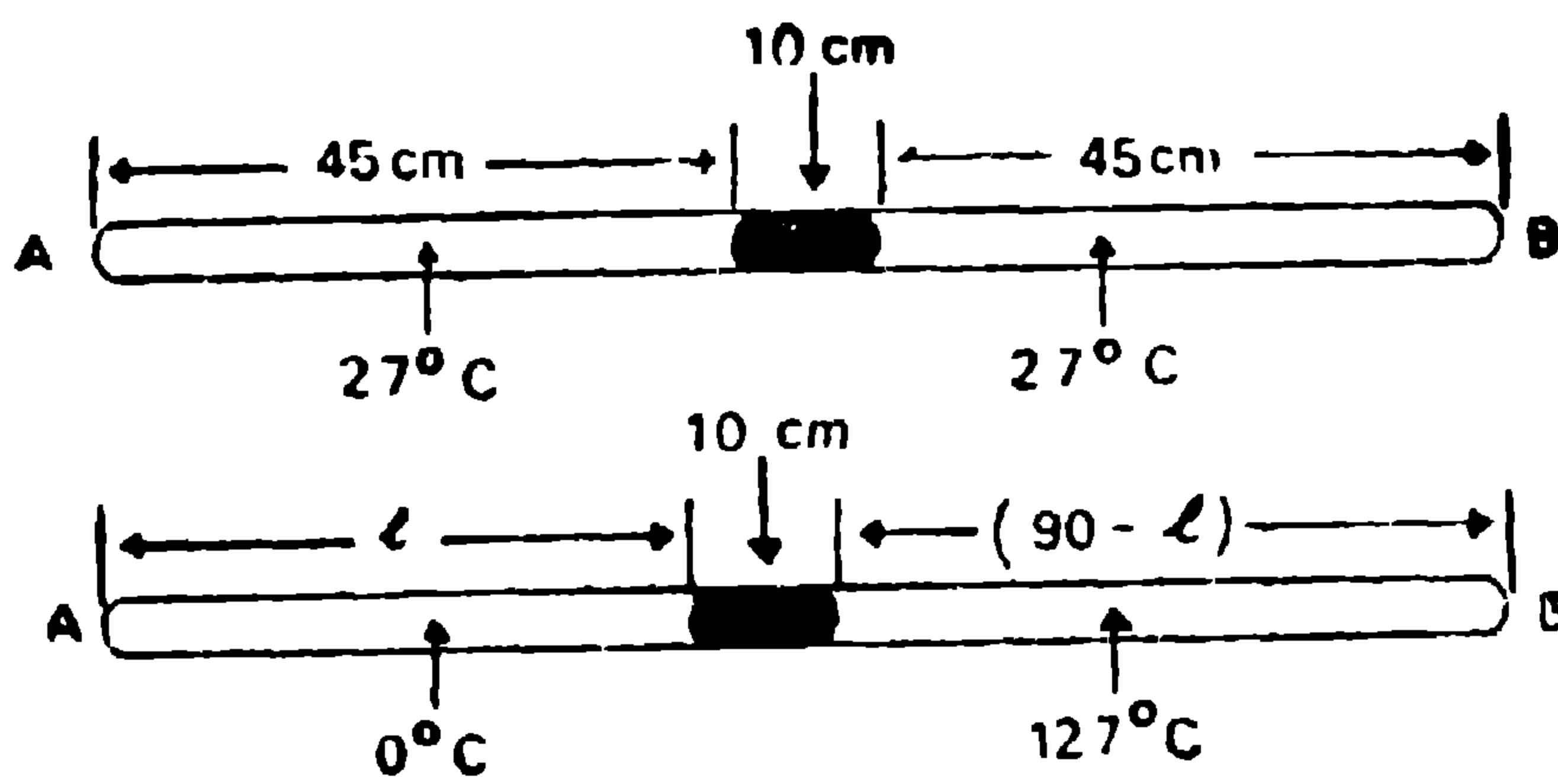
উদাহরণ 4.21 দুই প্রান্ত বন্ধ একটি কাচের কৈশিক নলের দৈর্ঘ্য 100 cm। ইহা 10 cm পারদসূত্রকে মধ্যস্থলে রাখিয়া অনুভূমিক অবস্থায় থাকে। নলের দুই পার্শ্বে (যাহারা দৈর্ঘ্যে পরস্পর সমান) 76 cmHg চাপে 27°C উষ্ণতাবিশিষ্ট বায়ু রহিয়াছে। নলটিকে অনুভূমিক অবস্থায় এমনভাবে রাখা হইল যাহাতে উহার এক পার্শ্বের বায়ুস্তম্ভ 0°C উষ্ণতায় এবং অপর পার্শ্বের বায়ুস্তম্ভ 127°C উষ্ণতায় থাকে। যে-বায়ুস্তম্ভটি 0°C উষ্ণতায় আছে উহার দৈর্ঘ্য এবং চাপ নির্ণয় কর। পারদ এবং কাচের আয়তনের পরিবর্তন উপেক্ষা কর।

[A capillary glass tube sealed at both ends is 100 cm long. It lies horizontally with the middle 10 cm containing mercury. The two ends of the tube (which are equal in length) contains air at 27°C and at a pressure of 76 cmHg. The tube is kept in a horizontal position such that the air column at one end is at 0°C and the other end is maintained at 127°C. Calculate the length of the air column which is at 0°C and its pressure. Neglect the change in volume of mercury and glass.]

সমাধান ঃ মনে করি, নলের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $=\alpha$ cm²

প্রারম্ভিক অবস্থায়, নলের দুই পার্শ্বে বায়ুর আয়তন,

$$V_1 = 45 \times \alpha \text{cm}^3$$

এবং উষ্ণতা $=27°C=(27+273)$ K $=300$ K

চিত্র 4.5

এই অবস্থায় নলে আবদ্ধ বায়ুর চাপ=76 cmHg ; নলের এক প্রান্তের গ্যাসের উষ্ণতা 0°C হইলে এবং অন্য প্রান্তের গ্যাসের উষ্ণতা 127°C হইলে নলের চাপ পরিবর্তিত হইবে। মনে করি, এই অবস্থায় উভয় প্রান্তে আবদ্ধ গ্যাসের চাপ=P

নলের যে-পার্শ্বের উষ্ণতা 0°C সেই পার্শ্বের বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য l cm হইলে অপর পার্শ্বের বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য হইবে $(90-l)$ cm

কাজেই, $\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}$ এই সমীকরণ হইতে লেখা যায়,

$$\frac{76\times 45\alpha}{300}=\frac{P\times l\alpha}{273} \qquad \cdots (i)$$

এবং $\frac{76\times 45\alpha}{300}=\frac{P\times(90-l\alpha)}{(127+273)}$ $\therefore \frac{l}{273}=\frac{(90-l)}{400}$ [(i) ও (ii) হইতে]

বা, $400l=(90-l)\ 273$ বা, $l=\frac{90\times 273}{673}=36{\cdot}5$ cm

(i) নং সমীকরণে l-এর এই মান বসাইয়া পাই,

$$\frac{P \times 36 \cdot 5}{273} = \frac{76 \times 45}{300} \quad \text{বা,} \quad P = 85 \cdot 3 \text{ cmHg}$$

ইহাই অন্তিম অবস্থায় দুই পার্শ্বের বায়ুর চাপ।

উদাহরণ 4.22 একটি পারদ ব্যারোমিটার ত্রুটিপূর্ণ বলিয়া জানা আছে (উহাতে পারদস্তম্ভের উপরে কিছু পরিমাণ বায়ু রহিয়াছে)। যখন কোন নির্ভুল ব্যারোমিটারের পাঠ 770 mm তখন ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারটির পাঠ 760 mm এবং যখন নির্ভুল ব্যারোমিটারের পাঠ 750 mm তখন ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারের পাঠ 742 mm। যখন নির্ভুল ব্যারোমিটারের পাঠ 770 mm তখন ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারে আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য কত ? যখন ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারের পাঠ 752 mm তখন নির্ভুল ব্যারোমিটারের পাঠ কত ? ধরিয়া লও যে, উষ্ণতা স্থির আছে।

[A mercury barometer is known to be defective (it contains some air in the space above mercury). When an accurate barometer reads 770 mm, the defective one reads 760 mm and when the accurate barometer reads 750 mm, the defective one reads 742 mm. What is the length of air column when the accurate barometer 770 mm ? What is the reading of the accurate barometer when the defective one reads 752 mm ? Assume that the temperature remains constant.] (I. I. T. Adm. Test, 1969)

সমাধান : মনে করি, যখন নির্ভুল ব্যারোমিটারের পাঠ 770 mm তখন ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারের আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য x mm।

ব্যারোমিটার নলের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল α mm^2 হইলে আবদ্ধ বায়ুর আয়তন, $V_1 = x\alpha \text{mm}^3$; এই সময় আবদ্ধ বায়ুর চাপ, $P_1 = (770 - 760) = 10$ mmHg

যখন ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারের পাঠ 742 mm তখন

বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য $= (x + 760 - 742)$ mm

$= (x + 18)$ mm

কাজেই, এই সময় বায়ুর আয়তন, V_2

$= (x + 18\ \alpha)$ mm^3

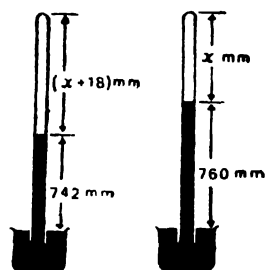
এবং আবদ্ধ বায়ুর চাপ, $P_2 = (750 - 742)$

$= 8$ mmHg

উষ্ণতা অপরিবর্তিত রহিয়াছে বলিয়া বয়েলের সূত্রানুসারে লেখা যায়,

$P_1 V_1 = P_2 V_2$ বা $x\alpha \times 10 = (x + 18)\alpha \times 8$

বা, $10x = 8(x + 18)$ বা, $x = 4 \times 18$ mm

$= 7 \cdot 2$ cm

(a) চিত্র 4.6 (b)

বায়ুমণ্ডলের চাপ= mmHg ব্যারোমিটারের পাঠ= 750 mmHg

সুতরাং, যখন নির্ভুল ব্যারোমিটারের পাঠ 770 mmHg তখন বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য 7·2 cm।

যখন ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারের পাঠ 752 mm তখন আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য $=(770+72-752)$ mm $=90$ mm

এই সময় আবদ্ধ বায়ুর চাপ h mmHg হইলে লেখা যায়,

$h\times 90\times \alpha=P_1V_1=72\times\alpha\times 10$ বা, $h=\frac{72\times 10}{90}=8$ mm

অর্থাৎ, আবদ্ধ বায়ুর চাপ 8 mmHg।

কাজেই, যখন ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারের পাঠ 752 mm তখন বায়ুমণ্ডলের চাপ বা, নির্ভুল ব্যারোমিটারের পাঠ $=(752+8)=760$ mm

উদাহরণ 4.23 দুই প্রান্তে আবদ্ধ একটি চোঙের আয়তনধারণক্ষমতা 22·4 লিটার। ইহাতে 0°C উষ্ণতায় 4 g হাইড্রোজেন গ্যাস আছে। যখন চোঙের উষ্ণতা 60°C-এ তোলা হইল তখন চাপের মান নির্ণয় কর। যদি হাইড্রোজেনকে 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 14 g নাইট্রোজেন গ্যাস দ্বারা প্রতিস্থাপিত করা যায় তাহা হইলে 100°C উষ্ণতায় এই গ্যাস-কর্তৃক প্রযুক্ত চাপ কত হইবে?

[A cylinder closed at both ends has a capacity of 22·4 litres and it contains 4 g of hydrogen gas at 0°C. Find the pressure when cylinder is raised to 60°C. If the hydrogen is replaced by 14 g of nitrogen at 0°C, what will be the pressure exerted by the gas at 100°C ?] (Jt. Entrance, 1968)

সমাধান: প্রমাণ বায়ুমণ্ডলীয় চাপ ও উষ্ণতায় 2 g হাইড্রোজেনের আয়তন 22·4 লিটার। কাজেই, 0°C উষ্ণতায় নলের মধ্যবর্তী 4 g হাইড্রোজেনের চাপ হইবে 2 অ্যাটমস্ফিয়ার।

উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইলে গ্যাসের চাপও বৃদ্ধি পাইবে। চোঙের প্রসারণ উপেক্ষা করিয়া বলা যায় যে, এক্ষেত্রে গ্যাসের আয়তন স্থির রহিয়াছে কাজেই লেখা যায়,

$$\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}$$

এখানে, $P_1=2$ অ্যাটমস্ফিয়ার, $T_1=273$ K, $T_2=60+273=333$ K

কাজেই, $P_2=\frac{2}{273}\times 333=2\cdot44$ অ্যাটমস্ফিয়ার

আবার, প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় 28 g নাইট্রোজেন গ্যাসের আয়তন 22·4 লিটার। কাজেই, প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় 22·4 লিটার আয়তনে 14 g নাইট্রোজেন থাকিলে চাপ হইবে $\frac{1}{2}$ বা 0·5 অ্যাটমস্ফিয়ার। ধরি উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইয়া 100°C হইলে চাপ হয় P_2

$$\therefore \frac{P_2}{T_2}=\frac{P_1}{T_1}$$

এখানে, $P_1=0\cdot5$ অ্যাটমস্ফিয়ার, $T_1=273$ K

এবং $T_2=100+273=373$

$$\therefore \quad P_2 = \frac{0{\cdot}5}{273} \times 373 = 0{\cdot}683 \text{ অ্যাটমস্‌ফিয়ার}$$

উদাহরণ 4.24 100 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি উল্লম্ব চোঙের নিম্নের প্রান্তটি বদ্ধ এবং অপর প্রান্তে একটি চলনক্ষম, ঘর্ষণহীন গ্যাসনিরুদ্ধ চাকৃতি লাগান আছে। চাকৃতিটির নিচে একটি আদর্শ গ্যাস আবদ্ধ আসে। প্রাথমিক অবস্থায় যখন চাকৃতিটি আবদ্ধ গ্যাস এবং বায়ুমণ্ডলের মধ্যে সাম্যে আছে তখন চোঙে আবদ্ধ গ্যাসস্তম্ভের দৈর্ঘ্য 90 cm। এখন চাকৃতির উপর ধীরে ধীরে পারদ ঢালা হইতে লাগিল এবং যখন চাকৃতিটি 32 cm নিচে নামিল, তখন পারদের ঠিক উপ্‌চাইয়া পড়িবার উপক্রম হইল। বায়ুমণ্ডলের চাপ নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, গ্যাসের উষ্ণতা স্থির রহিয়াছে এবং চাকৃতির বেধ এবং ওজন উপেক্ষণীয়।

[A vertical cylinder of total length 100 cm is closed at the lower end and is fitted with a movable, frictionless, gas tight disc at the other end. An ideal gas is trapped under the disc. Initially the height of the gas column is 90 cm, when the disc is in equilibrium between the gas and the atmosphere. Mercury is now slowly poured on the top of the disc and it just started overflowing when the disc has descended through 32 cm. Find the atmospheric pressure. Assume the temperature of the gas to remain constant and neglect the thickness and weight of the disc.]

(I. I. T. Adm. Test, 1971)

সমাধান ঃ মনে করি, বায়ুমণ্ডলের চাপ $= P$ cmHg

সাম্যাবস্থায় চোঙে আবদ্ধ গ্যাসের চাপ বায়ুমণ্ডলের চাপের সমান। এই সময় আবদ্ধ গ্যাসের আয়তন, $V = 90 \times \alpha$ cm^3

এখানে, α cm^2 = চোঙের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল

যখন চোঙটি হইতে পারদের উপ্‌চাইয়া পড়িবার উপক্রম তখন গ্যাসের আয়তন $V = (90-32)\alpha$ cm^3

$$= 58\alpha \text{ cm}^3$$

চিত্র 4.7

এই অবস্থায় চাকৃতির উপরিস্থ পারদস্তম্ভের দৈর্ঘ্য $= (10+32)$ cm $= 42$ cm

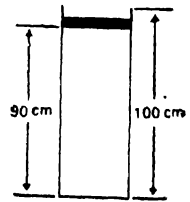
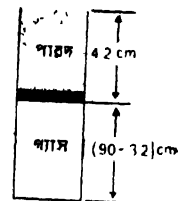
কাজেই, এই সময় আবদ্ধ গ্যাসের উপর ক্রিয়াশীল চাপ

$$P' = (P + 42) \text{ cmHg}$$

আবদ্ধ গ্যাসের উষ্ণতা স্থির রহিয়াছে বলিয়া এক্ষেত্রে বয়েলের সূত্রটি প্রযোজ্য হইবে।

অর্থাৎ, $PV = P'V'$ বা, $P \times 90\alpha = (P+42) \times 58\alpha$

বা, $90P = 58P + 58 \times 42$

বা, $P = \frac{58 \cdot 42}{32} = 76{\cdot}125$ cmHg

চিত্র 4.8

উদাহরণ 4.25 একটি একমুখ বন্ধ অনুভূমিক ধাতব চোঙের সহিত একটি বায়ুনিরুদ্ধ অথবা অবাধে চলনক্ষম পিস্টন লাগান আছে। চোঙের আবদ্ধ স্থানে কিছু

পরিমাণ বায়ু এবং কয়েক ফোঁটা জল আছে। পিস্টনটিকে ধীরে ধীরে টানিয়া বাহির করিয়া আবদ্ধ স্থানের আয়তনকে দ্বিগুণ করিলে চোঙে উক্ত আবদ্ধ স্থানে চাপ কত হইবে নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, আবদ্ধ স্থানে তখনও কয়েক ফোঁটা জল রহিয়াছে। জলের ফোঁটাগুলির আয়তন উপেক্ষা কর, ঘরের উষ্ণতা এবং বায়ুমণ্ডলের চাপ যথাক্রমে 30°C এবং 760 mmHg। (30°C উষ্ণতায় জলের সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ =31·83 mmHg)

[A horizontal metal cylinder closed at one end is fitted with an air-tight but smoothly movable piston. The enclosed volume contains air and a few drops of water. Find the pressure inside if the piston is slowly withdrawn to double the enclosed volume, assuming that a few drops of water are still left in the cylinder. Neglect the volume occupied by the water drops. Room temperature is 30°C and pressure is 760 mmHg. (Saturated vapour pressure of water at 30°C=31·83 mmHg)] (I. I. T. Adm. Test, 1968)

সমাধান: চোঙে কয়েক ফোঁটা জল আছে বলিয়া উহাতে আবদ্ধ বায়ু জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত। মনে করি, জলীয় বাষ্প-কর্তৃক সম্পৃক্ত বায়ুর প্রাথমিক আয়তন $=V_1$, এই সময় সম্পৃক্ত বায়ুর চাপ=760 mmHg এবং উষ্ণতা=30°C।

30°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ,

$p=31{\cdot}83$ mmHg

∴ কেবলমাত্র বায়ুর চাপ=(760−31·83)

=728·17 mmHg

চিত্র 4.9

মনে করি, যখন আবদ্ধ সম্পৃক্ত বায়ুর আয়তন দ্বিগুণ হইল তখন কেবলমাত্র বায়ুর চাপ$=P_2$ mmHg

পিস্টনটিকে ধীরে ধীরে সরান হইয়াছে বলিয়া ধরা যায় যে, উষ্ণতা স্থির রহিয়াছে। কাজেই, এক্ষেত্রে বয়েলের সূত্রটি প্রযোজ্য হইবে। অর্থাৎ লেখা যায় যে, $P_1V_1=P_2V_2$

বা, $728{\cdot}17\times V_1=P_2\times 2V_1$, কেননা $V_2=2V_1$

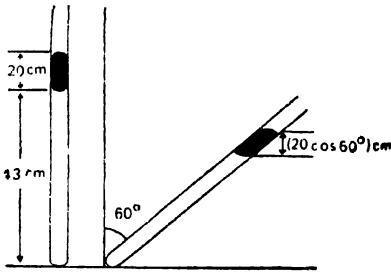
বা, $P_2=364{\cdot}085$ mmHg

প্রশ্নের শর্তানুসারে উপরি-উক্ত প্রসারণের পরেও আবদ্ধ বায়ু জলীয় বাষ্প-কর্তৃক সম্পৃক্ত থাকে। কাজেই, আবদ্ধ সম্পৃক্ত বায়ুর চাপ

=364·085+31·83=395·915 mmHg

উদাহরণ 4.26 একটি সরু নলে নিম্নের বদ্ধ প্রান্ত এবং একটি পারদস্তম্ভের মধ্যবর্তী স্থানে একটি আদর্শ গ্যাস আবদ্ধ রহিয়াছে। নলটিতে উপরের মুখ বায়ুমণ্ডলে উন্মুক্ত (বায়ুমণ্ডলের চাপ=76 cmHg)। পারদস্তম্ভ এবং আবদ্ধ গ্যাসস্তম্ভের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 20 cm এবং 43 cm। যখন নলটিকে ধীরে ধীরে উল্লম্বরেখার সহিত 60° কোণে হেলান অবস্থায় রাখা হইল, তখন গ্যাসস্তম্ভের দৈর্ঘ্য কত হইবে? ধরিয়া লও যে, গ্যাসের উষ্ণতা স্থির রহিয়াছে।

[An ideal was is trapped between a mercury column and the closed lower end of a narrow vertical tube of uniform bore. The upper end of the tube is open to the atmosphere. (Atmospheric pressure=76 cmHg). The lengths of the mercury and the trapped gas columns are 20 cm and 43 cm respectively. What will be the length of the gas column when the tube is tilted slowly in a vertical plane through an angle of 60° ? Assume the temperature to be constant.] (I, I. T. Adm. Test, 1972)

সমাধান ঃ নলটি যখন উল্লম্বভাবে রহিয়াছে তখন উহাতে আবদ্ধ গ্যাসের উপর ক্রিয়াশীল চাপ

P_1 = বায়ুমণ্ডলের চাপ + 20 cm পারদস্তম্ভের চাপ = (76 + 20)
= 96 cmHg

চিত্র 4.10

নলের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল α cm² হইলে নলে আবদ্ধ গ্যাসের আয়তন $V_1 = 43\alpha$ cm³

যখন নলটি উল্লম্বরেখার সহিত 60° কোণে হেলান অবস্থায় আছে তখন গ্যাসের উপর ক্রিয়াশীল চাপ, P_2
$= 76 + 20\cos 60° = 86$ cmHg

মনে করি, এই অবস্থায় নলে আবদ্ধ গ্যাসস্তম্ভের দৈর্ঘ্য $= x$ cm

কাজেই, গ্যাসের আয়তন, $V_2 = x\alpha$ cm³

নলটিকে ধীরে ধীরে কাত করা হইয়াছে বলিয়া ইহার উষ্ণতার কোনরূপ পরিবর্তন হয় না। কাজেই, এক্ষেত্রে বয়েলের সূত্রটি প্রযোজ্য।

অর্থাৎ, $P_1V_1 = P_2V_2$

বা, $96 \times 43 \times \alpha = 86 \times x \times \alpha$ বা, $x = \frac{96 \times 43}{86} = 48$ cm

উদাহরণ 4.27 একটি সরু নলে একটি পারদস্তম্ভ দ্বারা কিছু পরিমাণ বায়ু বাহিরের বায়ুমণ্ডল হইতে বিচ্ছিন্ন রহিয়াছে। বদ্ধ প্রান্তটিকে উপরের দিকে রাখিয়া নলটিকে উল্লম্বভাবে ধরা হইলে নলে আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য হয় l_1 cm ; আবার, বদ্ধ প্রান্তটিকে উপরের দিকে রাখিয়া নলটিকে উল্লম্বভাবে ধরা হইলে নলে আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য হয় l_2 cm। পারদস্তম্ভটির দৈর্ঘ্য h cm হইলে বায়ুমণ্ডলের চাপ নির্ণয় কর।

[A narrow tube closed at one end contains some air which is separated from the outer atmosphere by a column of mercury. If the tube is held vertical with its closed end upwards, the air inside it occupies l_1 cm ; whereas if the tube is held with its open end downwards, the length occupied is l_2 cm. If the length of the column of mercury is h cm, find the atmospheric pressure.]

সমাধান ঃ মনে করি, বায়ুমণ্ডলের চাপ $=$ H cmHg
পরীক্ষাধীন নলের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $= \alpha$ cm^2 (ধরি)
পারদস্তম্ভটির দৈর্ঘ্য $= h$ cm

চিত্র 4.11

যখন নলের বদ্ধ প্রান্ত উপরের দিকে (চিত্র 4.11) তখন নলে আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য $= l_1$ cm

কাজেই আবদ্ধ বায়ুর আয়তন, $V_1 = l_1 \alpha$ cm^2 ;
এই সময়, আবদ্ধ বায়ুর উপর ক্রিয়াশীল চাপ,

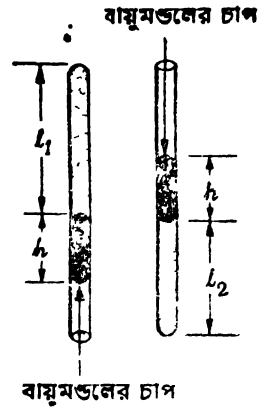
$$P_1 = (H - h) \text{ cmHg}$$

আবার, যখন নলের বদ্ধ প্রান্তটি নিচের দিকে (চিত্র 4.11) তখন আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য $= l_2$ cm

এই সময় আবদ্ধ বায়ুর আয়তন, $V_2 = l_2 \alpha$ cm^3
এবং আবদ্ধ বায়ুর চাপ, $P_2 = (H + h)$ cmHg
বয়েলর সূত্রানুসারে লেখা যায়, $P_1 V_1 = P_2 V_2$

বা, $(H - h)\, l_1 \alpha = (H + h)\, l_2 \alpha$

বা, $\dfrac{H-h}{H+h} = \dfrac{l_1}{l_2}$ বা, $H = \dfrac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} \cdot h$

সুতরাং, বায়ুমণ্ডলের চাপ $= \dfrac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} \cdot h$ cmHg

প্রশ্নমালা 4

1. একটি ঘরের উষ্ণতা 0°C হইতে বৃদ্ধি করিয়া 20°C করা হইল। ইহার ফলে ঘরের বায়ুর শতকরা কত ভাগ ঘর হইতে বাহির হইয়া যাইবে ?

[The temperature of a room is increased from 0°C to 20°C. What percentage of the air inside the room will be expelled due to this rise of temperature ?] [6·83% (প্রায়)]

2. 50 C উষ্ণতায় একটি পাত্রে কিছু পরিমাণ গ্যাস আছে। চাপ অপরিবর্তিত রাখিয়া উহাকে কোন্ উষ্ণতায় তুলিলে ⅓ পরিমাণ গ্যাস পাত্র হইতে বাহির হইয়া যাইবে ?

[A vessel contains some gas at 50°C. To what temperature must it be heated so that one-third of the gas is expelled from the vessel, pressure remaining constant ?] [211·5°C]

3. স্থির চাপে 5 লিটার আয়তন গ্যাসের উষ্ণতা 0°C হইতে 35°C-এ তুলিলে গ্যাসের আয়তন 640 cm^3 বৃদ্ধি পায়। এই উপাত্ত হইতে সেলসিয়াস স্কেলে পরম শূন্য উষ্ণতার মান নির্ণয় কর।

[At constant pressure 5 litres of a certain gas expand by 640 cm^3 when heated from 0°C to 35°C. Calculate from these data the value of absotute zero in Celcius scale.] (H. S., 1965)
[−273·4°C]

4. একটি কাচের পাত্রে 30°C উষ্ণতায় কিছু পরিমাণ বায়ু রহিয়াছে। চাপ স্থির রাখিয়া উহাকে কোন্ উষ্ণতায় তুলিলে ঐ বায়ুর এক-চতুর্থাংশ বাহির হইয়া যাইবে ? পাত্রের প্রসারণ উপেক্ষা কর।

[A glass vessel contains some air at 30°C. To what temperature must it be heated so as to expel one-fourth of the air, the pressure remaining constant ? Neglect expansion of the vessel.]
[131°C]

5. কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাস 30°C উষ্ণতায় আছে। যদি আয়তন স্থির থাকে তাহা হইলে সেলসিয়াস স্কেলের কোন্ উষ্ণতায় ইহার চাপ দ্বিগুণ হইবে ? চাপ স্থির থাকিলে কোন্ উষ্ণতায় ইহার আয়তন দ্বিগুণ হইবে ?

[A mass of gas is at 30°C. At what Celcius temperature will its pressure to doubled if it is heated at constant volume ? At what temperature will the volume be doubled if the pressure is kept constant ? (H. S. 1964) [333°C, 333°C]

6. কোন গ্যাসের চাপ দ্বিগুণ করা হইল এবং সেই সঙ্গে ইহার উষ্ণতাকে 13°C উষ্ণতা হইতে বৃদ্ধি করিয়া 299°C করা হইল। ইহা গ্যাসের আয়তনকে কীরূপ প্রভাবিত করিবে ?

[The pressure of a gas is doubled and the same time its temperature is raised from 13°C to 299°C. How does this affect its volume ? [আয়তন স্থির থাকিবে]

7. বায়ুমণ্ডলীয় চাপে ঘরের উষ্ণতায় 1 লিটার বায়ুতে কতগুলি অণু আছে ? ধরিয়া লও যে, বায়ুর উষ্ণতা 27°C এবং বায়ুমণ্ডলীয় চাপ 1 Mdyn/cm^2।

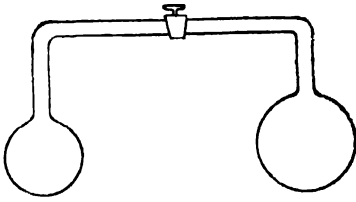
[How many molecules are there in a litre of air at atmospheric pressure and room temperature ? Assume that room temperature as 27°C and atmospheric pressure is 1 Mdyn/cm^2]
[$2{\cdot}4\times10^{22}$ (প্রায়)]

8. 145 cmHg চাপ এবং 27°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 20 লিটার অ্যামোনিয়া গ্যাসের ভর কত ?

[What is the mass of 20 litres of ammonia at a pressure of 145 cmHg and a temperature of 27°C ?] [26·35 g]

9. একটি ইলেকট্রন ভ্যাকুয়াম টিউব প্রস্তুত করিবার সময় ইহাকে 27°C উষ্ণতায় এবং $1{\cdot}2\times10^{-6}$ cmHg চাপে সীল করা হইল। ইহার আয়তন 100 cm^3। নলে অবশিষ্ট গ্যাসের অণুর সংখ্যা নির্ণয় কর। অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা অর্থাৎ স্বাভাবিক উষ্ণতা ও চাপে কোন গ্যাসের 22·4 লিটার আয়তনে অণুর সংখ্যা $6{\cdot}02\times10^{23}$।

[An electronic vacuum tube was sealed off during manufacture at a pressure of $1{\cdot}2\times10^{-6}$ cmHg at 27°C. Its volume is 100 cm^3. Compute the number of molecules remaining inside the tube. Given that Avagadro number is (the number of molecules in 22·4 litres of any gas at N. T. P) equal to $6{\cdot}02\times10^{23}$.]
(Jt. Entrance, 1967) [$3{\cdot}8\times10^{13}$ (প্রায়)]

10. V_1 এবং V_2 আয়তনবিশিষ্ট দুইটি গ্যাসপূর্ণ পাত্র একটি স্টপ-কক্ যুক্ত নল দ্বারা পরস্পর সংযুক্ত রহিয়াছে (চিত্র 4.12)। উহাদের উষ্ণতা সমান। যদি পাত্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী গ্যাসের চাপ যথাক্রমে P_1 এবং P_2 হয় তাহা হইলে স্টপ কক্ খুলিয়া দিলে পাত্রদ্বয়ে আভ্যন্তরীণ চাপের চূড়ান্ত মান কত হইবে? ধরিয়া লও যে, উষ্ণতা অপরিবর্তিত রহিয়াছে।

চিত্র 4.12

[Two gas filled vessels having volume V_1 and V_2 are connected by a tube fitted with a stop-cock. The vessels are at the same temperature. If the pressures inside the vessel are P_1 and P_2 respectively, what will be the final pressure of the gas if the stop-cock is opened? Assume that the temperature remains unchanged.] $[(P_1V_1+P_2V_2)/(V_1+V_2)]$

11. 10^{-11} mmHg চাপ পরীক্ষাগারে প্রাপ্ত একটি উত্তম শূন্যতার অবস্থা। এইরূপ শূন্যতায় প্রতি ঘন সেন্টিমিটারে 20°C উষ্ণতায় কতগুলি অণু থাকে? (বোল্টংজ্ মান ধ্রুবক, $k=1{\cdot}38\times10^{-16}$ erg K^{-1})

[An excellent laboratory vacuum is 10^{-11} mmHg. How many molecules of gas remain per cubic centimeter in this vacuum at a temperature of 20°C? (Boltzmann's constant, $k=1{\cdot}38\times10^{-16}$ erg K^{-1}] $[3{\cdot}3\times10^6]$

12. একটি হ্রদের 238 ft গভীরতায় 1 mm ব্যাসবিশিষ্ট একটি বায়ু বুদ্‌বুদ্ গঠিত হইল। যখন উহা উপরিতলে আসিয়া পৌঁছে তখন উহার ব্যাস কত হইবে? উষ্ণতা স্থির রহিয়াছে ধরিয়া লও। জল ব্যারোমিটারের উচ্চতা=34 ft।

[An air bubble of diameter 1 mm is formed at a depth of 238 ft of water in a lake. What will be its diameter when it reaches the surface? Assume the temperature to be constant. Height of water barometer=34 ft.] (H. S. 1965) [2 mm]

13. 20°C উষ্ণতায় এবং 1 অ্যাটমস্‌ফিয়ার চাপের হাইড্রোজেন গ্যাসের সাহায্যে একটি বেলুন ফুলাইলে ইহার আয়তন হয় 10,000 m^3। 6°C উষ্ণতায় 150 অ্যাটমস্‌ফিয়ার চাপে চোঙের মধ্যে অবস্থানকালে এই হাইড্রোজেনের প্রাথমিক আয়তন কত ছিল?

[When inflated with hydrogen gas at a temperature of 20°C and at a pressure of 1 atmosphere, a balloon has a volume of 10,000 m^3. What was the initial volume of this hydrozen gas if stored in cylinders at a temperature of 6°C under a pressure of 150 atmospheres?] $[63{\cdot}5\ m^3]$

14. দুইটি কাচের বাল্‌বের আয়তন 100 cm^3। 1 mm^2 প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি কৈশিক নল দ্বারা ইহাদের মধ্যে যোগাযোগ আছে। ঐ কৈশিক নলে একটি ক্ষুদ্র পারদ-সূচক আছে। প্রাথমিক অবস্থায় বাল্‌ব দুইটিতে 27°C উষ্ণতায় কিছু পরিমাণ বায়ু রহিয়াছে। বাল্‌ব দুইটির যে-কোন একটির উষ্ণতার পরিবর্তন কত হইলে এই সূচকটি নল বাহিয়া 1 mm সরিবে?

[Two glass bulbs, each of volume 100 cm^3 are in direct communication through a length of capillary tubing which has a bore of cross-sectional area 1 mm^2. It contains a short mercury index. The bulbs contain air which is initially at a temperature of 27°C. What temperature change of either bulbs will cause the index to move 1 mm along the capillary tube?] [0·006°C]

15. উপেক্ষণীয় আয়তনবিশিষ্ট একটি নল দ্বারা পরস্পর যুক্ত 100 cm^3 এবং 200 cm^3 আয়তনবিশিষ্ট দুইটি পাত্রে কিছু পরিমাণ শুষ্ক বায়ু আছে। যখন ছোট পাত্রটির উষ্ণতা 0°C এবং বড়টির উষ্ণতা 100°C, তখন ঐ যন্ত্রটির মধ্যবর্তী বায়ুর চাপ 1 অ্যাটমস্‌ফিয়ার। (i) যন্ত্রটিতে আবদ্ধ বায়ুর ভর, এবং (ii) যখন উভয় পাত্রই 0°C উষ্ণতায় আছে তখন ঐ যন্ত্রের বায়ুর চাপ নির্ণয় কর। প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় শুষ্ক বায়ুর ঘনত্ব=1·29 kgm^{-3}।

[Two vessels,, of volume 100 cm^3 and 200 cm^3, joined by a tube of negligible volume contain some dry air. When the temperature of the larger vessel is 100°C and that of the smaller vessel is 0°C, the pressure of the air inside the apparatus is 1 atmosphere. Calculate (i) the mass of the air inside the apparatus and (ii) the pressure of the air when both vessels are at a temperature 0°C. The density of dry air at standard temperature and pressure= 1·29 kgm^{-3}.] [(i) 0·318 g, (ii) 0·822 atmosphere]

16. 6 ft লম্বা একটি একমুখ খোলা নলকে পারদ দ্বারা অর্ধপূর্ণ করা হইল। ইহাকে উল্টাইয়া খোলা মুখটিকে ঠিক পারদপৃষ্ঠের তলায় ডুবাইয়া উল্লম্ব অবস্থায় রাখা হইল। এই সময় পারদ ব্যারোমিটারের পাঠ 30 ইঞ্চি হইলে নলের মধ্যে পারদপৃষ্ঠের উচ্চতা কত হইবে?

[A tube 6 ft long is half-filled with mercury. It is held vertical in an inverted position with its open end just inside mercury surface. If the reading of mercury barometer at this time is 30 inches, what will be the height of the mercury surface in the tube ?] [12 inches]

17. এক-মুখ খোলা সর্বত্র সমান প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি কাচের নলে 4 cm দীর্ঘ একটি পারদসূত্র দ্বারা 27°C উষ্ণতায় কিছু পরিমাণ বায়ু আবদ্ধ আছে। উল্লম্ব অবস্থায় নলের খোলামুখ উপরের দিকে থাকিলে বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য 9 cm এবং নলটিকে

উল্টাইয়া ধরিলে আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য 10 cm হইলে (i) বায়ুমণ্ডলের চাপ নির্ণয় কর। (ii) উষ্ণতা কত হইলে উল্টান অবস্থায় বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য 9 cm হইবে ?

[Some amount of air at 27°C is enclosed in a glass tube of uniform cross section open at one end, by a column of mercury 4 cm long. If the open end of the tube held in vertical position is upward, the length of the air column enclosed is 9 cm. If the tube is inverted the length of the air column is 10 cm. (i) Find the barometric pressure. (ii) What should be the temperature of the air so that at the inverted position of the tube the length of the air column is 9 cm ?]

[76 cmHg, $\theta = -3$°C]

18. 90 cm দীর্ঘ একটি ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারের পারদস্তম্ভের উপর কিছু পরিমাণ বায়ু আবদ্ধ আছে। যখন বায়ুমণ্ডলের চাপ 76 cmHg এবং উষ্ণতা 15°C তখন ইহার পাঠ 74·5 cm ; যখন এই ব্যারোমিটারের পাঠ 75·8 cmHg তখন উষ্ণতা 5°C হইলে ঐ সময় বায়ুমণ্ডলের চাপের প্রকৃত মান কত ?

[Some air is enclosed in a faulty barometer of length 90 cm. When the atmospheric pressure is 76 cmHg and temperature is 15°C, it reads 74·5 cm. If the temperature is 5°C when it reads 75·8 cmHg, what is the value of the true atmospheric pressure at that time ?] [77·38 cmHg]

19. যখন ত্রুটিহীন ব্যারোমিটারের পাঠ 28·5 ইঞ্চি এবং 31 ইঞ্চি তখন একটি ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারের পাঠ যথাক্রমে 28 ইঞ্চি এবং 30 ইঞ্চি। যখন উক্ত ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারটির পাঠ 29 ইঞ্চি তখন নির্ভুল ব্যারোমিটারটির পাঠ কত হইবে ?

[When a true barometer reads 28·5 inches and 31 inches, a faulty barometer reads 28 inches and 30 inches respectively. What will be the reading of the true barometer when the faulty barometer reads 29 inches ?] [29·67 cm]

20. একটি ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারের 80 cm দীর্ঘ নলে উহার পারদের উপরিস্থ টরিসেলীয় 'শূন্যস্থানে' কিছু পরিমাণ বায়ু আছে। যখন নির্ভুল ব্যারোমিটারে পারদের উচ্চতা 76 cm তখন ঐ ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারের পাঠ 75 cm। যখন ত্রুটিপূর্ণ ব্যারোমিটারটি 73 cm পাঠ দেয় তখন সঠিক বায়ুমণ্ডলীয় চাপ কত ? ধরিয়া লও যে, উভয়ক্ষেত্রে উষ্ণতা একই আছে।

[A faulty barometer tube, 80 cm long, contains some air in the Toricellian 'vacuum' above the mercury and reads 75 cm when the true barometric height is 76 cm. What is the true atmospheric pressure on an occasion when the faulty barometer reads 73 cm ? Assume that the temperature of the air is the same on both occasions.] [73·71 cmHg]

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

ক্যালরিমিতি

5.1 তাপের একক ঃ সি. জি. এস. পদ্ধতিতে তাপের এককের নাম **ক্যালরি। এক গ্রাম জলের এক সেণ্টিগ্রেড ডিগ্রী উষ্ণতা বৃদ্ধি করিতে যে-পরিমাণ তাপ প্রয়োজন তাহাকে এক ক্যালরি (calorie) বলা হয়।**

এফ. পি. এস. পদ্ধতিতে তাপের একক হইল **ব্রিটিশ তাপ একক।** ইংরাজীতে ইহাকে বলা হয় ব্রিটিশ থার্মাল ইউনিট (British Thermal Unit)। সংক্ষেপে ইহাকে 'Btu' লেখা হয়। **1 পাউণ্ড জলের 1 ফারেনহাইট ডিগ্রী উষ্ণতা বৃদ্ধি করিতে যে-পরিমাণ তাপ প্রয়োজন তাহাকে এক ব্রিটিশ তাপ একক বলা হয়।**

ব্রিটেনে তাপের অপর একটি বৃহত্তর একক প্রচলিত আছে। ইহাকে **থার্ম** (Therm) বলা হয়। **1000 পাউণ্ড জলের 100 ফারেনহাইট ডিগ্রী উষ্ণতা-বৃদ্ধি করিতে যে-পরিমাণ তাপ প্রয়োজন হয়, তাহাকে এক থার্ম বলা হয়।**

তাপের একটি মিশ্র এককও প্রচলিত আছে। ইহার নাম **সেণ্টিগ্রেড তাপ একক।** ইংরাজীতে ইহাকে সেণ্টিগ্রেড হিট হিউনিট (Centigrade Heat Unit) বলা হয়। সংক্ষেপে ইহাকে 'Chu' লেখা হয়। **1 পাউণ্ড জলের উষ্ণতা 1 সেলসিয়াস ডিগ্রী বৃদ্ধি করিতে যে-পরিমাণ তাপ প্রয়োজন তাহাকে এক সেলসিয়াস তাপ একক বলা হয়।**

তাপের বিভিন্ন এককের সম্পর্ক

(i) 1 Btu = 252 cal
(ii) 1 Chu = 453·6 cal
(iii) 1 Chu = $\frac{9}{5}$ Btu
(iv) 1 Therm = 10^5 Btu

5.2 আপেক্ষিক তাপ (Specific heat) ঃ কোন পদার্থের একক ভরের এক ডিগ্রী উষ্ণতা-বৃদ্ধি করিতে যে-তাপ প্রয়োজন তাহাকে ঐ পদার্থের আপেক্ষিক তাপ বলা হয়। এই সংজ্ঞানুসারে, সি. জি. এস. সেণ্টিগ্রেড পদ্ধতিতে তাপের একক 'cal/(g°C)' এবং এফ. পি. এস. ফারেনহাইট পদ্ধতিতে ইহার একক 'Btu'/(lb°F)'।

আপেক্ষিক তাপের একটি বিকল্প সংজ্ঞা আছে। ইহা নিম্নরূপ :

কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ পদার্থের নির্দিষ্ট উষ্ণতা-বৃদ্ধির জন্য প্রয়োজনীয় তাপ এবং সমপরিমাণ জলের সমান উষ্ণতা-বৃদ্ধির জন্য প্রয়োজনীয় তাপের অনুপাতকে আপেক্ষিক তাপ বলা হয়। সুতরাং কোন পদার্থের আপেক্ষিক তাপ,

$$s = \frac{\text{উক্ত পদার্থের } m \text{ g ভরের } t^\circ\text{C উষ্ণতা-বৃদ্ধি করিতে প্রয়োজনীয় তাপ}}{m \text{ g পদার্থের } t^\circ\text{C উষ্ণতা-বৃদ্ধি করিতে প্রয়োজনীয় তাপ}}$$

$$=\frac{1\text{ g পদার্থের }1^\circ\text{C উষ্ণতা-বৃদ্ধির জন্য প্রয়োজনীয় তাপ}}{1\text{ g জলের }1^\circ\text{C উষ্ণতা-বৃদ্ধির জন্য প্রয়োজনীয় তাপ}}$$

$$=\frac{1\text{ g পদার্থের }1^\circ\text{C উষ্ণতা-বৃদ্ধির জন্য প্রয়োজনীয় তাপ}}{1\text{ cal}}$$

এই সংজ্ঞা-অনুসারে, আপেক্ষিক তাপ একটি এককহীন সংখ্যা মাত্র।

5.3 কোন বস্তু-কর্তৃক গৃহীত বা বর্জিত তাপের পরিমাণ : কোন নির্দিষ্ট উষ্ণতা বৃদ্ধি বা হ্রাস করিতে কোন বস্তু-কর্তৃক **গৃহীত বা বর্জিত তাপ** (H)

=বস্তুর ভর (m) × **আপেক্ষিক তাপ** (s) × **উষ্ণতার বৃদ্ধি বা হ্রাস** (θ)

$$H=m.\,s.\,\theta \qquad \cdots \qquad (i)$$

5.4 তাপগ্রাহিতা বা তাপধারকত্ব (Thermal capacity) : কোন বস্তুর এক ডিগ্রী উষ্ণতা বৃদ্ধি করিতে যে-পরিমাণ তাপ প্রয়োজন তাহাকে ঐ বস্তুর **তাপগ্রাহিতা বা তাপধারকত্ব** বলে। কোন বস্তুর ভর m g হইলে এবং উহার উপাদানের আপেক্ষিক তাপ s cal/(g°C) হইলে বস্তুটির তাপগ্রাহিতা

$$=ms\text{ cal/}^\circ\text{C}$$

ভরকে পাউণ্ডে এবং উষ্ণতা-বৃদ্ধিকে ফারেনহাইটে প্রকাশ করিলে তাপগ্রাহিতার একক হইবে 'Btu/°F'।

5.5 জলসম বা জলবিকল্প (Water Equivalent) : কোন বস্তুর এক ডিগ্রী উষ্ণতা বৃদ্ধি করিতে যে-পরিমাণ তাপ প্রয়োজন সেই তাপে যে-পরিমাণ জলের এক ডিগ্রী উষ্ণতা বৃদ্ধি করা যায় তাহাই বস্তুটির **জলসম** বা **জলবিকল্প**।

কোন বস্তুর ভর m g এবং উহার উপাদানের আপেক্ষিক তাপ s cal/(g°C) হইলে উহার জলসম$=ms$ g.

5.6 ক্যালরিমিতির মূলনীতি (Calorimetric principle) : ক্যালরিমিটারের মধ্যে দুইটি বস্তুকে পরস্পরের সংস্পর্শে আনার পর যদি (i) বাহির হইতে ক্যালরিমিটারের মধ্যে কোন তাপ প্রবেশ না করে, (ii) ভিতর হইতে বাহিরে কোন তাপ না যাইতে পারে এবং (iii) বস্তু দুইটির মধ্যে যদি কোন রাসায়নিক পরিবর্তন না ঘটে, তাহা হইলে শক্তির সংরক্ষণ সূত্র (law of conservation of energy) হইতে বলা যায় যে, উষ্ণতর বস্তু-কর্তৃক বর্জিত তাপ ও শীতলতর বস্তু-কর্তৃক গৃহীত তাপ পরস্পর সমান। ইহাই ক্যালরিমিতির মূলনীতি. এই নীতিকে সংক্ষেপে নিম্নরূপ লেখা যায়,

গৃহীত তাপ (heat gained)=বর্জিত তাপ (heat lost)

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 5.1 নিম্নের দুইটি ক্ষেত্রের কোন্‌টিতে অপেক্ষাকৃত বেশি তাপ লাগিবে দেখাও : (i) 1 kg জলকে 30°C হইতে 100°C তোলা হইল। (ii) 3 lb জলকে 92°F হইতে 212°F তোলা হইল। (দেওয়া আছে যে, 1 Btu= 252 cal)

[Show which of the following cases requires greater amount of heat : (i) 1 kg of water is heated from 30°C to 100°C,
(ii) 3 lb of water is heated from 92°F to 212°F (Given that 1 Btu=252 cal).]

সমাধান ঃ আমরা জানি যে, প্রয়োজনীয় তাপ

$$= \text{বস্তুর ভর} \times \text{বস্তুর উপাদানের আপেক্ষিক তাপ} \times \text{উষ্ণতা-বৃদ্ধি}$$

(i) প্রথম ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় তাপ $= 10^3 \times 1 \times (100-30)$

$$= 70000 \text{ cal} \quad \cdots \quad (i)$$

(ii) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় তাপ $= 3 \times 1 \times (212-92) = 3 \times 120$ Btu

$$= 360 \times 252 \text{ Btu} = 90{,}720 \text{ cal} \quad \cdots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) তুলনা করিয়া দেখা যাইতেছে যে, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় তাপের পরিমাণ বেশি ৷

উদাহরণ 5.2 (i) 150 g তামাকে 20°C হইতে 100°C-এ লইয়া যাইতে কী পরিমাণ তাপ প্রয়োজন ? (ii) যদি 20°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 250 g সীসাকে একই পরিমাণ তাপ দেওয়া যায় তাহা হইলে উহার অন্তিম উষ্ণতা কত হইবে ? (তামার আপেক্ষিক তাপ=0·093 এবং সীসার আপেক্ষিক তাপ 0·031)

[(i) Calculate the amount of heat required to raise 150 g of copper from 20°C to 100°C. (ii) If the same quality of heat is added to 250 g of lead at 20°C, what will be its final temperature ? (Specific heat of copper=0·093 and that of lead=0·031)]

সমাধান ঃ (i) 150 g তামাকে 20°C হইতে 100°C উষ্ণতায় তুলিতে প্রয়োজনীয় তাপ; H=তামার ভর × আপেক্ষিক তাপ × উষ্ণতা-বৃদ্ধি

$$= 150 \times 0{\cdot}093 \times (100-20) = 150 \times 0{\cdot}093 \times 80$$

$$= 1116 \text{ cal} \quad \ldots \quad (i)$$

(ii) মনে করি, 250 g সীসাকে একই পরিমাণ তাপ দিলে উহার উষ্ণতা-বৃদ্ধি হয় θ°C ।

তাহা হইলে লেখা যায়, $H = 250 \times 0{\cdot}031 \times \theta$ cal ... (ii)

কাজেই, সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $250 \times 0{\cdot}031 \times \theta = 1116$

বা, $\theta = 144$°C

সুতরাং, সীসার চূড়ান্ত উষ্ণতা $= (\theta+20) = (144+20) = 164$°C

উদাহরণ 5.3 100 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে উত্তপ্ত করিয়া 122°C-এ তোলা হইল এবং ইহাকে দ্রুত 50 g ভরবিশিষ্ট একটি ক্যালরিমিটারে রক্ষিত 28°C উষ্ণতার 300 g জলে ফেলা হইল। মিশ্রণের সাধারণ উষ্ণতা হইল 30°C। তামার আপেক্ষিক তাপ 0·09 হইলে বস্তুর উপাদানের আপেক্ষিক তাপ কত ?

[A body of mass 100 g is heated to 122°C and is quickly immersed in 300 g of water at a temperature of 28°C kept in a copper calorimeter of mass 50 g. The common temperature is

30°C. If the specific heat of copper is 0·09, find the specific heat of the material of the body.]

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুর উপাদানের আপেক্ষিক তাপ $= s$

এখন, বস্তু-কর্তৃক বর্জিত তাপ $=$ বস্তুটির ভর $\times$ আপেক্ষিক তাপ $\times$ উষ্ণতা-হ্রাস

$$= 100 \times s \times (122-30) = 9200\ s \text{ cal} \quad \cdots \quad (i)$$

ক্যালরিমিটার-কর্তৃক গৃহীত তাপ $= 50 \times 0{\cdot}09 \times (30-28) = 9$ cal

এবং ক্যালরিমিটারে রক্ষিত জল-কর্তৃক গৃহীত তাপ $= 300 \times 1 \times (30-28)$ cal

$$= 600 \text{ cal}$$

ক্যালরিমিতির মূলনীতি-অনুসারে লেখা যায়, বর্জিত তাপ $=$ গৃহীত তাপ

$\therefore \quad 9200\ s = 600 + 9$ বা, $s = \frac{609}{9200} = 0{\cdot}066$

উদাহরণ 5.4 কোন তরল A-এর আপেক্ষিক গুরুত্ব 0·8 এবং অপর একটি তরল B-এর আপেক্ষিক গুরুত্ব 0·5। দেখা গেল যে, 1·5 লিটার A তরলের তাপধারকত্ব 1 লিটার B তরলের তাপধারকত্বের সমান। A এবং B তরলের আপেক্ষিক তাপের তুলনা কর।

[The specific gravity of a certain liquid A is 0·8 and that of another liquid B is 0·5. It is seen that the thermal capacity of 1·5 litre of A is equal to that of 1 litre of B. Compare the specific heats of A and B.]

সমাধান ঃ মনে করি, A তরলের আপেক্ষিক তাপ $= s_1$

এবং B তরলের আপেক্ষিক তাপ $= s_2$

1·5 লিটার আয়তন A তরলের তাপধারকত্ব $=$ ভর $\times$ আপেক্ষিক তাপ

$$= (1{\cdot}5 \times 10^3) \times 0{\cdot}8 \times s_1$$

অনুরূপভাবে, 1 লিটার আয়তন B তরলের তাপধারকত্ব $= (1 \times 10^3) \times 0{\cdot}5 \times s_2$

শর্তানুসারে, $1{\cdot}5 \times 10^3 \times 0{\cdot}8 \times s_1 = 10^3 \times 0{\cdot}5 \times s_2$

$$\text{বা,} \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{0{\cdot}5}{1{\cdot}5 \times 0{\cdot}8} = \frac{0{\cdot}5}{1{\cdot}2} = \frac{5}{12}$$

সুতরাং $s_1 : s_2 = 5 : 12$

উদাহরণ 5.5 200 g ভরবিশিষ্ট এক খণ্ড সীসাকে 100°C উষ্ণতা পর্যন্ত উত্তপ্ত করিয়া কোন পাত্রে রক্ষিত 200 g তরলে ফেলা হইল। তরলের আপেক্ষিক তাপ 0·5 cal g^{-1}°C^{-1} হইলে এবং প্রাথমিক উষ্ণতা 0°C মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা কত হইবে? ধরিয়া লও যে, পাত্র কোন তাপ শোষণ করিতেছে না। সীসার আপেক্ষিক তাপ $=$ 0·03 cal g^{-1}°C^{-1}।

[200 g of lead heated to 100°C is dropped into a vessel containing 200 g of liquid of specific heat 0·5 cal g^{-1}°C^{-1}. If the initial temperature of the liquid is 0°C, what will be the final temperature of the mixture ? Assume that the vessel does not absorb any heat. (Specific heat of lead $=$ 0·03 cal g^{-1}°C^{-1})]

(H. S., 1960)

সমাধান ঃ মনে করি, মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা $= \theta°C$

কাজেই, উত্তপ্ত সীসা-কর্তৃক বর্জিত তাপ $= 200 \times 0{\cdot}03 \times (100-\theta)$ cal

তরল-কর্তৃক গৃহীত তাপ $= 200 \times 0{\cdot}5 \times (\theta - 0) = 100\ \theta$ cal

ক্যালরিমিতির মূলনীতি-অনুসারে লেখা যায়, গৃহীত তাপ = বর্জিত তাপ

সুতরাং, $200 \times 0{\cdot}03 \times (100-\theta) = 100\theta$

বা, $600 - 6\theta = 100\theta$ বা, $106\theta = 600$ বা, $\theta = 5{\cdot}66$

অর্থাৎ, মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা $= 5{\cdot}66°C$

উদাহরণ 5.6 দুইটি বস্তু A এবং B-এর ঘনত্বের অনুপাত 3 : 4, আপেক্ষিক তাপের অনুপাত 2 : 3 এবং আয়তনের অনুপাত 4 : 5। ইহাদের তাপধারকত্বের অনুপাত কত ?

[The ratio of the densities of two bodies A and B is 3 : 4, the ratio of their specific heat is 2 : 3 and the ratio of their volumes is 4 : 5. What is the ratio of their thermal capacities ?]

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে কোন বস্তুর তাপধারকত্ব

= ভর × আপেক্ষিক তাপ = আয়তন × ঘনত্ব × আপেক্ষিক তাপ ··· (i)

এখন, ধরা যাক যে, A বস্তুর ঘনত্ব, আপেক্ষিক তাপ এবং আয়তন যথাক্রমে ρ_1, s_1 এবং V_1 ; অনুরূপভাবে, B বস্তুর ঘনত্ব আপেক্ষিক তাপ এবং আয়তন যথাক্রমে ρ_2, s_2 এবং V_2।

(i) হইতে লেখা যায় যে, A বস্তুর তাপধারকত্ব $= \rho_1 V_1 s_1$

এবং B বস্তুর তাপধারকত্ব $= \rho_2 V_2 s_2$

কাজেই, $$\frac{\text{A বস্তুর তাপধারকত্ব}}{\text{B বস্তুর তাপধারকত্ব}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{s_1}{s_2}$$

এখন, $$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4},\ \frac{s_1}{s_2} = \frac{2}{3}\ \text{এবং}\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \frac{\text{A বস্তুর তাপধারকত্ব}}{\text{B বস্তুর তাপধারকত্ব}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

উদাহরণ 5.7 একটি লোহার সস্‌প্যান-এ 25°C উষ্ণতার 100 g জল আছে। ইহাতে 60°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 50 g জল ঢালা হইল। দেখা গেল যে, ইহাতে অন্তিম উষ্ণতা হইল 35°C। বিকিরণ বা অন্য কোন পদ্ধতিতে কোন তাপক্ষয় হয় না ধরিয়া সস্‌প্যানটির জলসম নির্ণয় কর। যদি ইহার ভর 238 g হয় তাহা হইলে লোহার আপেক্ষিক তাপ কত ?

[An iron saucepan contains 100 g of water at 25°C. 50 g of water at a temperature of 60°C is poured into it. It is found that the final temperature attained is 35°C. Assume that there is no loss of heat due to radiation or otherwise, calculate the water equivalent of the saucepan. If the mass of the pan be 238 g, what is the specific heat of iron ?] (H. S. (Comp.), 1960)

সমাধান ঃ মনে করি, সস্প্যানের জলসম$=W$ g

$\therefore$ সস্প্যান-কর্তৃক গৃহীত তাপ$=W\times(35-25)=10$ W cal

ক্যালরিমিটারের শীতলতর জল-কর্তৃক গৃহীত তাপ$=100\times(35-25)$

$=1000$ cal

উষ্ণতর জল-কর্তৃক বর্জিত তাপ$=50\times(60-35)=50\times25$ cal

উষ্ণ বস্তু-কর্তৃক বর্জিত তাপ শীতল বস্তু-কর্তৃক গৃহীত তাপের সমান বলিয়া লেখা যায়, $10\text{ W}+1000=50\times25$ বা, $W=25$ g

কিন্তু W=সস্প্যানের ভর $(m)\times$লোহার আপেক্ষিক তাপ (s)

$\therefore$ লোহার আপেক্ষিক তাপ $s=\frac{W}{m}=\frac{25}{238}=0{\cdot}105\text{ cal g}^{-1}{}^{\circ}\text{C}^{-1}$

উদাহরণ 5.8 একটি জলগাহে 40°C উষ্ণতায় 100 kg জল আছে। উষ্ণ জলের এবং ঠাণ্ডা জলের ট্যাপ খুলিয়া দেওয়ায় উহারা উভয়ে প্রতি মিনিটে 30 kg জল সরবরাহ করে। উষ্ণ এবং শীতল জলের উষ্ণতা যথাক্রমে 50°C এবং 5°C। জলগাহের জলের উষ্ণতা 30°C উষ্ণতায় পৌঁছিতে কত সময় লাগিবে? ধরিয়া লও যে, জলগাহে জল সম্পূর্ণভাবে মিশ্রিত হইয়া যায়।

[A water bath contains 100 kg of water at 40°C. Hot and cold water taps are then turned on each of which delivers 30 kg of water per minute. The temperatures of the hot and cold water are 50°C and 5°C respectively. How long will it be before the water in the bath attains a temperature of 30°C? Assume complete mixing in the water bath.]

সমাধান ঃ মনে করি, গরম এবং ঠাণ্ডা জলের ট্যাপ খুলিয়া দিবার t মিনিট পর জলগাহের উষ্ণতা 30°C-এ পৌঁছে।

এই সময়ে, সরবরাহিত উষ্ণ জল$=30\times t$ kg

এবং সরবরাহিত শীতল জল$=30\times t$ kg

জলগাহে বিদ্যমান উষ্ণ জল-কর্তৃক বর্জিত তাপ

$=100\times(40-30)=10^3$ kcal

উষ্ণ জলের ট্যাপ-কর্তৃক সরবরাহিত উষ্ণ জল-কর্তৃক বর্জিত তাপ

$=30t\times(50-30)=600t$ k cal

শীতল জলের ট্যাপ-দ্বারা সরবরাহিত জল-কর্তৃক গৃহীত তাপ

$=30t\times(30-5)=750t$ k cal

ক্যালরিমিতির-মূলনীতি-অনুসারে, গৃহীত তাপ=বর্জিত তাপ

কাজেই, $750t=600t+10^3$

বা, $t=\frac{10^3}{150}=6{\cdot}67$ মিনিট

উদাহরণ 5.9 তোমার নিকট ফুটন্ত জলের এবং 10°C উষ্ণতাবিশিষ্ট ট্যাপের

জলের সরবরাহ রহিয়াছে। উহাদের প্রতিটি হইতে কী পরিমাণ জল লইয়া জলগাহে মিশাইলে 40°C উষ্ণতায় 50 লিটার জল পাওয়া যাইবে ?

[You are provided with a supply of boiling water and of tap water at 10°C. What quantity of each would you take in order to prepare a bath containing 50 litres of water at 40°C ?]

সমাধান ঃ মনে করি, ফুটন্ত জল লওয়া হইল x লিটার। কাজেই, 10°C ট্যাপের জলের পরিমাণ হইবে $(50-x)$ লিটার।

x লিটার ফুটন্ত জল-কর্তৃক বর্জিত তাপ$=x\times 10^3\times(100-40)$ cal

$(50-x)$ লিটারে জল-কর্তৃক গৃহীত তাপ$=(50-x)\times 10^3\times(40-10)$ cal

এখন, ক্যালরিমিতির মূলনীতি-অনুসারে লেখা যায়, গৃহীত তাপ=বর্জিত তাপ

$$\therefore\quad (50-x)\times 10^3\times 30=x\times 10^3\times 60$$

$$\text{বা,}\quad (50-x)=2x \qquad \text{বা,}\quad x=\tfrac{50}{3}=16\tfrac{2}{3}$$

কাজেই, মিশ্রণে ফুটন্ত জলের পরিমাণ $16\frac{2}{3}$ লিটার এবং ট্যাপের জলের পরিমাণ $(50-16\frac{2}{3})$ বা, $33\frac{1}{3}$ লিটার।

উদাহরণ 5.10 একটি সঙ্কর ধাতুর মধ্যে 60% তামা এবং 40% নিকেল আছে। ঐ মিশ্র ধাতুর 50 g ওজনের একটি টুকরাকে 80°C পর্যন্ত উত্তপ্ত করিয়া 10 g জল-সমবিশিষ্ট এবং একটি ক্যালরিমিটারের মধ্যে ফেলিয়া দেওয়া হইল। ক্যালরিমিটারের মধ্যে 10°C উষ্ণতায় 90 g জল ছিল। মিশ্রণের ফলে চূড়ান্ত উষ্ণতা কত হইবে নির্ণয় কর। (তামার আপেক্ষিক তাপ=0·09 এবং নিকেলের আপেক্ষিক তাপ =0·11)

[An alloy contains 60% copper and 40% nickel. A piece of the alloy weighing 50 g is heated to 80°C and is dropped into a calorimeter of water equivalent 10 g. The calorimeter contained 90 g of water at 10°C. Find the final temperature of the mixture. (Specific heat of copper=0·09 and specipic heat of nickel=0·11)]

সমাধান ঃ 50 g সঙ্কর ধাতুতে তামার পরিমাণ$=50\times\frac{60}{100}=30$ g

এবং নিকেলের পরিমাণ$=50\times\frac{40}{100}=20$ g

মনে করি, মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা$=\theta$°C

ক্যালরিমিটারের জলসম 40 g এবং উহাতে 90 g জল আছে।

কাজেই, ক্যালরিমিটার এবং জল-কর্তৃক গৃহীত তাপ

$$=(90+10)\,(\theta-10)\text{ cal}=100\,(\theta-10)/\text{cal}$$

সঙ্কর ধাতু-কর্তৃক বর্জিত তাপ=তামা-কর্তৃক বর্জিত তাপ+নিকেল-কর্তৃক বর্জিত তাপ

$$=30\times 0{\cdot}09\times(80-\theta)+20\times 0{\cdot}11\times(80-\theta)$$

$$=(2{\cdot}7+2{\cdot}2)\,(80-\theta)=4{\cdot}9\,(80-\theta)$$

ক্যালরিমিটারের মূলনীতি-অনুসারে গৃহীত তাপ=বর্জিত তাপ

$$\therefore\quad 100\,(\theta-10)=4{\cdot}9\,(80-\theta)$$

$$1000\theta - 1000 = 392 - 4{\cdot}9\theta \quad \text{বা,} \quad 104{\cdot}9\theta = 1392$$

$$\theta = \frac{1392}{104{\cdot}9} = 13{\cdot}27^\circ C$$

উদাহরণ 5.11 এক কিলোগ্রাম ফুটন্ত জলের সহিত 0°C উষ্ণতার এক কিলোগ্রাম পারদ মিশ্রিত করা হইল। জলের আপেক্ষিক তাপ পারদের আপেক্ষিক তাপের 30 গুণ হইলে মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা নির্ণয় কর।

[A kilogram of boiling water is mixed with a kilogram of mercury at 0°C. If the specific heat of water is 30 times that of mercury, find the temperature of the mixture.]

সমাধান ঃ ফুটন্ত জলের উষ্ণতা = 100°C

এবং পারদের প্রাথমিক উষ্ণতা = 0°C

মনে করি, পারদের আপেক্ষিক তাপ = s

প্রশ্নের শর্তানুসারে জলের আপেক্ষিক তাপ = 30 s

এখন, ধরা যাক্ যে, মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা = θ°C

$\therefore$ জল-কর্তৃক বর্জিত তাপ $= 10^3 \times 30s \times (100 - \theta)$ cal ... (i)

পারদ-কর্তৃক গৃহীত তাপ $= 10^3 \times s \times (\theta - 0)$ ... (ii)

আমরা জানি যে, গৃহীত তাপ = বর্জিত তাপ

$\therefore$ $10^3 \times s \times \theta = 10^3 \times 30s \times (100 - \theta)$ বা, $\theta = 30\,(100 - \theta)$

বা, $\theta = \frac{3000}{31} = 96{\cdot}8^\circ C$

উদাহরণ 5.12 তিনটি বিভিন্ন তরল A, B এবং C-এর উষ্ণতা যথাক্রমে 15°C, 25°C এবং 35°C। A এবং B তরলের সমান ভর মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের উষ্ণতা হয় 21°C ; B এবং C তরলের সমান ভর লইয়া মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের উষ্ণতা হয় 32°C। যদি A এবং C তরলের সমান ভর লইয়া পরস্পর মিশ্রিত করা হয় তাহা হইলে মিশ্রণের উষ্ণতা কত হইবে ?

[The temperature of three different liquids A, B and C are 15°C, 25°C and 35°C respectively. On mixing equal masses of A and B the temperature of the mixture is 21°C and on mixing equal masses of B and C, the temperature of the mixture is 32°C. What will be the temperature of the mixture when equal masses of A and C are mixed ?

সমাধান ঃ মনে করি, A, B এবং C তরলের আপেক্ষিক তাপ যথাক্রমে S_A, S_B এবং S_C।

শর্তানুসারে, A এবং B তরলের সম-ভর লইয়া পরস্পর মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের উষ্ণতা হয় 21°C ; মনে করি, A তরলের m g-এর সহিত B তরলের m g মিশ্রিত করা হইল।

কাজেই, A তরল-কর্তৃক গৃহীত তাপ $= m\,S_A \times (21 - 15)$ cal ... (i)

এবং, B তরল-কর্তৃক বর্জিত তাপ $= m\,S_B \times (25 - 21)$ cal ... (ii)

'গৃহীত তাপ=বর্জিত তাপ'—ক্যালরিমিতির এই নীতি-অনুসারে পাই,

$m\,S_A \times 6 = m\,S_B \times 4$ বা, $\frac{S_A}{S_B} = \frac{2}{3}$ ... (iii)

আবার, B এবং C তরলের সমভর পরস্পর মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের উষ্ণতা হয় 32°C; মনে করি, B তরলের m_1 গ্রামের সহিত C তরলের m_1 গ্রাম মিশ্রিত হইয়াছে।

কাজেই, B তরল-কর্তৃক গৃহীত তাপ $= m_1 \times S_B \times (32-25)$ cal ... (iv)

এবং C-তরল-কর্তৃক বর্জিত তাপ $= m_1 \times S_C \times (35-32)$ cal ... (v)

(iv) এবং (v) হইতে লেখা যায়, $m_1 S_B \times 7 = m_1 S_C \times 3$

বা, $\frac{S_C}{S_B} = \frac{3}{7}$ .. (vi)

এইবার মনে করি যে, A তরলের m_2 g-এর সহিত সহিত C তরলের m_2 g মিশ্রিত করিয়া যে-মিশ্রণ পাওয়া গেল উহার উষ্ণতা=θ°C। স্পষ্টতই, $15 < \theta < 35$°C হইবে। কাজেই,

A তরল-কর্তৃক গৃহীত তাপ $= m_2 S_A \times (\theta - 15)$ cal ... (vii)

এবং C তরল-কর্তৃক বর্জিত তাপ $= m_2 \times S_C \times (35-\theta)$ cal ... (viii)

(vii) এবং (viii) হইতে পাই,

$m_2 S_A \times (\theta - 15) = m_2 S_C \times (35 - \theta)$ [∵ গৃহীত তাপ=বর্জিত তাপ]

$\frac{35-\theta}{\theta-15} = \frac{S_A}{S_C}$ ... (ix)

আবার, (iii) এবং (iv) হইতে পাই, $\frac{S_A}{S_C} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$ ... (x)

(ix) এবং (x) হইতে পাই, $\frac{35-\theta}{\theta-15} = \frac{2}{7}$ বা, $\theta = 30\frac{5}{9}$°C

উদাহরণ 5.13 একটি আয়তনের তার্পিন এবং জলকে 70°C হইতে 50°C-এ নামিতে দেওয়া হইল। ইহাতে সময় লাগিল যথাক্রমে 3·5 এবং 10 মিনিট। তার্পিনের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর। তার্পিনের আপেক্ষিক গুরুত্ব=0·88। ধরিয়া লও যে, নিউটনের শীতলীকরণ সূত্রটি প্রযোজ্য।

[Equal volumes of turpine and water are allowed to cool from 70°C to 50°C, the times taken being respectively 3·5 and 10 minutes. Calculate the specific heat of turpine. (Specific gravity of turpine 0·88. Assume that Newton's law of cooling holds good.]

সমাধান: ধরি তার্পিন এবং জল—উভয়ের আয়তন v cm³

কাজেই, জলের v g এবং তার্পিনের ভর 0·88 g।

মনে করি, তার্পিনের আপেক্ষিক তাপ=s

জল-কর্তৃক বর্জিত তাপ $= v \times 1 \times (70-50)$ cal

তার্পিন-কর্তৃক বর্জিত তাপ$=0{\cdot}88\times s\times(70-50)$ cal

নিউটনের শীতলীভবনের সূত্রানুসারে, একই উষ্ণতায় পাল্লায় ঠাণ্ডা হইবার কালে তার্পিন-কর্তৃক ও জল-কর্তৃক বর্জিত তাপ সময়ের সমানুপাতিক হইবে। কারণ বর্জনের হার উভয় ক্ষেত্রেই সমান।

কাজেই, $$\frac{v\times(70-50)}{v\times0{\cdot}88\times(70-50)}=\frac{10}{3{\cdot}5}$$

বা, $10\times0{\cdot}88\times s=3{\cdot}5$ বা, $s=0{\cdot}40$

সুতরাং, তার্পিনের আপেক্ষিক তাপ 0·40

উদাহরণ 5.14 যখন 50°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 500 g পারদকে একটি পাত্রে রক্ষিত 15°C উষ্ণতার 90 g জলে ঢালা হয় তখন মিশ্রণের উষ্ণতা হয় 19°C। আবার, যখন 50°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 90 g জলকে একই পাত্রে রক্ষিত 15°C উষ্ণতার 500 g পারদে ঢালা হয় তখন মিশ্রণের উষ্ণতা হয় 38°C। পারদের তাপধারকত্ব এবং পাত্রের জলসম নির্ণয় কর।

[When 500 g of mercury at 50°C is poured into a vessel containing 90 g of water at a temperature of 15°C, the temperature of the mixture is 19°C. Again, when 90 g of water at 50°C is poured into 500 g of mercury at 15°C contained in the same vessel, the temperature of the mixture is 38°C. Find the thermal capacity of mercury and the water equivalent of the vessel.]

সমাধান ঃ ধরা যাক, পাত্রের জলসম$=$W g

এবং পারদের আপেক্ষিক তাপ$=s$

প্রথম ক্ষেত্রে, পারদ-কর্তৃক বর্জিত তাপ$=500\times s(50-19)$

$=500\times31\ s$ cal

পাত্র ও জল-কর্তৃক গৃহীত তাপ$=(\mathrm{W}+90)\times(19-15)=4\ (\mathrm{W}+19)$ cal

এখন, গৃহীত তাপ$=$বর্জিত তাপ

বা, $4(\mathrm{W}+19)=500\times31s$ ... (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, জল-কর্তৃক বর্জিত তাপ$=90\times(50-38)=90\times12$ cal

পাত্র ও পারদ-কর্তৃক গৃহীত তাপ$=(\mathrm{W}+500\ s)\times(38-15)$

$=23(\mathrm{W}+500\ s)$ cal

এখন গৃহীত তাপ$=$বর্জিত তাপ

কাজেই, $23\ (\mathrm{W}+500\ s)=90\times12$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) সমাধান করিয়া পাই, পাত্রের জলসম $\mathrm{W}=31{\cdot}3$ g

এবং পারদের ধারকত্ব, $500s=15{\cdot}65$ cal/°C

উদাহরণ 5.15 s_1, s_2 এবং s_3 আপেক্ষিক তাপবিশিষ্ট তিনটি তরলের সমান ভর লইয়া উহাদের মিশ্রিত করা হইল। তরল তিনটির প্রাথমিক উষ্ণতা যথাক্রমে θ_1, θ_2 এবং θ_3 হইলে দেখাও যে, মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা,

$$\theta=(s_2\theta_1+s_2\theta_2+s_3\theta_3)/(s_1+s_2+s_3)$$

[Equal masses of three liquids of specific heats s_1, s_2 and s_3 are mixed together. If the initial temperatures of the liquids are θ_1, θ_2 and θ_3 respectively, show that the final temperature of the mixture is $\theta=(s_1\theta_1+s_2\theta_2+s_3\theta_3)/(s_1+s_2+s_3)$.]

সমাধান : মনে করি, প্রতিটি তরলের m গ্রাম লইয়া মিশ্রিত করা হইয়াছে। প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় তরলের আপেক্ষিক তাপ যথাক্রমে s_1, s_2 এবং s_3। মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা $=\theta$

কাজেই, প্রথম তরল-কর্তৃক গৃহীত তাপ, $H_1=m\,s_1(\theta_1-\theta)$ ... (i)

দ্বিতীয় তরল-কর্তৃক গৃহীত তাপ, $H_2=m\,s_2(\theta_2-\theta)$ ... (ii)

এবং তৃতীয় তরল-কর্তৃক গৃহীত তাপ, $H_3=m\,s_3(\theta_3-\theta)$ ... (iii)

বাহির হইতে কোন তাপ গৃহীত হইতেছে না বলিয়া, $H_1+H_2+H_3=0$

বা, $m\,s_1(\theta_1-\theta)+m\,s_2(\theta_2-\theta)+m\,s_3(\theta_3-\theta)=0$

বা, $\theta(s_1+s_2+s_3)=s_1\theta_1+s_2\theta_2+s_3\theta_3$

বা, $$\theta=\frac{s_1\theta_1+s_2\theta_2+s_3\theta_3}{(s_1+s_2+s_3)}$$

● **দ্রষ্টব্য :** এই অঙ্কটি কষিবার সময় আমরা ধরিয়া লইয়াছি যে, মিশ্রিত হইবার ফলে প্রতিটি তরলই তাপ গ্রহণ করিতেছে। প্রকৃতপক্ষে, মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা θ-এর মান তিনটি তরলের প্রাথমিক উষ্ণতার প্রতিটি অপেক্ষা বেশি হইতে পারে না। অর্থাৎ মিশ্রিত হইবার ফলে সকল তরল তাপ গ্রহণ করে না। যে-তরলের প্রাথমিক উষ্ণতা অন্তিম উষ্ণতা θ অপেক্ষা বেশি সেই তরলটি তাপ বর্জন করে। অর্থাৎ, এক্ষেত্রে, H_1, H_2 এবং H_3-এর মধ্যে সব কয়টি ধনাত্মক নয়। যেক্ষেত্রে গৃহীত তাপের মান ঋণাত্মক সেক্ষেত্রে বস্তুটি প্রকৃতপক্ষে তাপ অর্জন করে। বর্জিত তাপকে 'ঋণাত্মক গৃহীত তাপ' ধরিলে 'গৃহীত তাপ=বর্জিত তাপ'—সমীকরণ হইতে পাই, 'মোট গৃহীত তাপ=0' অর্থাৎ, আলোচ্য ক্ষেত্রে, $H_1+H_2+H_3=0$

উদাহরণ 5.16 10 g ভরবিশিষ্ট এবং 0·1 আপেক্ষিক তাপবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের বলকে একটি চুল্লিতে উত্তপ্ত করিয়া বাহির করিয়া আনা হইল। ইহাকে দ্রুত 200 g ভরবিশিষ্ট এবং 0·09 আপেক্ষিক তাপবিশিষ্ট 50°C উষ্ণতার একটি পুরু তামার পাত্রে ফেলা হইল। এইবার সমগ্র পাত্রকে 20 g জলসমবিশিষ্ট একটি ক্যালরিমিটারে রক্ষিত 20°C উষ্ণতার 180 g জলে ফেলা হইল। ক্যালরিমিটারে স্থাপিত থার্মোমিটারটি সর্বোচ্চ উষ্ণতা দেখাইল 26°C ; চুল্লির উষ্ণতা নির্ধারণ কর এবং ক্যালরিমিটারে কোন স্থানীয় স্ফুটন হইবে কিনা তাহা হিসাব করিয়া বল।

[A steel ball of mass 10 g and specific heat 0·1 after being heated inside a furnace is taken out. It is then quickly caught inside a thick copper vessel of mass 200 g and specific heat 0·09 at 50°C. The whole is then dropped into a calorimeter of water equivalent 20 g containing 180 g of water at 20°C. The thermometer in the calorimeter shows a maximum temperature of 26°C.

Calculate the temperature of the furnace and find out by calculation if there was any local boiling in the calorimeter.]

সমাধান ঃ ধরা যাক, চুল্লির উষ্ণতা $=\theta°C$

ইস্পাতের বল এবং তামার পাত্র-কর্তৃক বর্জিত তাপের মোট পরিমাণ

$$=10\times0{\cdot}1\times(\theta-26)+200\times0{\cdot}09\times(50-26)$$

$$=(\theta-26)+18\times24 \text{ cal} \qquad \cdots \qquad (i)$$

ক্যালরিমিটার ও উহাতে রক্ষিত জল-কর্তৃক গৃহীত তাপ

$$=(180+20)\times(26-20)=200\times6 \text{ cal}$$

কাজেই, $(\theta-26)+18\times24 \quad =200\times6$

(বর্জিত তাপ) (গৃহীত তাপ)

বা, $\theta=1200-18\times24+26=794$

অর্থাৎ, চুল্লির উষ্ণতা $=794°C$

এইবার মনে করি, উত্তপ্ত ইস্পাতের বলকে পুরু তামার পাত্রে ফেলিলে উহার উষ্ণতা হইবে $t°C$।

কাজেই ইস্পাতের বল-কর্তৃক বর্জিত তাপ

$$10\times0{\cdot}1\times(794-t)=(794-\theta) \text{ cal}$$

তামার পাত্র কর্তৃক গৃহীত তাপ $=200=0{\cdot}9\times(t-50)$ cal

কাজেই, $794-t=18(t-50)$ বা, $19t=794+900=1694$

বা, $t=89{\cdot}16°C$

ইস্পাতের বলটিকে তামার পাত্রে ফেলিলে ঐ সংস্থার চূড়ান্ত উষ্ণতা জলের স্ফুটনাঙ্ক (100°C) অপেক্ষা কম হয় বলিয়া ক্যালরিমিটারে কোন স্থানীয় স্ফুটন হইবে না।

● **দ্রষ্টব্য ঃ** লক্ষণীয় যে, এক্ষেত্রে ইস্পাতের বলটির উষ্ণতা স্ফুটনাঙ্ক অপেক্ষা অনেক বেশি (794°C) বলিয়া ইস্পাতের বলটিকে সরাসরি ক্যালরিমিটারে ফেলিলে স্থানীয় স্ফুটন ঘটিত। ইহাতে ক্যালরিমিটারে রক্ষিত জলের একাংশ বাষ্পের আকারে ক্যালরিমিটার হইতে বাহির হইয়া যাইত, ফলে এই পদ্ধতিতে চুল্লির উষ্ণতার পরিমাণ ত্রুটিপূর্ণ হইত। ক্যালরিমিতির পরীক্ষায় এইরূপ স্থানীয় স্ফুটন এড়াইবার জন্য জানা তাপধারকত্বের সহায়ক বস্তুর সাহায্য লওয়া হয়। উপরের উদাহরণে পুরু তামার পাত্রটিকে সহায়ক বস্তুরূপে লওয়া হইয়াছে। ইহাতে স্থানীয় স্ফুটনের সম্ভাবনা এড়ান গিয়াছে। প্রশ্নটিতে বলা হইয়াছে যে, তামার পাত্রটি 'পুরু'। ইহাও বিশেষ তাৎপর্যপূর্ণ। তামার পাত্রটি পাতলা হইলে দ্রুত তাপপরিবহণের ফলে পাত্র-সংলগ্ন জলের উষ্ণতা স্ফুটনাঙ্কে পৌঁছিতে পারিত এবং লীনতাপ শোষণ করিয়া বাষ্পীভূত হইতে পারিত, অর্থাৎ সেক্ষেত্রে স্থানীয় স্ফুটন এড়ান যাইত না।

উদাহরণ 5.17 গ্যাস বার্নারের সাহায্যে 60 ft³ আয়তনের স্নানের জলকে উত্তপ্ত করা হইল। 1 ft³ গ্যাসের দহনে 600 Btu তাপ নিঃসৃত হয় এবং 1000 ft³

গ্যাসের দাম 95 পয়সা। বার্নার হইতে নিঃসৃত তাপের 70% জলে সরবরাহিত হয় ধরিলে স্নানের জলকে 55°F উষ্ণতায় তুলিতে কত খরচ হইবে ?

[60 ft^3 of water meant for bath is heated by a gas burner. The heat given out by burning 1 ft^3 of the gas is 600 Btu and the cost of the gas is 95 paise per 1000 ft^3. What will be the cost of heating the bath water from 55°F to 100°F, assuming 70% of heat given out by the burner is delivered to ther water ?]

সমাধান ঃ 60 ft^3 স্নানের জলের ভর $=60\times62{\cdot}5$ lb

জলের উষ্ণতা-বৃদ্ধি $=100-55=45°F$

কাজেই, জলে সরবরাহিত তাপের পরিমাণ,

$$Q=60\times60{\cdot}5\times45 \text{ Btu} \quad \cdots \quad (i)$$

মনে করি, জলের এই উষ্ণতা-বৃদ্ধি করিতে গ্যাস বার্নারে V ft^3 আয়তন গ্যাস জ্বালান হইয়াছে।

সুতরাং, গ্যাস-বার্নার-কর্তৃক নিঃসৃত তাপ

$$Q'=V\times600 \text{ Btu} \quad \cdots \quad (ii)$$

এই তাপের 70% জলে সরবরাহিত হইয়াছে বলিয়া সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$V\times600\times\tfrac{70}{100}=60\times62{\cdot}5\times45$$

বা, $$V=\frac{60\times62{\cdot}5\times45\times100}{600\times70}=401{\cdot}8$$

অর্থাৎ, প্রয়োজনীয় জ্বালানি-গ্যাসের পরিমাণ $=401{\cdot}8$ ft^3

শর্তানুসারে, 1000 ft^3 গ্যাসের মূল্য $=95$ পয়সা

$\therefore$ $401{\cdot}8$ ft^3 আয়তন গ্যাসের মূল্য $=\frac{95}{1000}\times401{\cdot}8=38$ পয়সা (প্রায়)

উদাহরণ 5.18 1 অ্যাটমসফিয়ার চাপে এবং 0°C উষ্ণতায় 0·00125 g/cm^3 ঘনবিশিষ্ট কিছু পরিমাণ গ্যাসের আয়তন 8 লিটার। স্থির চাপে এই গ্যাসের উষ্ণতা বৃদ্ধি করিয়া 15°C-এ তুলিতে 30 ক্যালরি তাপ প্রয়োজন হয়। স্থির চাপে এবং স্থির আয়তনে এই গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর। ($R=2$ cal mol^{-1} $°C^{-1}$)

[The volume of a certain gas, having a density of 0·00125 g/cm^3 under a pressure of 1 atmosphere and at a temperature of 0°C, is 8 litres. 30 calories of heat are required to raise the temperature of this gas to 15°C at constant pressure and at constant volume. ($R=2$ cal mol^{-1} $°C^{-1}$)]

সমাধান ঃ গ্যাসের আয়তন $=8$ লিটার $=8\times10^3$ cm^3

কাজেই, গ্যাসের মোট ভর $=0{\cdot}00125\times8\times10^3=10$ g

সুতরাং স্থির চাপে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ, c_p

$$=\frac{\text{সরবরাহিত তাপ}}{\text{ভর}\times\text{উষ্ণতা-বৃদ্ধি}}=\frac{30\ \text{cal}}{10\ \text{g}\times 15^\circ\text{C}}=0{\cdot}2\ \text{cal g}^{-1}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$$

1 অ্যাটমসফিয়ার চাপে এবং 0°C উষ্ণতায় 1 গ্রাম-অণু গ্যাসের আয়তন

$=22{\cdot}4$ লিটার $=22{\cdot}4\times 10^3\ \text{cm}^3$

∴ গ্যাসের আণবিক গুরুত্ব $=0{\cdot}00125\times 22{\cdot}4\times 10^3$

স্থির চাপে গ্যাসের মোলার আপেক্ষিক তাপ, C_p

$=0{\cdot}00125\times 22{\cdot}4\times 10^3\times 0{\cdot}2\ \text{cal mol}^{-1}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$

$=5{\cdot}6\ \text{cal mol}^{-1}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$ ... (i)

এখন, আমরা জানি যে, $C_p-C_v=R$

কাজেই, স্থির আয়তনে গ্যাসের মোলার আপেক্ষিক তাপ, C

$=C_p-R$

এখন, $R=2\ \text{cal mol}^{-1}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$ বলিয়া লেখা যায়,

$C_v=5{\cdot}6-2=3{\cdot}6\ \text{cal mol}^{-1}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$

1 mol গ্যাসের ভর $0{\cdot}00125\times 22{\cdot}4\times 10^3$ g বলিয়া $\text{cal g}^{-1}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$ এককে প্রকাশ করিলে স্থির আয়তনে আলোচ্য গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ,

$$c_v=\frac{3{\cdot}6}{0{\cdot}00125\times 22{\cdot}4\times 10^3}=0{\cdot}1286\ \text{cal g}^{-1}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$$

প্রশ্নমালা 5

1. 100°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 200 g তামাকে 10°C উষ্ণতার 50 g জলে ডুবাইয়া দিলে চূড়ান্ত উষ্ণতা কী হইবে নির্ণয় কর। (তামার আপেক্ষিক তাপ=0·09)

[Find the final temperature when 200 g of copper at 100°C is lowered into 50 g of water at 10°C. (Specific heat of copper =0·09)] [33·8°C]

2. দুইটি পদার্থের ঘনত্বের অনুপাত 2 : 3 এবং উহাদের আপেক্ষিক তাপ যথাক্রমে 0·12 এবং 0·09। ইহাদের একক আয়তনের তাপধারকত্বের তুলনা কর।

[The densities of two substances are in the ratio 2 : 3 and their specific heats are 0·12 and 0·09 respectively. Compare their thermal capacities per unit volume.] (H.S. '83 ; C.U. [I. Sc.] 1934) [8 : 9]

3. একটি ক্যালরিমিটারে রক্ষিত 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 5 g জলের সহিত 70°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 10 g জল মিশান হইল। মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা কত হইবে? ক্যালরিমিটারের জলসম=1·3 g।

[10 g of water at 70°C is mixed with 5 g of water at 0°C in a calorimeter. What will be the final temperature of the mixture? Water equivalent of the calorimeter=1·3 g.]

(C. U. (I. Sc.) 1945) [42·9°C]

4. 7 g অ্যালুমিনিয়ামের তাপধারকত্ব এবং জলসম নির্ণয় কর। ইহার উষ্ণতা 0°C হইতে 20°C-এ তুলিতে কী পরিমাণ তাপ প্রয়োজন? অ্যালুমিনিয়ামের আপেক্ষিক তাপ 0·21।

[Find the values of the thermal capacity and water equivalent of 7 g of aluminium. How much heat would be required to raise its temperature from 0°C to 20°C? Specific heat of aluminium=0·21] [1·47 cal/°C, 1·47 g, 29·4 cal]

5. 100 g ভরবিশিষ্ট এক খণ্ড তামাকে উত্তপ্ত করিয়া 100°C উষ্ণতায় তোলা হইল এবং উহাকে 40 g ভরবিশিষ্ট তামার পাত্রে রক্ষিত 10°C উষ্ণতাসম্পন্ন 150 g পেট্রোলিয়ামে ফেলা হইল। ইহাতে পেট্রোলিয়ামের উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইয়া 19·5°C হইল। পেট্রোলিয়ামের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর। তামার আপেক্ষিক তাপ 0·095।

[A piece of copper of mass 100 g is heated to 100°C and put into 150 g of petroleum at 10°C contained in a copper pot weighing 40 g. The temperature of petroleum rises to 19·5°C. Find the specific heat of petroleum. The specific heat of copper is 0·095.] [0·51]

6. 1 kg সীসাকে 10°C হইতে 100°C উষ্ণতায় তুলিতে যত ক্যালরি তাপ প্রয়োজন 3 kg তামাকে 0°C হইতে 10°C উষ্ণতায় তুলিতে তত ক্যালরি তাপ প্রয়োজন। তামার আপেক্ষিক তাপ 0·093 হইলে সীসার আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর।

[3 kg be copper requires as many calories of heat to be raised from 0°C to 10°C, as would be required to raise 1 kg of lead form 10°C to 100°C. If the specific heat of copper is 0·093, find the specific heat of lead.] (C. U. (I. Sc.) 1951) [0·031]

7. একটি ক্যালরিমিটারে 15·3°C উষ্ণতায় 70·2 g জল আছে। ইহার সহিত 36·5°C উষ্ণতার 143·7 g জল মিশান হইলে মিশ্রণের উষ্ণতা হয় 28·7°C। ক্যালরিমিটারের জলসম নির্ণয় কর।

[A calorimeter contains 70·2 g water at 15·3°C. If 143·7 g of water at 36·5°C is mixed with it, the temperature of the mixture becomes 28·7°C. Find the water equivalent of the calorimeter.] [13·4 g]

8. 80°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 50 g জলকে একটি ক্যালরিমিটারে ঢালা হইল। এই ক্যালরিমিটারের জলসম 5 g এবং উহাতে 20°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 45 g জল রহিয়াছে। চূড়ান্ত উষ্ণতা নির্ণয় কর।

[50 g of water at 80°C are poured into a calorimeter. The calorimeter has a water equivalent of 5 g and contains 45 g of water at 20°C. Calculate the final temperature.] [50°C]

9. 45·1 g ভরবিশিষ্ট একটি তামার তারের কুণ্ডলীকে একটি ক্যালরিমিটারে রক্ষিত 10°C উষ্ণতার 52·5 g জলে ফেলা হইল। জলে ডুবাইবার পূর্বে তামার

উষ্ণতা ছিল 99·6°C এবং জলে ডুবাইবার পরে তামা ও জলের সাধারণ উষ্ণতা হইল 16·8°C। তামার আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর।

[A coil of copper wire of mass 45·1 g was dropped into a calorimeter containing 52·5 g of water at 10°C. The copper before immersion was at 99·6°C and the common temperature of copper and water after immersion was 16·8°C. Find the specific heat of copper.] [0·0956]

10. 80°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 20 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে 30°C উষ্ণতা-বিশিষ্ট 30 g জলের মধ্যে ফেলা হইল। মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা কত হইবে? (বস্তুর উপাদানের আপেক্ষিক তাপ=0·1)

[A body of mass 20 g at a temperature of 80°C is dropped into 30 g of water at 30°C. What is the final temperature of the mixture ? (The specific heat of the material of the body=0·1)

[33·125°C]

11. একটি ক্যালরিমিটারের ভর 180 g এবং ইহার উপাদানের আপেক্ষিক তাপ 0·09; ইহার জলসম এবং ইহাকে 25°C হইতে 65°C উষ্ণতায় তুলিতে কী পরিমাণ তাপ প্রয়োজন হইবে তাহা নির্ণয় কর।

[A calorimeter has a mass of 180 g and the specific heat of its material is 0·09. Find its water equivalent and the amount of heat required to raise its temperature from 25°C to 65°C.]

[16·2 g, 648 cal]

12. একটি ক্যালরিমিটারে 16°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 85 g জল আছে। 80 g ভরবিশিষ্ট এবং 100°C উষ্ণতাবিশিষ্ট একটি পাথরকে ঐ জলে ফেলা হইল। ইহাতে জলের চূড়ান্ত উষ্ণতা হইল 30°C। পাথরের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর। (ক্যালরিমিটারের জলসম=5 g)

[A calorimeter contains 85 g of water at 16°C. A stone of mass 80 g and of temperature 100°C is dropped into it. If the resulting temperature is 30°C, find the specific heat of stone. (Water equivalent of the calorimeter=5 g) [·0225]

13. তোমার নিকট ফুটন্ত জলের এবং 20°C উষ্ণতার ট্যাপের জলের সরবরাহ আছে। উহাদের প্রতিটি হইতে কী পরিমাণ জল লইয়া জলপাত্রে মিশাইলে 35°C উষ্ণতার 60 লিটার জল পাওয়া যাইবে?

[You are provided with a supply of boiling water and of tap water at 20°C. What quantity of each would you take in order to get a bath containing 60 litres of water at 35°C ?]

[$11\frac{1}{4}$ লিটার ফুটন্ত জল এবং $48\frac{3}{4}$ লিটার ট্যাপের জল]

14. 200 g ভরবিশিষ্ট একটি প্ল্যাটিনাম বলকে অনেকক্ষণ ধরিয়া একটি চুল্লীতে রাখিয়া উহা হইতে তুলিয়া লইয়া 0°C উষ্ণতায় 150 g জলে ফেলা হইল। জলের

চূড়ান্ত উষ্ণতা 30°C হইলে চুল্লীর উষ্ণতা নির্ণয় কর। (প্ল্যাটিনামের আপেক্ষিক তাপ=0·031)

[A ball of mass 200 g made of platinum is kept in a furnace for a long time. It is then removed from it and immersed in 150 g of water at 0°C. If the final temperature of water is 30°C, what is the temperature of the furnace? (Specific heat of platinum=0·031.] [755·8°C]

15. একটি বৈদ্যুতিক কেটলীর জলসম 100 g, উহাতে 890 g জল লইয়া সুইচ্ টিপিয়া বৈদ্যুতিক প্রবাহ চালনা করা হইল। জলের প্রাথমিক উষ্ণতা 20°C হইলে এবং স্ফুটনাঙ্কে পৌঁছিতে মোট 3 মিনিট 45 সেকেণ্ড সময় লাগিলে বৈদ্যুতিক কেটলীতে তাপ উৎপাদনের হার কত? ধরিয়া লও যে, উৎপন্ন শক্তির শতকরা 20 ভাগ অপচিত হয়।

[The water equivalent of an electric kettle is 100 g. A mass of 890 g of water is taken in it and a current is sent through it by switching on the circuit. If the initial temperature of water is 20°C and if it takes 3 minutes and 45 seconds to reach the boiling point, what is the rate of production of heat in the kettle? Assume that 20% of heat produced is lost.] [440 cal/s]

16. 0·54 আপেক্ষিক তাপবিশিষ্ট 29°C উষ্ণতার একটি তরলের সহিত 0·36 আপেক্ষিক তাপবিশিষ্ট 11°C উষ্ণতাসম্পন্ন অপর একটি তরল মিশাইবার ফলে মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা হইল 17°C। তরল দুইটিকে ভরের কী অনুপাতে মিশান হইল?

[A liquid of specific heat 0·54 and temperature 29°C is mixed with a liquid of specific heat 0·36 and temperature 11°C. The final temperature of the mixture is 17°C. In what proportion by mass were the two liquids mixed?] [1 : 3]

17. একটি বস্তুর ভর M, আপেক্ষিক তাপ S এবং উষ্ণতা T°; বস্তুটিকে একটি তরলের মধ্যে ফেলা হইল। তরলের ভর m, আপেক্ষিক তাপ s এবং উষ্ণতা $t°$ হইলে প্রমাণ কর যে, মিশ্রণের অন্তিম উষ্ণতা, $\theta=(MST+mst)/(MS+ms)$। তরলটি যদি জল হয় তাহা হইলে দেখাও যে, $S=[m(\theta-t)]/[M(T-\theta)]$।

[A body of mass M and specific heat S at a temperature of T° is dropped into a mass m of a liquid of specific heat s at $t°$; prove that the final temperatue of the mixture is $\theta=(MST+mst)/(MS+ms)$, and that if the liquid is water, $S=m(\theta-t)]/[M(T-\theta)]$.

18. 80% রূপা এবং 20% তামার দ্বারা গঠিত একটি সঙ্কর ধাতুর তৈয়ারী একটি বস্তুর ভর 50 g এবং উষ্ণতা 100°C; বস্তুটিকে 50 g ভরবিশিষ্ট এবং 30°C উষ্ণতা-সম্পন্ন একটি তরলে ফেলা হইল। তরলের আপেক্ষিক তাপ 0·5 হইলে মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা কত হইবে? (রূপার আপেক্ষিক তাপ=0·05 এবং তামার আপেক্ষিক তাপ=0·1)।

[A body made of an alloy having 80% silver and 20% copper has a mass of 50 g and a temperature of 100°C. The body is dropped into a liquid of mass 50 g at a temperature of 30°C. What is the final temperature of the mixture if the specific heat of the liquid=0·5 ? (Specific heat of silver=0·05 and that of copper =0·1)] [37·5°C]

19. একই ভরবিশিষ্ট তিনটি তরল A, B এবং C-এর উষ্ণতা যথাক্রমে 12°C, 19°C এবং 28°C। যখন A এবং B-কে মিশ্রিত করা হয় তখন মিশ্রণের উষ্ণতা হয় 16°C ; যখন B এবং C-কে মিশ্রিত করা হয় তখন মিশ্রণের উষ্ণতা হয় 23°C। A এবং C-কে মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের উষ্ণতা কত হইবে ?

[The temperature of equal masses of three different liquids A, B and C are 12°C, 19°C and 28°C respectively. The temperature of the mixture obtained by mixing A and B is 16°C ; and when B and C are mixed the temperature of the mixture is 23°C. What will be the temperature of the mixture when A and C are mixed ?] [20·25°C]

20. এক টুকরা তামাকে উত্তপ্ত করিয়া 100°C-এ তোলা হইল এবং ইহাকে দ্রুত একটি ক্যালরিমিটারের 150 g জলে ডুবান হইল। ইহাতে জলের উষ্ণতা 14·3°C হইতে 17·8°C-এ উঠিল। একই তামার টুকরার সাহায্যে অনুরূপ আর একটি পরীক্ষায় ক্যালরিমিটারের জল একই ক্যালরিমিটারে রক্ষিত 180 g ভরের একটি তরল দ্বারা প্রতিস্থাপিত হইল এবং এক্ষেত্রে উষ্ণতা পরিবর্তিত হইয়া 15°C হইতে 20°C-এ আসিল। ক্যালরিমিটারটির জলসম 10 g হইলে উক্ত তরলের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর।

[A piece of copper heated to 100°C is quickly immersed in 150 g of water in a calorimeter, whereby the temperature of the water is raised from 14·3°C to 17·8°C. A similar experiment is made with the same piece of copper after replacing the water by 180 g of a liquid in the same calorimeter. In this case the increase in temperature is from 15°C to 20°C. If the water equivalent of the calorimeter is 10 g, calculate the specific heat of the liquid. [0·55]

21. যখন এক খণ্ড অ্যালুমিনিয়ামের উষ্ণতা 1°C বৃদ্ধি পায় তখন উহার প্রতিটি পরমাণুর শক্তি যে-পরিমাণ বৃদ্ধি পায় আর্গ এককে তাহার মান নির্ণয় কর। 27 g অ্যালুমিনিয়ামে 6×10^{23} সংখ্যক পরমাণু থাকে। অ্যালুমিনিয়ামের আপেক্ষিক তাপ=0·2।

[Find the increase in energy per atom of aluminium when temperature of a piece of aluminium increases by 1°C. 27 g of aluminium contains 6×10^{23} atoms and specific gravity of aluminium=0·2] [$3·78\times10^{-16}$ erg]

22. সমান ভরবিশিষ্ট তিনটি বিভিন্ন তরল P, Q এবং R-এর উষ্ণতা যথাক্রমে 15°C, 25°C এবং 42°C। P এবং Q মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের উষ্ণতা হয় 21°C ;

Q এবং R মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের উষ্ণতা হয় 32°C। P এবং R মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের উষ্ণতা কত হইবে? ক্যালরিমিটারের জলসম উপেক্ষা কর।

[The temperatures of equal masses of three different liquids P, Q and R are 15°C, 25°C and 42°C respectively. On mixing P and Q, the temperature of the mixture is 21°C and on mixing Q and R, the temperature of the mixture is 32°C. What would be the temperature of the mixture, if P and R were mixed? Neglect the water equivalent of the calorimeter.] [28·83°C]

23. একটি ক্যালরিমিটারে 0°C উষ্ণতায় 250 g জল এবং 200 g বরফ আছে। ক্যালরিমিটারটির জলসম 50 g। যদি 100°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 200 g বাষ্প ঐ মিশ্রণের মধ্য দিয়া পাঠান হয় তাহা হইলে ক্যালরিমিটারের চূড়ান্ত উষ্ণতা কত হইবে নির্ণয় কর। ক্যালরিমিটারের অভ্যন্তরস্থ তবলের মোট ভর কত হইবে তাহাও নির্ণয় কর। আপেক্ষিক তাপ এবং লীন তাপের প্রচলিত মান ধরিয়া লও।

[In a calorimeter, there are 250 g of water and 200 g of ice at 0°C. The water equivalent of the calorimeter is 50 g. If 200 g of steam at 100°C be passed through their mixture, find the final temperature of the calorimeter. Also find the total mass of the contents of the calorimeter. Take the usual values of specific heat and latent heat. [100°C, 572·22 g]

ষষ্ঠ অধ্যায়

অবস্থার পরিবর্তন

6.1 লীন তাপ ঃ গলনাঙ্কে অবস্থার পরিবর্তনের সময় প্রতি গ্রাম পদার্থকে কঠিন অবস্থা হইতে তরল অবস্থায় রূপান্তরিত করিতে যে-পরিমাণ তাপের সরবরাহ প্রয়োজন অথবা তরল হইতে কঠিনে রূপান্তরিত করিতে যে-পরিমাণ তাপ নিষ্কাশন প্রয়োজন তাহাকে ঐ পদার্থের **গলনের লীন তাপ** (latent heat of fusion) বলা হয়। **বরফের গলনের লীন তাপ 80 ক্যালরি/গ্রাম (cal/g)**।

স্ফুটনাঙ্কে উষ্ণতা স্থির রাখিয়া এক গ্রাম তরলকে সম্পূর্ণভাবে বাষ্পে রূপান্তরিত করিতে যে-পরিমাণ তাপ প্রয়োজন তাহাকে ঐ তরলের **বাষ্পীভবনের লীন তাপ** (latent heat of vaporisation) বলা হয়। **জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ 540 ক্যালরি/গ্রাম (cal/g)**।

উষ্ণতার সহিত জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ (L) নিম্নের সমীকরণ-অনুসারে পরিবর্তিত হয়, $L = 598{\cdot}8 - 0{\cdot}60\,t$ ক্যালরি/গ্রাম

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 6.1 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 2·5 g বরফকে 30°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 10 g জলে ফেলা হইল এবং একটি অপরিবাহী হাতলের সাহায্যে ডুবাইয়া রাখা হইল। ইহাতে চূড়ান্ত উষ্ণতা কী হইবে ?

[2·5 g of ice at 0°C is placed in 10 g of water at 30°C and is kept immersed by a nonconducting handle. What will be the resulting temperature ?]

সমাধান : মনে করি, মিশ্রণের অন্তিম উষ্ণতা $=\theta°C$

এখন, বরফ-কর্তৃক গৃহীত তাপ

$=mL+m\theta$ [L=বরফের গলনের লীন তাপ এবং m=বরফের ভর]

$=2·5\times 80+2·5\times\theta$ cal ... (i)

জল-কর্তৃক তাপ $=M(30-\theta)$ cal $=10(30-\theta)$ cal ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $2·5\times 80+2·5\times\theta=10\times(30-\theta)$

(গৃহীত তাপ) (বর্জিত তাপ)

বা, $10\theta+2·5\theta=300-200$ বা, $\theta=\frac{100}{12·5}=8$

কাজেই, মিশ্রণের অন্তিম উষ্ণতা $=8°C$

উদাহরণ 6.2 20°C উষ্ণতায় 200 g টিনকে গলাইতে কত একক তাপ প্রয়োজন ? টিনের গলনাঙ্ক=232°C ; টিনের আপেক্ষিক তাপ=0·055 এবং টিনের লীন তাপ=14 cal/g।

[How much units of heat are required to melt 200 g of tin originally at 20°C ? Melting point of tin=232°C, specific heat of tin=0·055, latent heat of tin=14 cal/g.]

সমাধান : 200 g টিনকে 20°C উষ্ণতা হইতে গলনাঙ্ক বা 232°C উষ্ণতায় লইয়া যাইতে প্রয়োজনীয় তাপ $=200\times 0·055\times(232-20)=11\times 212$
$=2332$ cal

টিনকে গলাইবার জন্য প্রয়োজনীয় তাপ=টিনের ভর × লীন তাপ
$=200\times 14=2800$ cal

∴ প্রয়োজনীয় মোট তাপ $=2332+2800=5132$ cal

উদাহরণ 6.3 −10°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 1 kg বরফকে 30°C উষ্ণতাবিশিষ্ট জলে পরিণত করিতে কী পরিমাণ তাপ লাগিবে ? বরফের আপেক্ষিক তাপ=0·5 এবং বরফের গলনের লীন তাপ=80 cal/g।

[How much heat is required to convert 1 kg of ice at −10°C to water at 30°C, if the specific heat of ice=0·5 and the latent heat of fusion of ice=80 cal/g ?]

সমাধান : 1 kg বা 1000 g বরফকে −10°C উষ্ণতা হইতে 0°C উষ্ণতায় আনিতে প্রয়োজনীয় তাপ $=1000\times 0·5\times 10=5000$ cal

এই বরফের গলনের জন্য প্রয়োজনীয় তাপ $=1000\times 80=80,000$ cal

কাজেই, (5,000+80,000) cal তাপ দিলে −10°C উষ্ণতার 1 kg বরফ 0°C উষ্ণতার জলে পরিণত হয়।

এই জলের উষ্ণতা বৃদ্ধি করিয়া 30°C করিতে প্রয়োজনীয় তাপ

$$=1000\times1\times30=30{,}000 \text{ cal}$$

কাজেই, নির্ণেয় মোট তাপ=5,000+80,000+30,000=1,15,000 cal

উদাহরণ 6.4 শূন্য অবস্থায় একটি ক্যালরিমিটারের ভর 60 g। ইহাতে কিছু পরিমাণ জল ঢালা হইল। ক্যালরিমিটার ও জলের মোট ভর 460 g। এইবার ক্যালরিমিটারে 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট কিছুটা বরফ ফেলা হইল। বরফ ফেলিবার পূর্বে ক্যালরিমিটারের জলের উষ্ণতা ছিল 38°C এবং বরফ গলিয়া যাইবার পর মিশ্রণের অন্তিম উষ্ণতা হইল 5°C। ক্যালরিমিটার, জল এবং বরফের মোট ভর 618 g। বরফের আপেক্ষিক তাপ 0·1 হইলে উহার গলনের লীন তাপ নির্ণয় কর।

[An empty calorimeter weighs 60 g. Some water is poured into it. The calorimeter with its contents weighs 460 g. Some pieces of ice at 0°C are now dropped into it. The temperature of the water in the calorimeter before the introduction of water was 38°C. When the ice melts the final temperature of the mixture is 5°C. Calorimeter, water and ice together weigh 618 g. If the specific heat of the material of the calorimeter is 0·1, find the latent heat of fusion of ice.]

সমাধান ঃ ক্যালরিমিটারে রক্ষিত জলের পরিমাণ=460−60=400 g

ব্যবহৃত বরফের ভর=618−460=158 g

ক্যালরিমিটার এবং জল-কর্তৃক গৃহীত তাপ

$$=[60\times0{\cdot}1+400\times1]\times[38-5]=406\times33 \text{ cal} \qquad \text{(i)}$$

158 g বরফ গলিয়া গিয়া 0°C উষ্ণতার জলে পরিণত হইতে প্রয়োজনীয় তাপ

$$=158\times L \text{ cal}$$

এখানে, L=বরফের গলনের লীন তাপ (cal/g এককে) (ধরি)

মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা 5°C বলিয়া বরফ-গলা জল আরও কিছুটা তাপ শোষণ করিবে। এই তাপের পরিমাণ=158×1×(5−0)=790 cal

বরফ-কর্তৃক গৃহীত মোট তাপ=158L+790 ... (ii)

ক্যালরিমিটারের মূলনীতি-অনুসারে, গৃহীত তাপ=বর্জিত তাপ

$$\therefore \quad 158L+790=406\times33$$

বা, $L=\frac{13398-790}{158}=80$ cal/g (প্রায়)

উদাহরণ 6.5 −10°C উষ্ণতার 100 g বরফের সহিত 30°C উষ্ণতার 400 g জল মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা কত হইবে? বরফের আপেক্ষিক তাপ=0·5 এবং বরফের লীন তাপ=80 cal/g।

[What will be the final temperature of the mixture when 100 g of ice at −10°C is mixed with 400 g of water at 30°C? Specific heat of ice=0·5 and the latent heat of fusion of ice=80 cal/g.]

সমাধান ঃ প্রথমে দেখিতে হইবে যে, সমস্ত বরফ গলিবে কিনা। $-10°C$ উষ্ণতাবিশিষ্ট 100 g বরফের গলিবার জন্য প্রয়োজনীয় তাপ

$=100\times0{\cdot}5\times10+100\times80=500+8000=8500$ cal ... (i)

30°C উষ্ণতার 400 g জল 0°C উষ্ণতায় আসিতে যে-পরিমাণ তাপ বর্জন করে তাহার মান $=400\times1\times30=12000$ cal ... (ii)

(i) এবং (ii) হইতে বুঝা যাইতেছে যে, সমস্ত বরফ গলিবে এবং মিশ্রণের উষ্ণতা 0°C অপেক্ষা বেশি হইবে।

মনে করি, মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা $=\theta°C$

কাজেই, বরফ-কর্তৃক গৃহীত মোট তাপ $=8500+100\,(\theta-0)$ cal

জল-কর্তৃক বর্জিত মোট তাপ $=400\times1\times(30-\theta)$

ক্যালরিমিটারের মূলনীতি-অনুসারে, গৃহীত তাপ = বর্জিত তাপ

$\therefore\ 8500+100\theta=400\,(30-\theta)$ সুতরাং, $\theta=7°C$

উদাহরণ 6.6 210 g ভরবিশিষ্ট একটি তামার ক্যালরিমিটারে 30°C উষ্ণতাবিশিষ্ট এবং 400 g ভরবিশিষ্ট একটি তরল আছে। যতক্ষণ পর্যন্ত না ক্যালরিমিটারের উষ্ণতা 40°C হয় ততক্ষণ পর্যন্ত উহাতে 100°C উষ্ণতার বাষ্প পাঠান হইল। যদি ব্যবহৃত বাষ্পের ভর 4·2 g হয়, তাহা হইলে তরলটির আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর। দেওয়া আছে যে. বাষ্পের লীন তাপ $=539$ cal/g. তামার আপেক্ষিক তাপ $=0{\cdot}1$।

[A copper calorimeter of mass 210 g contains 400 g of a liquid at 30°C. Dry steam at 100°C is passed into the calorimeter until the temperature rises to 40°C. If the mass of steam passed is 4·2 g, calculate the specific heat of the liquid. Given that the latent heat of vaporisation of water at 100°C = 539 cal/g, specific heat of copper = 0·1]

সমাধান ঃ মনে করি, তরলটির আপেক্ষিক তাপ $=s$

ক্যালরিমিটার এবং তরল-কর্তৃক গৃহীত তাপ

$=210\times0{\cdot}1\times(40-30)+400\times s\times(40-30)$

$=(21+400\,s)\times10$ cal ... (i)

বাষ্প-কর্তৃক বর্জিত তাপ $=4{\cdot}2\times539+4{\cdot}2\times[100-40]$

$=4{\cdot}2\times539+4{\cdot}2\times60=4{\cdot}2\times599$ cal ... (ii)

ক্যালরিমিটারের মূলনীতি-অনুসারে, গৃহীত তাপ = বর্জিত তাপ

$\therefore\ (21+400\,s)\times10=4{\cdot}2\times599$

বা, $s=\dfrac{4{\cdot}2\times599-21\times10}{400\times10}=0{\cdot}576$

উদাহরণ 6.7 48·5 g ভরের এবং 10·7°C উষ্ণতার একটি ধাতুখণ্ডকে বাষ্প-প্রবাহে রাখিলে উহাতে 0·762 g বাষ্প ঘনীভূত হইতে দেখা যায়। ধাতুটির আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর।

[When a piece of metal of mass 48·5 g at 10·7°C is exposed to a stream of steam, 0·762 g of steam is found to condense. Calculate the specific heat of metal.]

সমাধান : মনে করি, ধাতুটির আপেক্ষিক তাপ $= s$

ধাতুখণ্ডটি শেষ পর্যন্ত বাষ্পের উষ্ণতায় বা 100°C উষ্ণতায় আসিবে।

কাজেই, ধাতুখণ্ড-কর্তৃক গৃহীত তাপ

$= 48{\cdot}5 \times s \times (100 - 10{\cdot}7)$ cal ··· (i)

এই তাপ সরবরাহ করিয়া 0·762 g বাষ্প ঘনীভূত হয়। বাষ্প-কর্তৃক বর্জিত তাপ $= 0{\cdot}762 \times 540$ cal ··· (i)

(কেননা, জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ $= 540$ cal/g)

এখন, গৃহীত তাপ $=$ বর্জিত তাপ

কাজেই, $48{\cdot}5 \times s \times 89{\cdot}3 = 0{\cdot}762 \times 540$

বা, $s = \dfrac{0{\cdot}762 \times 540}{48{\cdot}5 \times 89{\cdot}3} = 0{\cdot}095$

উদাহরণ 6.8 একটি আবদ্ধ পাত্রে 0°C উষ্ণতায় 10 g বরফ আছে। ইহাতে ধীরে ধীরে 100°C উষ্ণতার বাষ্প চালনা করা হইল। যখন বরফ গলিয়া নিঃশেষিত হইয়া গেল তখন পাত্রে মোট জলের পরিমাণ নির্ণয় কর। বরফের গলনের লীন তাপ $= 80$ cal/g এবং জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ $= 540$ cal/g।

[In a closed vessel there is 10 g of ice at 0°C, into which steam at 100°C is slowly introduced. Calculate the total amount of water when the last bit of ice in the vessel melts. The latent heat of fusion of ice $= 80$ cal/g and the latent heat of vaporisation of steam $= 540$ cal/g.]

সমাধান : 0°C উষ্ণতার 10 g বরফকে গলাইয়া জলে পরিণত করিতে প্রয়োজনীয় লীন তাপ $= 10 \times 80 = 800$ cal ··· (i)

মনে করি, এই তাপ যোগাইবার জন্য পাত্রে x g বাষ্প প্রবেশ করান হইয়াছে। এই x g বাষ্প 0°C উষ্ণতার জলে পরিণত হইতে যে-পরিমাণ তাপ বর্জন করে উহার মান $= x \times 540 + x \times 100 = x \times 640$ cal ··· (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়, $x \times 640 = 800$

বা, $x = \frac{800}{640} = 1{\cdot}25$

অর্থাৎ, আবদ্ধ পাত্রের সমগ্র বরফকে গলাইবার জন্য উহাতে 1·25 g বাষ্প প্রবেশ করাইতে হইবে। সুতরাং, যখন সমগ্র বরফ গলিয়া যাইবে তখন পাত্রে জলের পরিমাণ $= (10 + 1{\cdot}25) = 11{\cdot}25$ g

উদাহরণ 6.9 পরীক্ষাগারে জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ নির্ণয়ের পরীক্ষায় নিম্নের উপাত্তগুলি পাওয়া গেল :

ক্যালরিমিটার ও আলোড়কের ভর $= 105{\cdot}88$ g ; ক্যালরিমিটার, আলোড়ক ও জলের ভর $= 384{\cdot}28$ g ; ক্যালরিমিটার, আলোড়ক, জল এবং ব্যবহৃত বাষ্পের ভর $= 394{\cdot}04$ g ; জলের প্রারম্ভিক উষ্ণতা $= 4{\cdot}4$°C, বাষ্পের উষ্ণতা $= 100$°C,

মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা$=25\cdot4°C$ এবং ক্যালরিমিটার ও আলোড়কের উপাদানের আপেক্ষিক তাপ$=0\cdot095$।

100°C উষ্ণতায় জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ নির্ণয় কর।

[In determining the latent heat of vaporisation in the laboratory the following data are obtained :

Mass of the calorimeter and stirrer$=105\cdot88$ g ; mass of the calorimeter, stirrer and water$=384\cdot28$ g, mass of the calorimeter, stirrer, water and steam used$=394\cdot04$ g ; the initial temperature of water$=4\cdot4°C$, temperature of steam$=100°C$, the final temperature of the mixture$=25\cdot4°C$, the specific heat of the material of the calorimeter and the stirrer$=0\cdot095$. Find the latent heat of vaporisation of water at 100°C.]

সমাধান : ব্যবহৃত জলের ভর$=(384\cdot28-105\cdot88)=278\cdot40$ g

ক্যালরিমিটার এবং আলোড়কের জলসম$=105\cdot88\times0\cdot095$ g

ক্যালরিমিটার, আলোড়ক ও উহার মধ্যবর্তী জলের উষ্ণতা-বৃদ্ধি

$$=(25\cdot4-4\cdot4)=21°C$$

কাজেই, ক্যালরিমিটার, আলোড়ক ও জল-কর্তৃক গৃহীত তাপ

$$=(105\cdot88\times0\cdot095+278\cdot40)\times21 \text{ cal}$$

ব্যবহৃত বাষ্পের ভর$=394\cdot04-384\cdot28=9\cdot76$ g

মনে করি, 100°C উষ্ণতায় জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ$=L$ cal/g

কাজেই, $9\cdot76$ g বাষ্প 100° C উষ্ণতার জলে পরিণত হইতে যে-পরিমাণ তাপ বর্জন করে তাহার মান$=9\cdot76\times L$ cal

মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা $25\cdot4°C$ বলিয়া বাষ্প-কর্তৃক বর্জিত মোট তাপ

$$=9\cdot76\times L+9\cdot76\ (100-25\cdot4)$$

ক্যালরিমিতির মূলনীতি-অনুসারে, গৃহীত তাপ$=$বর্জিত তাপ

$$\therefore\ 9\cdot76\ L+9\cdot76\times74\cdot6=(105\cdot88\times0\cdot095+278\cdot40)\times21$$

সুতরাং, $L=546$ cal/g

উদাহরণ 6.10 বাষ্পের লীন তাপ 536 cal/g এবং বরফের লীন তাপ 80 cal/g। 1 kg বরফকে জলে পরিণত করিতে 100°C উষ্ণতাবিশিষ্ট কী পরিমাণ ভরের বাষ্প প্রয়োজন ?

[The latent heat of steam is 536 cal/g and that of ice is 80 cal/g. What mass of steam at 100°C would be required to melt a kilogram of ice ?

সমাধান : মনে করি, প্রয়োজনীয় বাষ্পের ভর$=M$ g ; M গ্রাম বাষ্প 0°C উষ্ণতার জলে পরিণত হইতে যে-পরিমাণ তাপ বর্জন করে তাহার মান

$$H_1=M\times536+M\times1\times(100-0)=636\ M \text{ cal} \quad \cdots \quad (i)$$

এক কিলোগ্রাম বরফ গলাইতে প্রয়োজনীয় তাপ, $H_2=1000\times80$ cal (ii)

শর্তানুসারে, $H_1 = H_2$ বা, $636\ M = 1000 \times 80$

বা, $M = \frac{1000 \times 80}{636} = 125·78$ g

উদাহরণ 6.11 $-10°C$ উষ্ণতাবিশিষ্ট 100 g বরফের মধ্য দিয়া 100°C উষ্ণতার বাষ্প পাঠান হইল। মিশ্রণের ওজন যখন 120 g তখন উহার উষ্ণতা হইল 35°C। বরফের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর। বরফের গলনের লীন তাপ এবং জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ যথাক্রমে 80 cal/g এবং 535 cal/g।

[Steam at 100°C is passed into 100 g of ice at $-10°C$. The mixture weighs 120 g when its temperature is 35°C. Calculate the specific heat of ice. The latent heat of fusion of ice and the latent heat of vaporisation of water are 80 cal/g and 535 cal/g respectively.]

সমাধান : মনে করি, বরফের আপেক্ষিক তাপ $= s$

$-10°C$ উষ্ণতা হইতে 0°C উষ্ণতায় আসিতে 100 g বরফের যে-পরিমাণ তাপ প্রয়োজন তাহার মান, $H_1 = 100 \times s \times 10 = 1000\ s$ cal ... (i)

0°C উষ্ণতার 100 g বরফ গলিয়া 0°C উষ্ণতার 100 g জলে পরিণত হইতে যে-পরিমাণ তাপ গ্রহণ করে তাহার মান, $H_2 = 100 \times 80 = 8000$ cal (ii)

0°C উষ্ণতার 100 g জলকে উত্তপ্ত করিয়া 35°C-এ লইয়া যাইতে প্রয়োজনীয় তাপ, $H_3 = 100 \times 1 \times (35-0) = 3,500$ cal ... (iii)

ব্যবহৃত বাষ্পের ভর $= (120-100) = 20$ g

বাষ্প-কর্তৃক বর্জিত তাপ $= 20 \times 535 + 20 \times (100-35)$

$= 20 \times 600 = 12,000$ cal

ক্যালরিমিতির মূলনীতি-অনুসারে, গৃহীত তাপ = বর্জিত তাপ

$\therefore\ H_1 + H_2 + H_3 = 12,000$

বা, $1000\ s + 8000 + 3500 = 12000$ বা, $1000\ s = 500$

$\therefore\ s = 0·5$

উদাহরণ 6.12 10°C উষ্ণতাবিশিষ্ট এবং 107·2 g ভরবিশিষ্ট একটি তামার বলকে 100°C উষ্ণতার শুষ্ক বাষ্পের মধ্যে রাখা হইল। বলটির উষ্ণতা বাড়িয়া 100°C হইবার পূর্ব পর্যন্ত উহার উপর কতটা বাষ্প ঘনীভূত হইবে? (তামার আপেক্ষিক তাপ = 0·09 এবং জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ = 536 cal/g)

[A copper ball 107·2 g in weight and at 10°C is exposed to dry steam at 100°C. What weight of steam will condense on the ball before the temperature of the ball is raised to 100°C? The specific heat of copper = 0·09 and the latent heat of vaporisation of water = 536 cal/g.]

সমাধান : 10°C উষ্ণতা হইতে 100°C উষ্ণতায় আসিতে তামার বল-কর্তৃক গৃহীত তাপ $= 107·2 \times 0·09 \times (100-10) = 107·2 \times 0·09 \times 90$ cal

মনে করি, বলের উপর ঘনীভূত বাষ্পের ভর $= m$

কাজেই, বাষ্প-কর্তৃক বর্জিত তাপ $= m \times 536$ cal

ক্যালরিমিতির মূলনীতি-অনুসারে, গৃহীত তাপ=বর্জিত তাপ

$\therefore \quad m \times 536 = 107{\cdot}2 \times 0{\cdot}90 \times 90$

বা, $m = \dfrac{107{\cdot}2 \times 0{\cdot}09 \times 90}{536} = 1{\cdot}62$ g

উদাহরণ 6.13 110°C প্রারম্ভিক উষ্ণতার কিছু পরিমাণ স্টীম এবং −15°C প্রারম্ভিক উষ্ণতার এক টুকরা বরফ পরস্পর মিশ্রিত হইয়া 40°C উষ্ণতার জলে পরিণত হইয়া তাপীয় সাম্যে আসে। নিম্নের উপাত্তগুলির সাহায্যে ব্যবহৃত বরফ এবং স্টীমের ভরের অনুপাত নির্ণয় কর :

বাষ্পের লীন তাপ=540 cal/g, বরফের লীন তাপ=80 cal/g,

বরফের আপেক্ষিক তাপ=0·53 cal $g^{-1}°C^{-1}$

এবং স্টীমের আপেক্ষিক তাপ=0·48 cal $g^{-1}°C^{-1}$

[An amount of steam initially at 110°C and a piece of ice at −15°C come to the thermal equilibrium as water at 40°C at normal atmospheric pressure. Using the following data, find the ratio of the mass of ice to the mass of steam used :

Latent heat of steam=540 cal/g, Latent heat of ice=80 cal/g

Specific heat of ice=0·53 cal $g^{-1}°C^{-1}$

and specific heat of steam=0·48 cal $g^{-1}°C^{-1}$]

সমাধান : মনে করি, ব্যবহৃত বরফের ভর=m g এবং ব্যবহৃত বাষ্পের ভর =M g

এখন, 110°C উষ্ণতার বাষ্প 100°C উষ্ণতার বাষ্পে পরিণত হইতে যে-পরিমাণ তাপ বর্জন করে তাহার মান=M×0·48×(110−100)=4·8 M cal .. (i)

100°C উষ্ণতার M g বাষ্প 100°C উষ্ণতার জলে পরিণত হইতে যে-পরিমাণ তাপ বর্জন করে তাহার মান=M×540 cal ... (ii)

100°C উষ্ণতাবিশিষ্ট M g জল 40°C উষ্ণতার জলে পরিণত হইতে যে-পরিমাণ তাপ বর্জন করে তাহার মান=M×1×(100−40)=60 M cal (iii)

কাজেই, বাষ্প-কর্তৃক গৃহীত মোট তাপ=604·8 M cal ... (iv)

[(i), (ii) এবং (iii) হইতে]

m গ্রাম বরফ −15°C হইতে 0°C উষ্ণতায় আসিতে যে-পরিমাণ তাপ শোষণ করে তাহার মান=m×0·53×[0−(−15)]

=m×0·53×15 cal=7·95 m cal ... (v)

0°C উষ্ণতার m গ্রাম বরফ গলিয়া গিয়া 0°C উষ্ণতার m গ্রাম জলে পরিণত হইতে যে-পরিমাণ তাপ শোষণ করে তাহার মান=m×80 cal ... (vi)

0°C উষ্ণতায় m g জল 40°C উষ্ণতায় আসিতে যে-পরিমাণ তাপ শোষণ করে তাহার মান=m×1×(40−0)=40 m cal ... (vii)

কাজেই, বরফ-কর্তৃক গৃহীত মোট তাপ=127·95 m cal ... (viii)

[(v), (vi) এবং (vii) হইতে]

আমরা জানি, গৃহীত তাপ=বর্জিত তাপ

$$\therefore \quad 604{\cdot}8\ M = 127{\cdot}95\ m \quad \text{বা,} \quad \frac{m}{M} = \frac{604{\cdot}8}{127{\cdot}95} = 4{\cdot}73$$

উদাহরণ 6.14 বরফের আপেক্ষিক গুরুত্ব 0·92। 100°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 10 g ভরের একটি ধাতুখণ্ডকে বরফ ও জলের মিশ্রণে ডুবান হইল। দেখা গেল যে, ইহাতে মিশ্রণের আয়তন 0·1 cm³ কমিল, এই সময় মিশ্রণের উষ্ণতার কোন পরিবর্তন হইল না। 0°C উষ্ণতায় জলের আপেক্ষিক গুরুত্ব 1 ধরিয়া ধাতুটির আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর।

[The specific gravity of ice is 0·92. 10 g of a metal at a temperature of 100°C is immersed in a mixture of ice and water and the volume of mixture is found to be reduced by 0·1 cm³ without any change of temperature. Calculate the specific heat of the metal, assuming that the specific gravity of water at 0°C is unity.]

সমাধান ঃ 1 g বরফের আয়তন $=\frac{1}{0{\cdot}92}\ \text{cm}^3$

কাজেই, 1 g বরফ গলিলে আয়তনের হ্রাস

$$=\left(\frac{1}{0{\cdot}92}-1\right)\text{cm}^3=\frac{8}{92}\ \text{cm}^3$$

শর্তানুসারে, মিশ্রণের আয়তন 0·1 cm³ কমিয়াছে। কাজেই, যে-পরিমাণ বরফ গলিয়াছে তাহার মান $=\frac{0{\cdot}1}{\left(\frac{8}{92}\right)}=\frac{9{\cdot}2}{8}$ g

$$\therefore \quad \text{বরফ-কর্তৃক গৃহীত তাপ}=\frac{9{\cdot}2}{8}\times 80\ \text{cal}=92\ \text{cal} \qquad \cdots \qquad (i)$$

মনে করি, ধাতুখণ্ডটির আপেক্ষিক তাপ $=s$ cal g⁻°C⁻¹

কাজেই ধাতুখণ্ড-কর্তৃক বর্জিত তাপ $=10\times s\times(100-0)$ cal

$$=10^3\ s\ \text{cal} \qquad \cdots \qquad (ii)$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$10^3\ s=92 \quad \text{বা,} \quad s=92\times10^{-3}=0{\cdot}092\ \text{cal g}^{-1}{}^\circ\text{C}^{-1}$$

উদাহরণ 6.15 45 g ভরবিশিষ্ট তামার ক্যালরিমিটারে রক্ষিত 10°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 56 g জলের মধ্য দিয়া 100°C উষ্ণতার 2 g জলীয় বাষ্প পাঠান হইল। ইহাতে মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা হইল 30°C। জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ নির্ণয় কর। (দেওয়া আছে যে, তামার আপেক্ষিক তাপ=0·1)।

[2 g of steam at 100°C is passed through 56 g of water at 10°C kept in a copper calorimeter of mass 45 g. The final temperature of the mixture is 30°C. Find the latent heat of vaporisation of water. (Given that the specific heat of copper=0·1).]

সমাধান ঃ 10°C হইতে 30°C উষ্ণতায় উঠিতে জল এবং ক্যালরিমিটার যে-তাপ গ্রহণ করে উহার মান

$=(56+45\times0{\cdot}1)\times(30-10)\text{ cal}=60{\cdot}5\times20\text{ cal}$ ... (i)

মনে করি, জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ $=L$ cal/g

কাজেই, 2 g বাষ্প 30°C উষ্ণতাবিশিষ্ট জলে পরিণত হইতে যে-পরিমাণ তাপ বর্জন করে উহার মান $=2\times L+2\times(100-30)=2L+140$ cal ... (ii)

কাজেই, (i) এবং (ii) হইতেই লেখা যায়, $2L+140 = 60{\cdot}5\times20$

(বর্জিত তাপ) (গৃহীত তাপ)

বা, $2L=60{\cdot}5\times20-140$ বা, $L=605-70=535$

অর্থাৎ, জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ $=535$ cal/g

উদাহরণ 6.16 কোন শিল্প পদ্ধতিতে প্রতি ঘন্টায় 10 kg জলকে 20°C হইতে 80°C উষ্ণতায় আনিতে হইবে। এই উদ্দেশ্যে জলে নিমজ্জিত তামার কুণ্ডলীর মধ্য দিয়া 150°C উষ্ণতার বাষ্প পাঠান হয়। কুণ্ডলীতে বাষ্প ঘনীভূত হইয়া 90°C উষ্ণতায় বয়লারে ফিরিয়া আসে। এক্ষেত্রে প্রতি ঘন্টায় কত কিলোগ্রাম বাষ্প প্রয়োজন হইবে ? বাষ্পের আপেক্ষিক তাপ $=1\text{ cal g}^{-1}{}^{\circ}\text{C}^{-1}$ এবং বাষ্পের লীন তাপ $=540$ cal/g

[In an industrial process 10 kg of water per hour is to be heated from 20°C to 80°C. To do this. steam at 150°C is passed from a boiler into a copper coil immersed in water. The steam condenses in the coil and is returned to the boiler as water at 90°C. How many kg of steam are required per hour ? Specific heat of steam $=1\text{ cal g}^{-1}{}^{\circ}\text{C}^{-1}$ and latent heat of steam $=540$ cal/g]

সমাধান ঃ প্রতি ঘন্টায় জল-কর্তৃক গৃহীত তাপ,

$Q=10\times10^3\times(80-20)=6\times10^5$ cal ... (i)

মনে করি, প্রতি ঘন্টায় তামার কুণ্ডলীর মধ্য দিয়া M kg বাষ্প পাঠান হইতেছে। কাজেই, বাষ্প-কর্তৃক প্রতি ঘন্টায় বর্জিত তাপ, Q

$=M\times10^3\times1\times(150-100)+M\times10^3\times540+M\times10^3\times(100-90)$

$=M\times10^3\times600$ cal ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$M\times10^3\times600=6\times10^5 \quad \therefore \quad M=1$ kg

উদাহরণ 6.17 100 g তামার পেরেককে উত্তপ্ত করিয়া 100°C উষ্ণতায় তোলা হইল এবং ইহার পর উহাকে 100 g ভরবিশিষ্ট একটি তামার ক্যালরিমিটারে ফেলা হইল। ক্যালরিমিটারটিতে 40 g ভরবিশিষ্ট জল ও বরফের মিশ্রণ আছে। যদি চূড়ান্ত উষ্ণতা 10°C হয় তাহা হইলে মিশ্রণে বরফের ভর নির্ণয় কর। তামার আপেক্ষিক তাপ $=0{\cdot}09$ এবং বরফের লীন তাপ $=80$ cal/g।

[100 g of copper nails heated to 100°C are dropped into a copper calorimeter of mass 100 g. The calorimeter contains 40 g of a mixture of ice and water. If the final temperature is 10°C, calculate the mass of ice in the mixture. Specific heat of copper $=0{\cdot}09$ and latent heat of fusion of ice $=80$ cal/g.]

সমাধান ঃ মনে করি, ক্যালরিমিটারের বরফ ও জলের মিশ্রণে বরফের ভর ছিল m গ্রাম। কাজেই, মিশ্রণে জলের ভর ছিল $(40-m)$ গ্রাম। স্পষ্টতই, এই মিশ্রণের প্রাথমিক উষ্ণতা $=0°C$।

উত্তপ্ত তামার পেরেকসমূহের দ্বারা বর্জিত তাপ

$$=100\times0{\cdot}09\times(100-10) \text{ cal} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

সমস্ত বরফ গলাইতে প্রয়োজনীয় তাপ $=m\times80$ cal

তামার ক্যালরিমিটার ও জলের উষ্ণতা 0°C হইতে 10°C-এ আনিতে প্রয়োজনীয় তাপ $=(100\times0{\cdot}09+40)\times10$ cal $=490$ cal

কাজেই, জল ও বরফের মিশ্রণ ও ক্যালরিমিটার-কর্তৃক গৃহীত তাপ

$$=(80\,m+490) \text{ cal} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়,

$$100\times0{\cdot}09\times90=80\,m+490$$

(বর্জিত তাপ)   (গৃহীত তাপ)

বা, $80\,m=320$ বা, $m=4$

অর্থাৎ, ক্যালরিমিটারের মিশ্রণে বরফের পরিমাণ ছিল 4 g।

উদাহরণ 6.18 কিছু পরিমাণ বরফকে একটি নির্দিষ্ট হারে 7 মিনিট ধরিয়া তাপ সরবরাহ করা হইল। প্রথম 1 মিনিট উষ্ণতা সমহারে বৃদ্ধি পাইল। ইহার পর 4 মিনিট যাবৎ উষ্ণতা স্থির রহিল এবং শেষ 2 মিনিট পুনরায় সমহারে উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইল। উক্ত পর্যবেক্ষণগুলি ব্যাখ্যা কর এবং চূড়ান্ত উষ্ণতা নির্ণয় কর।

[A certain amount of ice is supplied with heat at constant rate for 7 minutes. For the first 1 minute, the temperature rises uniformly with time, then it remains constant for the next 4 minutes and again rises at a uniform rate for the last 2 minutes. Explain physically these observations and calculate the final temperature.]

সমাধান ঃ তাপ প্রয়োগের ফলে প্রথমে বরফের উষ্ণতা বাড়িতেছে বলিয়া বুঝা যাইতেছে যে, উহার প্রাথমিক উষ্ণতা 0°C অপেক্ষা কম। প্রথম 1 মিনিট সমহারে উষ্ণতা-বৃদ্ধি পাইবার পর 4 মিনিট সময় ধরিয়া উষ্ণতা অপরিবর্তিত রহিল। স্পষ্টতই, এই সময় বরফের অবস্থার পরিবর্তন ঘটিয়াছে, অর্থাৎ 0°C উষ্ণতার বরফ গলিয়া 0°C উষ্ণতার জলে পরিণত হইয়াছে।

উক্ত 4 মিনিট সময়ে সমস্ত বরফ গলিয়া গিয়াছে। ইহার পর জলের উষ্ণতা পুনরায় বৃদ্ধি পাইয়াছে। তাপ-প্রয়োগের সহিত উষ্ণতা কীরূপভাবে পরিবর্তিত হইল তাহা 6.1 নং চিত্রে দেখান হইয়াছে।

চিত্র 6,1

প্রতি সেকেণ্ডে সরবরাহিত তাপের হার H cal হইলে বরফের গলনের সময় 4 মিনিটে সরবরাহিত মোট তাপ

$$Q_1 = H \times 60 \times 4 \text{ cal} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

বরফের ভর m গ্রাম হইলে উহার গলনের জন্য প্রয়োজনীয় তাপ

$$= mL \text{ cal} = m \times 80 \text{ cal} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

শর্তানুসারে, $Q_1 = m \times L$

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $H \times 60 \times 4 = m \times 80$

কাজেই, $\dfrac{H}{m} = \dfrac{80}{60 \times 40} = \dfrac{1}{3} \text{ cal g}^{-1}\text{s}^{-1} \quad \cdots \quad \text{(iii)}$

পরবর্তী 2 মিনিটে সরবরাহিত মোট তাপ $Q_2 = H \times 2 \times 60$ cal

এইবার, মনে করি যে, বরফ-গলা জলের চূড়ান্ত উষ্ণতা $= \theta$°C

কাজেই, লেখা যায়, $Q_2 = m \times 1 \times \theta$ বা, $H \times 2 \times 60 = m \times 1 \times \theta$

বা, $\theta = \dfrac{H}{m} \times 2 \times 60 = \dfrac{1}{3} \times 2 \times 60 = 40$°C

বিশেষ দ্রষ্টব্য : [লক্ষণীয় যে, বরফের আপেক্ষিক তাপ জানা থাকিলে প্রদত্ত উপাত্ত (data) হইতে আমরা বরফের প্রাথমিক উষ্ণতাও নির্ণয় করিতে পারি।

মনে করি, বরফের আপেক্ষিক তাপ $= 0{\cdot}5$

এবং বরফের প্রাথমিক উষ্ণতা $= \theta_0$°C $(\theta_0 < 0)$

কাজেই, প্রথম মিনিটে সরবরাহিত তাপ, $Q = H \times 60$ cal

এই তাপের ফলে বরফের উষ্ণতা θ_0 °C হইতে বৃদ্ধি পাইয়া 0°C-এ আসিয়াছে।

কাজেই, $Q = m \times 0{\cdot}5 \times (0 - \theta_0) = H \times 60$

$\therefore \ \theta_0 = -\dfrac{H}{m} \times \dfrac{60}{0{\cdot}5} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{60}{0{\cdot}5} = -40$°C]

উদাহরণ 6.19 40°C উষ্ণতাবিশিষ্ট একটি তামার ব্লককে (তামার আপেক্ষিক তাপ=0·092) 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট একটি বৃহদাকার বরফের ব্লকের উপর স্থাপন করা হইল। তামা হইতে সমস্ত তাপ বরফে চলিয়া যায় ধরিয়া লইলে সাম্যাবস্থায় তামার ব্লকের উচ্চতার কত ভগ্নাংশ বরফে নিমজ্জিত হইবে? তামার ও বরফের ঘনত্ব যথাক্রমে 8·6 g/cm³ এবং 0·92 g/cm³ এবং বরফের লীন তাপ 80 cal/g।

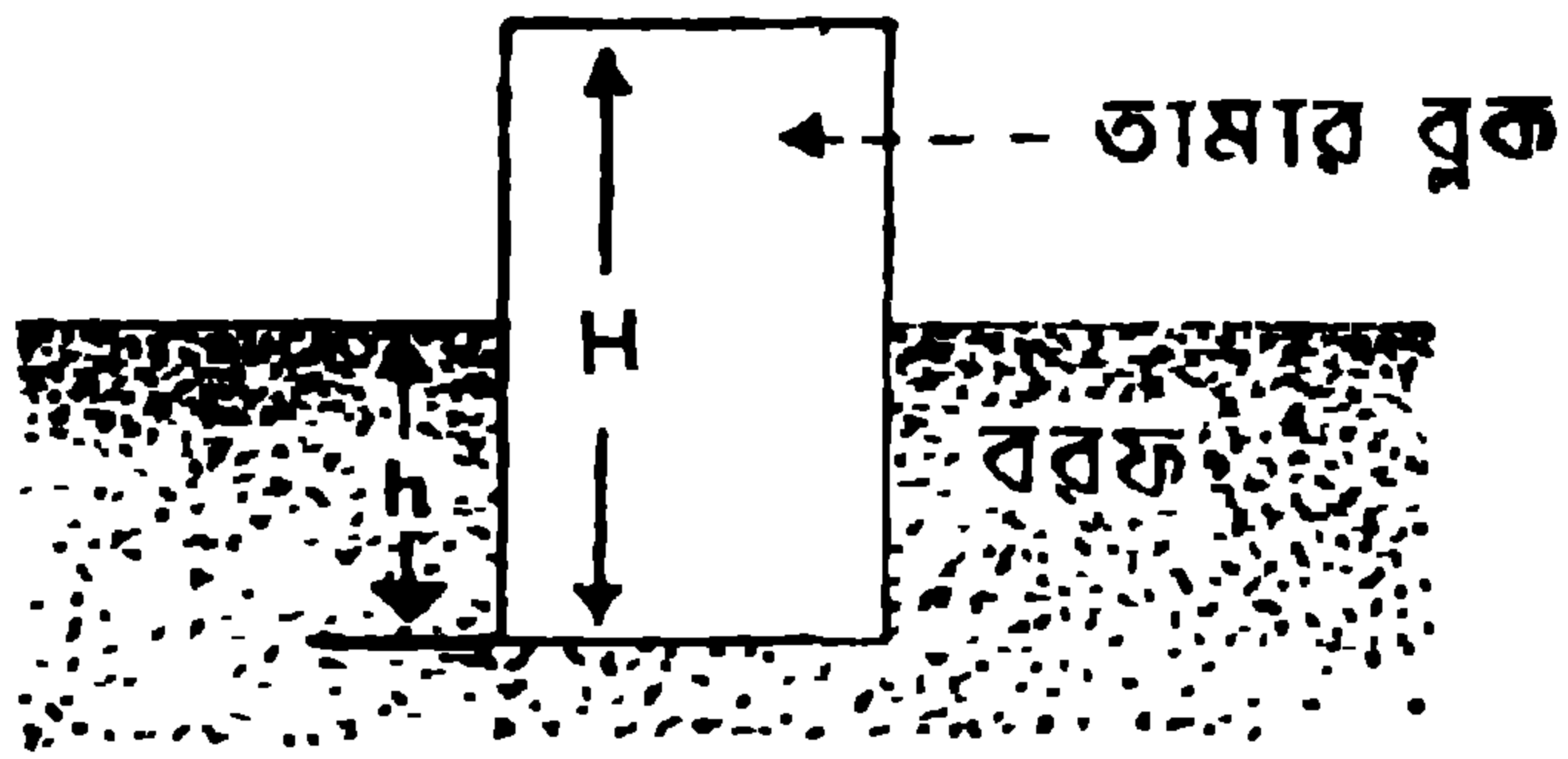
[A block of copper (specific heat=0·092) at a temperature of 40°C is placed on a large block of ice at 0 C. Assuming that all the heat of copper passes into ice, find the fraction of total column of copper that will be embedded in the ice, when equilibrium is

attained. The density of copper and ice are respectively $8 \cdot 6 \text{ g/cm}^3$ and $0 \cdot 92 \text{ g/cm}^3$ and the latent heat of fusion of ice is 80 cal/g.]

সমাধান ঃ মনে করি, তামার ব্লকটির উষ্ণতা $= H$ cm

এবং ইহার ভূমির ক্ষেত্রফল $= \alpha \text{ cm}^2$

সুতরাং ইহার ভর, $M = \alpha \times H \times 8 \cdot 6$ g

সাম্যাবস্থায় তামার ব্লকটির উষ্ণতা 0°C হইবে। কাজেই, সাম্যাবস্থায় আসিতে ব্লক-কর্তৃক বর্জিত তাপের পরিমাণ

চিত্র 6.2

$= M \times s \times (\theta_1 - \theta_2)$
$= (\alpha \times H \times 8 \cdot 6) \times 0 \cdot 092 \times (40 - 0)$
$= \alpha H \times 8 \cdot 6 \times 0 \cdot 092 \times 40$ cal (i)

ধরি, সাম্যাবস্থায় তামার ব্লকটির h cm বরফে নিমজ্জিত রহিয়াছে (চিত্র 6.2)।

সুতরাং, যে-পরিমাণ বরফ গলিয়া জলে পরিণত হইয়াছে তাহার ভর,

$m = \alpha \times h \times 0 \cdot 92$ g

এই বরফ-কর্তৃক শোষিত তাপ, $m\,L = h\,\alpha \times 0 \cdot 92 \times 80$ cal ... (ii)

তামা-কর্তৃক বর্জিত তাপ এবং বরফ-কর্তৃক গৃহীত তাপ পরস্পর সমান বলিয়া সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়,

$$h\alpha \times 0 \cdot 92 \times 80 = H\alpha \times 8 \cdot 6 \times 0 \cdot 092 \times 40$$

বা, $$\frac{h}{H} = \frac{8 \cdot 6 \times 0 \cdot 092 \times 40}{0 \cdot 92 \times 80} = 0 \cdot 43$$

কাজেই, সাম্যাবস্থায় তামার ব্লকের উচ্চতার 0·43 ভগ্নাংশ বরফের মধ্যে নিমজ্জিত থাকে।

প্রশ্নমালা 6

1. 100°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 8 lb তামার সহিত 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 2 lb বরফ মিশাইলে ফল কী হইবে? তামার আপেক্ষিক তাপ 0·1 এবং বরফের গলনের লীন তাপ 80 cal/g।

[What is the result of mixing 8 lb of copper at 100°C with 2 lb of ice at 0°C? The specific heat of copper is 0·1 and the latent heat of fusion of ice is 80 cal/g.] (H. S. 1960)

[1 lb বরফ গলিবে, মিশ্রণের উষ্ণতা 0°C]

2. একই ওজনের গরম জল এবং গলন্ত বরফ মিশ্রিত করা হইল। ইহাতে 0°C উষ্ণতার জল পাওয়া গেল। গরম জলের উষ্ণতা কত? (বরফের গলনের লীন তাপ $= 80$ cal/g)

[Equal weights of hot water and melting ice are mixed together.

The result is water at 0°C. What is the temperature of hot water? (The latent heat of fusion of ice = 80 cal/g)] [80°C]

3. 20°C উচ্চতাবিশিষ্ট 1 লিটার জলের উষ্ণতাকে 5°C-এ নামাইয়া আনিতে হইলে উহাতে 0°C উষ্ণতার কত গ্রাম বরফ গলাইতে হইবে? বরফের গলনের লীন তাপ 80 cal/g।

[How many grams of ice at 0°C must be dissolved in 1 litre of water at 20 C in order to reduce its temperature to 5°C? The latent heat of fusion of ice is 80 cal/g.] [176·4 g]

4. একটি কেটলীতে 212°F উষ্ণতায় স্ফুটনরত জল হইতে নিঃসৃত শুষ্ক বাষ্পকে সরাসরি 50°F উষ্ণতার 10 lb জলের মধ্য দিয়া পাঠান হইল এবং ইহার উষ্ণতা 104°F-এ উঠিল। যদি বাষ্পের লীন তাপ 972 Btu/lb হয় তাহা হইলে ইহাতে কতটা বাষ্প ঘনীভূত হইবে নির্ণয় কর।

[Dry steam, coming out of a kettle in which water is boiling at 212°F, is passed directly into 10 lb of water at 50°F and raises its temperature to 104°F. Find how much steam has been condensed, if the latent heat of steam is 972 Btu/lb] [0·5 lb]

5. 60 g ভরবিশিষ্ট একটি তামার ক্যালরিমিটারে রক্ষিত 70 g তার্পিনের উষ্ণতা 15°C। প্রতি মিনিটে 400 cal তাপ সরবরাহ করা হইতেছে। বিকিরণের ফলে কোন তাপক্ষয় হইতেছে না ধরিয়া (i) তার্পিনের স্ফুটনাঙ্কে (159°C-এ) পৌঁছিতে কত সময় লাগিবে? (ii) তার্পিনের অর্ধাংশ ফুটাইয়া বাষ্পীভূত করিতে আরও কতটা সময় লাগিবে? (তার্পিনের আপেক্ষিক তাপ = 0·41, তামার আপেক্ষিক তাপ = 0·093, তার্পিনের বাষ্পীভবনের লীন তাপ = 74 cal/g)

[70 g of turpine contained in a copper calorimeter of mass 60 g are at a temperature of 15°C. 400 cal of heat per minute are supplied. Assuming that there is no heat loss due to radiation, find (i) how much time required to reach the boiling point of the turpine (159°C) and (ii) how much further time required to boil away half the turpine. (The specific heat of turpine = 0·41, the specific heat of copper = 0·093 and the latent heat of vaporisation of turpine = 74 cal/g)] [(i) 12·34 minutes, (ii) 6·48 minutes]

6. 0·70 kg ভরবিশিষ্ট একটি অ্যালুমিনিয়াম খণ্ডকে ঠাণ্ডা করিয়া −120°C উষ্ণতায় আনা হইল এবং ইহার পর ঐ অ্যালুমিনিয়াম খণ্ডকে 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট প্রচুর পরিমাণ জলের মধ্যে রাখা হইল। অ্যালুমিনিয়ামের উপর কত ভরের বরফ জমা হইবে? অ্যালুমিনিয়ামের আপেক্ষিক তাপ = 0·2।

[A lump of aluminium of mass 0·70 kg is cooled to a temperature of −120°C and then placed in a large quantity of water at 0°C. What mass of ice will form on the aluminium? The specific heat of aluminium = 0·2] [0·21 kg]

7. একটি শীতাতপ-নিয়ন্ত্রক যন্ত্র 40 মিনিটে 25°C উষ্ণতার 0·60 kg জলকে

0°C উষ্ণতার বরফে পরিণত করে। শীতাতপ-নিয়ন্ত্রক যন্ত্রটি জল হইতে কী হারে তাপ-শক্তি অপসারণ করিতেছে ?

[A refrigerator takes 40 minutes to turn 0·60 kg of water at 25°C into ice at 0°C. Calculate the rate at which the refrigerator is removing heat energy from the water.] [26·25 cal/s]

8. 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট একটি বড় আকারের বরফখণ্ডে একটি ছিদ্র করা হইল। 1·6 kg ভরবিশিষ্ট একখণ্ড তামাকে ঐ ছিদ্রে ফেলিয়া অপর একটি বরফের ফলককে উহার উপর রাখা হইল। শেষ পর্যন্ত দেখা গেল যে, 0·38 kg বরফ গলিয়াছে। তামার প্রাথমিক উষ্ণতা নির্ণয় কর। (তামার আপেক্ষিক তাপ $=0·1$ cal g^{-1}°C^{-1})

[A hole is made in a large lump of ice at 0°C. A 1·6 kg mass of copper is dropped into the hole. Another slab is placed on top and eventually 0·38 kg of ice is found to have melted. Find the initial temperature of the copper. (The specific heat of copper $=0·1$ cal g^{-1}°C^{-1})] [190°C]

9. একটি ধাতুর গলনাঙ্ক 500°C। এই ধাতুর 0·2 kg ভরকে 500°C উষ্ণতায় গলাইয়া উহাকে 2 kg ভরবিশিষ্ট এবং 20°C উষ্ণতাবিশিষ্ট জলে ফেলা হইল। যদি জলের চূড়ান্ত উষ্ণতা 40°C হয় এবং ধাতুটির আপেক্ষিক তাপ 0·11 হয় তাহা হইলে উহার গলনের লীন তাপ কত হইবে নির্ণয় কর।

[The melting point of a metal is 500°C. A 0·2 kg mass of the metal is melted heating it at 500°C. It is then poured into 2 kg of water at 20°C. If the final temperature of water is 40°C and the specific heat of the metal is 0·11, find the latent heat of fusion of the metal.] [149·4 cal/g]

10. 120 g জলসমবিশিষ্ট একটি পাত্রে 20°C উষ্ণতায় 800 g জল আছে। ঐ জলে যদি 0°C উষ্ণতার 300 g বরফ ফেলা হয় তাহা হইলে কতটা বরফ গলিতে বাকি থাকিবে ? মিশ্রণের উষ্ণতাকে 20°C উষ্ণতায় তুলিতে ইহার পর 100°C উষ্ণতার কতটা বাষ্পকে ঐ মিশ্রণের মধ্য দিয়া পাঠাইতে হইবে ? (বরফের লীন তাপ$=$80 cal/g এবং বাষ্পের লীন তাপ$=$540 cal/g)

[A vessel having water equivalent of 120 g contains 800 g of water at a temperature of 20°C. How much ice will remain unmelted if 300 g of ice at 0°C is added to the water ? How much steam at 100°C will have to be blown into the mixture in order to raise its temperature to 20°C ? (The latent heat of fusion of ice$=$80 cal/g and the latent heat of steam$=$540 cal/g]

[70 g, 48·39 g]

11. একটি বৈদ্যুতিক কেটলী 15 মিনিটে কিছু পরিমাণ জলকে 0°C হইতে স্ফুটনাঙ্কে তোলে। ইহার পর, আরও 80 মিনিটে সমস্ত জলকে 100°C উষ্ণতা-বিশিষ্ট বাষ্পে পরিণত করে। জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ নির্ণয় কর।

[It takes 15 minutes for an electric kettle to bring a certain

amount of water from 0°C to its boiling point. It requires another 80 minutes to turn all the water into steam at 100°C. Calculate the latent heat of vaporisation of water.] [533·33 cal/g]

12. সমান ভরের ফুটন্ত জল এবং গলন্ত বরফ মিশ্রিত করা হইল। সমস্ত বরফ গলিয়া যাইবার পর মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা হইল 10°C। বরফের গলনের লীন তাপ নির্ণয় কর।

[Equal masses of boiling water and melting ice are mixed together. The resulting temperature of the mixture after all the ice is melted is 10°C. Calculate the latent heat of fusion of ice.]

[80 cal/g]

13. 0°C উষ্ণতার 100 g বরফ এবং 200 g জলের মিশ্রণে 100°C উষ্ণতার 50 g বাষ্প পাঠান হইল। ইহাতে মিশ্রণের উষ্ণতা-বৃদ্ধি কত হইবে? 100°C উষ্ণতায় জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ 537 cal/g এবং বরফের গলনের লীন তাপ 80 cal/g।

[50 g of steam at 100°C is passed into a mixture of 100 g of ice and 200 g of water at 0°C. What is the rise of temperature of the mixture? The latent heat of vaporisation of water at 100°C is 537 cal/g and the latent heat of fusion of ice is 80 cal/g.]

[76·14°C]

14. 60°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 16 g ন্যাপথালিনকে 10 g জলসমবিশিষ্ট একটি ক্যালরিমিটারে রাখা হইল। ক্যালরিমিটারটিতে 1180 cal তাপ সরবরাহ করা হইল। ইহাতে চূড়ান্ত উষ্ণতা কত হইবে? কঠিন ও তরল অবস্থায় ন্যাপথালিনের আপেক্ষিক তাপ 0·5, ন্যাপথালিনের গলনের লীন তাপ 40 cal/g এবং ন্যাপথালিনের গলনাঙ্ক 80°C।

[16 g of napthalene at 60°C is kept in a calorimeter whose water equivalent is 10 g. 1180 cal of heat is supplied to the calorimeter. What will be the final temperature? The specific heat of napthalene in solid and in liquid states is 0·5 ; the latent heat of fusion of napthalene is 40 cal/g and the melting point of napthalene is 80°C.] [90°C]

15. যদি 0°C উষ্ণতার 1 g বরফ গলিয়া 0·091 cm³ সঙ্কুচিত হয় তাহা হইলে 0·1 আপেক্ষিক তাপবিশিষ্ট এবং 60°C উষ্ণতাবিশিষ্ট একটি ধাতুর কী পরিমাণ ভরকে একটি বরফ ক্যালরিমিটারে ফেলিলে বরফ ও মিশ্রণের আয়তন 0·273 cm³ হ্রাস পাইবে?

[If 1 g ice at 0°C contracts by 0·091 cm³ on melting, calculate the mass of a metal of specific heat 0·1 heated to 60°C, which when dropped into an ice calorimeter causes a contraction in volume of ice and mixture, of 0·273 cm³.] [40 g]

16. একটি পাত্রে রক্ষিত বরফ এবং জলের মিশ্রণের মধ্য দিয়া 100°C উষ্ণতা-বিশিষ্ট বাষ্প চালনা করা হইল। যখন 1·5 g বাষ্প ঘনীভূত হইল তখন দেখা গেল

যে, সমস্ত বরফ গলিয়া গিয়াছে এবং মিশ্রণের উষ্ণতা 4°C-এ উঠিয়াছে। ঐ মিশ্রণে কী পরিমাণ বরফ ছিল? জলসহ পাত্রের জলসম=50 g, বরফের গলনের লীন তাপ=80 cal/g এবং জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ=540 cal/g।

[Steam at 100°C is passed into a mixture of ice and water contained in a vessel. It is found that when 1·5 g of steam are condensed the whole of ice melts and the mixture rises to 4°C. How much ice was there in the mixture? Water equivalent of the vessel and water together=50 g, latent heat of fusion of ice =80 cal/g and latent heat of steam=540 cal/g.] [8·98 g]

17. একটি পাত্রের জলসম 20 g। ইহাতে 20°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 180 g ভরের একটি তরল আছে। এই পাত্রে 0°C উষ্ণতার এক খণ্ড বরফ ফেলা হইল। সমস্ত বরফ গলিয়া গেলে মিশ্রণের উষ্ণতা 10°C হয়। যদি তরলটির আপেক্ষিক তাপ 0·49 cal g^{-1}°C^{-1} হয় তাহা হইলে বরফের পরিমাণ নির্ণয় কর।

[The water equivalent of a pot is 20 g. It contains 180 g of a liquid at 20°C. A piece of ice at 0°C is dropped into it. When all the ice melts, the temperature of the mixture becomes 10°C. If the specific heat of the liquid is 0·49 cal g^{-1}°C^{-1}, find the amount of ice.] [12·02 g]

18. 100 g ভরবিশিষ্ট একটি তামার ক্যালরিমিটারে 150 g জল এবং 8 g বরফ বায়ুমণ্ডলীয় চাপে তাপীয় সাম্যে আছে। 200°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 100 g ভরের একখণ্ড সীসাকে এই ক্যালরিমিটারে ফেলা হইল। যদি কোন তাপক্ষয় না হয় তাহা হইলে মিশ্রণের চূড়ান্ত উষ্ণতা নির্ণয় কর। তামার আপেক্ষিক তাপ 0·09 cal g^{-1}°C^{-1} এবং সীসার আপেক্ষিক তাপ 0·03 cal g^{-1}°C^{-1}।

[A copper calorimeter of mass 100 g contains 150 g of water and 8 g of ice in thermal equilibrium at atmospheric pressure. A 100 g mass of lead at a temperature of 200°C is dropped into the calorimeter. Find the final temperature of the mixture if no heat is lost to the surroundings. Specific heat of copper is 0·09 cal g^{-1}°C^{-1} and that of lead is 0·03 cal g^{-1}°C^{-1}.]

[0°C ; মিশ্রণে 0·5 g বরফ থাকিবে]

19. একটি পাত্র হইতে দ্রুত বায়ু নিষ্কাশন করা হইতেছে। এই পাত্রে 0°C উষ্ণতায় কিছু পরিমাণ জল আছে। দ্রুত বাষ্পায়নের ফলে ধীরে ধীরে জল জমিয়া বরফে পরিণত হয়। জলের প্রারম্ভিক মানের কত অংশ এইভাবে বরফে রূপান্তরিত হইতে পারে? জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ 536 cal/g এবং বরফের গলনের লীন তাপ 80 cal/g।

[Air is being rapidly pumped out of a vessel. The vessel contains some amount of water at 0°C. As a result of rapid evaporation the water gradually freezes. What fraction of the initial quantity of water can be converted into ice in this manner?

The latent heat of vaporisation of water is 536 cal/g and the latent heat of fusion of ice is 80 cal/g.]

[**সমাধানের ইঙ্গিত :** জলের বাষ্পায়নের জন্য যে-তাপ (লীন তাপ) প্রয়োজন এক্ষেত্রে জলের একাংশ বরফে পরিণত হইয়া লীন তাপ ছাড়িয়া সেই তাপ যোগাইতেছে। মনে করি, প্রারম্ভিক অবস্থায় জলের ভর m g। যদি m' g জল বরফে পরিণত হয় তাহা হইলে $(m-m')$ g জল বাষ্পায়িত হইয়াছে।

$$\therefore \quad m' \times 80 = (m - m') \times 536$$

কাজেই, $\frac{m'}{m} \times 100 = 87\%$ (প্রায়)]

সপ্তম পরিচ্ছেদ

হাইগ্রোমিতি

7.1 পরম আর্দ্রতা ও আপেক্ষিক আর্দ্রতা : বায়ুর আর্দ্রতাকে দুই ভাগে প্রকাশ করিবার প্রথা প্রচলিত আছে। যথা—(i) পরম আর্দ্রতা (Absolute humidity) এবং (ii) আপেক্ষিক আর্দ্রতা (Relative humidity)।

পরম আর্দ্রতা : কোন নির্দিষ্ট আয়তন বায়ুতে যে-পরিমাণ জলীয় বাষ্প থাকে তাহাই উহার পরম আর্দ্রতার পরিমাপ। প্রতি ঘন মিটারে বায়ুতে যত গ্রাম জলীয় বাষ্প আছে তাহাই ঐ বায়ুর পরম আর্দ্রতা। ইহাকে g/m^3 এককে প্রকাশ করা হয়।

আপেক্ষিক আর্দ্রতা : একটি নির্দিষ্ট আয়তন বায়ুতে যে-পরিমাণ জলীয় বাষ্প আছে এবং একই উষ্ণতায় ঐ আয়তনের বায়ুকে সম্পৃক্ত করিতে যে-পরিমাণ জলীয় বাষ্পের প্রয়োজন তাহার অনুপাতকে ঐ বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা বলা হয়।

মনে করি, বায়ুর উষ্ণতা $= t°C$

সুতরাং, সংজ্ঞানুসারে আপেক্ষিক আর্দ্রতা,

$$= \frac{t°\text{C উষ্ণতায় কোন নির্দিষ্ট আয়তন বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভর}}{t°\text{C উষ্ণতায় ঐ আয়তন বায়ুকে সম্পৃক্ত করিতে প্রয়োজনীয় জলীয় বাষ্পের ভর}}$$

অসম্পৃক্ত বাষ্প বয়েলের সূত্র মানিয়া চলে বলিয়া জলীয় বাষ্পের ভর উহার চাপের সমানুপাতিক। সুতরাং,

$$\text{আপেক্ষিক আর্দ্রা} = \frac{t°\text{C উষ্ণতায় বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের চাপ } (p)}{t°\text{C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ } (P)}$$

$$= \frac{\text{শিশিরাঙ্কে জলীয় বাষ্পের সম্পৃক্ত চাপ}}{t°\text{C উষ্ণতায় জলীয় বাষ্পের সম্পৃক্ত চাপ}}$$

যদি শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপকে f দ্বারা এবং $t°C$ উষ্ণতায়

সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপকে F দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে সংজ্ঞানুসারে আপেক্ষিক আর্দ্রতার মান$=f/F$।

সুতরাং, শতকরা হিসাবে আপেক্ষিক আর্দ্রতা$=\frac{f}{F}\times 100\%$।

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 7.1 কোন একদিনের বায়ুব উষ্ণতা ও শিশিরাঙ্ক ছিল যথাক্রমে 16°C এবং 7·6°C। ঐ দিনের আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় কব। ধবিয়া লও যে, 7°C, 8°C এবং 16°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 7·5 mmHg, 8 mmHg এবং 13·5 mmHg।

[On a certain day, the temperature of air and dew-point were 16°C and 7·6°C respectively. Find the relative humidity of air. Assume that the saturated vapour pressure of water at 7°C, 8°C and 16°C are 7·5 mmHg, 8 mmHg and 13·5 mmHg respectively.]

সমাধান ঃ 7°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ$=7{\cdot}5$ mmHg

8°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ$=8$ mmHg

সুতরাং, 1°C উষ্ণতা-বৃদ্ধির ফলে বাষ্পচাপ-বৃদ্ধি$=(8-7{\cdot}5)=0{\cdot}5$ mmHg

$\therefore$ 0·6°C উষ্ণতা-বৃদ্ধিতে বাষ্পচাপের বৃদ্ধি$=0{\cdot}5\times 0{\cdot}6=0{\cdot}3$ mmHg

কাজেই, শিশিরাঙ্কে (7·6°C উষ্ণতায়) বাষ্পচাপ$=7{\cdot}5+0{\cdot}3=7{\cdot}8$ mmHg

$$\therefore \text{ আপেক্ষিক আর্দ্রতা}=\frac{\text{শিশিবাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয বাষ্পেব চাপ}}{\text{ঘরের উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলের বাষ্পের চাপ}}$$

$$=\frac{7{\cdot}8}{13{\cdot}5}\times 100\%=57{\cdot}7\%$$

উদাহরণ 7.2 একটি আবদ্ধ পাত্রে 100°C উষ্ণতাব বায়ু জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত অবস্থায় আছে। আয়তন অপরিবর্তিত রাখিয়া যখন উষ্ণতা 150°C-এ তোলা হইল তখন বায়ুর চাপ 2 অ্যাটমস্ফিয়াব। একই আয়তন অধিকার কবিয়া থাকিলে 0°C উষ্ণতায় কেবলমাত্র বায়ুর চাপ কত হইবে ?

[A closed vessel contains air saturated by water vapour at 100°C. When the temperature is raised to 150°C without change of volume the pressure in the vessel is 2 atmospheres. What would be the pressure of the air alone at 0°C, while occupying the same volume ?]

সমাধান ঃ 100°C উষ্ণতার সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ প্রমাণ বায়ুমণ্ডলীয় চাপ বা 1 অ্যাটমস্ফিয়ার চাপের সমান। উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইয়া 150°C হইলে আবদ্ধ বায়ু অসম্পৃক্ত হইয়া পড়িবে। অসম্পৃক্ত বাষ্পচাপ চার্লসের সূত্র মানিয়া চলে বলিয়া লেখা যায়, $P\propto T$

সুতরাং, 150°C উষ্ণতায় পাত্রের জলীয় বাষ্পের চাপ P_1 হইলে

$$P_1=\frac{273+150}{273+100}\times 1=\frac{423}{373}\text{ অ্যাটমস্ফিয়ার},$$

∴ 150°C উষ্ণতায় কেবলমাত্র বায়ুর চাপ ছিল

$=(2-\frac{423}{373})=\frac{323}{373}$ অ্যাটমস্ফিয়ার

মনে করি, 0°C উষ্ণতায় কেবলমাত্র বায়ুর চাপ $=P_0$ অ্যাটমস্ফিয়ার

চার্লসের সূত্রানুসারে, $P_0=\frac{273}{273+150}\times\frac{323}{373}$ অ্যাটমস্ফিয়ার

বা, $P_0=0\cdot559$ অ্যাটমস্ফিয়ার $=42\cdot48$ cmHg

উদাহরণ 7.3 15°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 1 লিটার আর্দ্র বায়ুতে বিদ্যমান শুষ্ক বায়ুর ভর নির্ণয় কর। দেওয়া আছে যে, শিশিরাঙ্ক 10°C এবং ব্যারোমিটারের পারদস্তম্ভের উচ্চতা 759·1 mm। 10°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ $=9\cdot1$ mmHg এবং শুষ্ক বায়ুর ঘনত্ব $=0\cdot001293$ g/cm³।

[Find the mass of dry air in one litre of moist air at 15°C, given that the dew-point is 10°C and the barometric height is 759·1 mm of mercury. Saturated vapour pressure at 10°C= 9·1 mmHg and the density of air = 0·001293 g/cm³.]

সমাধান ঃ 15°C উষ্ণতায় শুষ্ক বায়ুর চাপ = 15°C উষ্ণতায় আর্দ্র বায়ুর চাপ −(15°C উষ্ণতায় বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের চাপ)

= 15°C উষ্ণতায় আর্দ্র বায়ুর চাপ − শিশিরাঙ্কে জলীয় বাষ্পের সম্পৃক্ত চাপ

$=759\cdot1-9\cdot1=750$ mmHg

15°C উষ্ণতায় শুষ্ক বায়ুর আয়তন = 1 লিটার $=10^3\text{cm}^3$;

কাজেই প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় শুষ্ক বায়ুর আয়তন

$$=\frac{10^3\times750}{288}\times\frac{273}{760}\ \text{cm}^3$$

শুষ্ক বায়ুর ঘনত্ব $=0\cdot001293$ g/cm³

∴ শুষ্ক বায়ুর ভর = আয়তন × ঘনত্ব

$$=\frac{10^3\times750\times273}{288\times760}\times0\cdot001293=1\cdot21\ \text{g}$$

উদাহরণ 7.4 5°C এবং 20% আপেক্ষিক আর্দ্রতাবিশিষ্ট বাহিরের বায়ুকে তাপক এবং শীতাতপ-নিয়ন্ত্রক যন্ত্রে প্রবেশ করান হইল। এই যন্ত্রে বায়ুকে 20°C উষ্ণতায় তোলা হইল এবং আপেক্ষিক আর্দ্রতা বৃদ্ধি করিয়া 50% করা হইল। ইহা সম্পাদনের জন্য 5°C উষ্ণতায় প্রতি ঘন মিটার বায়ুতে কী পরিমাণ জল বাষ্পীভূত করিতে হইবে? 5°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত বাষ্পের ঘনত্ব 6·8 g/m³ এবং 20°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত বায়ুর ঘনত্ব 17·3 g/m³। ধরিয়া লও যে, চাপ প্রমাণ চাপের সমান।

[Outside air at 5°C and 20% relative humidity is introduced into a heating and air-conditioning plant when it is heated to a temperature of 20°C and its relative humidity is increased to 50%. How many grams of water must be evaporated into each cubic metre of air at 5°C to accomplish this? The saturated vapour

density at 5°C is 6·8 g/m^3 and that at 20°C is 17·3 g/m^3. Assume that the pressure is equal to standard pressure.]

সমাধান : 5°C উষ্ণতার বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা=

$$\frac{\text{5°C-এর বায়ুর কোন নির্দিষ্ট আয়তনে জলীয় বাষ্পের ভর}}{\text{5°C-এর সম-আয়তনের বায়ুকে সম্পৃক্ত করিতে প্রয়োজনীয় সম-বাষ্পের ভর}} \times 100$$

∴ 5°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 20% আপেক্ষিক আর্দ্রতার বায়ুর প্রতি ঘন মিটারে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভর $=\frac{20}{100}\times 6\cdot 8=1\cdot 36$ g/m^3 ... (i)

চাপকে প্রমাণ চাপে রাখিয়া 5°C উষ্ণতার প্রতি ঘন মিটার বায়ুকে 20°C-এ তুলিলে উহার আয়তন হইবে

$$\frac{20+273}{5+273} \quad \text{বা,} \quad \frac{293}{278}\ m^3$$

50% আপেক্ষিক আর্দ্রতাবিশিষ্ট এবং 20°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 1 m^3 বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভর $=\frac{50}{100}\times 17\cdot 3=8\cdot 65$ g

∴ 20°C উচ্চতাবিশিষ্ট এবং 50% আপেক্ষিক আর্দ্রতাবিশিষ্ট $\frac{293}{278}$ m^3 বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভর $=8\cdot 65\times\frac{293}{278}=9\cdot 12$ g ... (ii)

সুতরাং, [(i) এবং (ii) হইতে] 5°C উষ্ণতাবিশিষ্ট প্রতি ঘন মিটার বায়ুতে যে-পরিমাণ জল বাষ্পীভূত হইবে উহার ভর $=(9\cdot 12-1\cdot 36)=7\cdot 76$ g

উদাহরণ 7.5 জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত 100 cm^3 আয়তন অক্সিজেন গ্যাস 750 mmHg চাপে এবং 27°C উষ্ণতায় সংগ্রহ করা হইল। প্রমাণ উষ্ণতা ও চাপে শুষ্ক অক্সিজেনের আয়তন নির্ণয় কর। 27°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ=26·5 mmHg।

[A volume of 100 cm^3 of oxygen gas saturated with water vapour is collected at 750 mmHg and at 27°C. Find the volume of dry oxygen gas at standard temperature and pressure. The saturated vapour pressure of water at 27°C=26·5 mmHg.]

সমাধান : 27°C উষ্ণতায় শুষ্ক অক্সিজেনের চাপ=(750−26·5)
=723·5 mmHg

এখন, বায়ুর প্রাথমিক আয়তন, $V_1=100$ cm^3
বায়ুর প্রাথমিক চাপ, $P_1=723\cdot 5$ mmHg
বায়ুর প্রাথমিক উষ্ণতা=(27+273)=300 K
বায়ুর অন্তিম চাপ, $P_2=760$ mmHg
অন্তিম উষ্ণতা $=T_2=273$ K
মনে করি, নির্ণেয় আয়তন $=V_2$ cm^3

$$\therefore \quad \frac{V_2\times 760}{273}=\frac{100\times 723\cdot 5}{300}$$

$$\text{বা,} \quad V_2=\frac{100\times 723\cdot 5\times 273}{300\times 760}=86\cdot 6\ cm^3$$

উদাহরণ 7.6 যখন বায়ুর উষ্ণতা 30°C এবং আপেক্ষিক আর্দ্রতা 60% তখন বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের চাপ কত? 30°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত বাষ্প-চাপ 31·7 mmHg।

[What is the pressure due to water vapour in the air when the temperature is 30°C and the relative humidity is 60% ? The aqueous tension of water at 30°C = 31·7 mmHg.]

সমাধান ঃ বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের চাপ p হইলে এবং সম্পৃক্ত বাষ্প-চাপ P হইলে আপেক্ষিক আর্দ্রতার সংজ্ঞানুসারে লেখা যায় যে,

$$\text{আপেক্ষিক আর্দ্রতা} = \frac{p}{P}$$

এখানে, আপেক্ষিক আর্দ্রতা $= 0·60$, $P = 31·7$ mmHg

$$\therefore \quad 0·60 = \frac{p}{31·7} \quad \text{বা,} \quad p = 31·7 \times 0·60 = 19·02 \text{ mmHg}$$

উদাহরণ 7.7 যদি বায়ুর উষ্ণতা 25°C হইতে 5°C-এ নামিয়া যায় এবং যদি প্রাথমিক অবস্থায় 25°C উষ্ণতায় আপেক্ষিক আর্দ্রতা 80% হয় তবে বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভরের কত ভগ্নাংশ ঘনীভূত হইবে নির্ণয় কর। 25°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ = 23·5 mmHg এবং 5°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ = 6·5 mmHg।

[Find what fraction of the mass of aqueous vapour present in air would condense if the temperature of the air fell from 25°C to 5°C and if the original value of the relative humidity of air at 25°C is 80%. The saturated vapour pressure at 25°C = 23·5 mmHg and that at 5°C = 6·5 mmHg.]

সমাধান ঃ 25°C উষ্ণতায় বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা 80% এবং সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ 23·5 mmHg।

এই উষ্ণতায় বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের চাপ p হইলে লেখা যায়,

$$\frac{p}{23·5} = 0·80 \qquad \text{বা,} \quad p = 18·8 \text{ mmHg}$$

5°C উষ্ণতার সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ = 6·5 mmHg

কাজেই, বায়ুর উষ্ণতা 25°C হইতে 5°C-এ নামিলে ঘনীভবনের দরুন বাষ্প-চাপের হ্রাস $= (18·8 - 6·5) = 12·3$ mmHg

বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভর বাষ্পচাপের সমানুপাতিক। কাজেই, জলীয় বাষ্পের যে-ভগ্নাংশ ঘনীভূত হয় উহার মান

$$f = \frac{12·3}{18·8} = 0·65 \text{ (প্রায়)}$$

উদাহরণ 7.8 20°C উষ্ণতায় কোন আবদ্ধ ঘরের বায়ুর আর্দ্রতা 50%। যদি উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইয়া 25°C হয় তাহা হইলে আপেক্ষিক আর্দ্রতা কত হইবে? 20°C

উষ্ণতায় জলের সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ 17·4 mmHg এবং 25°C উষ্ণতায় জলের সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ 23·6 mmHg।

[The relative humidity of air in a closed room at 20°C is 50%. What will be the relative humidity of the air if the temperature is raised to 25°C. The saturated vapour pressure of water at 20°C is 17·4 mmHg and that at 25°C is 23·6 mmHg.]

সমাধান ঃ আপেক্ষিক আর্দ্রতার সংজ্ঞানুসারে, 20°C উষ্ণতায় আবদ্ধ ঘরে জলীয় বাষ্পের চাপ, P_1

$$=\frac{50}{100}\times 17{\cdot}4 \text{ mmHg}=8{\cdot}7 \text{ mmHg}$$

মনে করি, 25°C উষ্ণতায় ঘরে আবদ্ধ জলীয় বাষ্পের চাপ P_2। এখন, অসম্পৃক্ত বাষ্প চাপ-সূত্র মানিয়া চলে বলিয়া লেখা যায়,

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{T_1}{T_2} \quad \text{বা,} \quad \frac{8{\cdot}7}{P_2}=\frac{20+273}{25+273}$$

$$\text{বা,}\ P_2=8{\cdot}7\times\frac{298}{293}=8{\cdot}85 \text{ mmHg}$$

কাজেই, 25°C উষ্ণতায় আপেক্ষিক আর্দ্রতা $=\frac{8{\cdot}85}{23{\cdot}6}\times 100=37{\cdot}5\%$

উদাহরণ 7.9 30°C উষ্ণতাবিশিষ্ট এবং 90% আপেক্ষিক আর্দ্রতাবিশিষ্ট বায়ুকে শীতাতপ-নিয়ন্ত্রক যন্ত্রে প্রবেশ করান হইল। ইহাতে বায়ুর উষ্ণতা নামিয়া 20°C হইল এবং বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা কমিয়া 50% হইল। ইহাতে প্রতি ঘনমিটার বায়ু হইতে শীতাতপ-নিয়ন্ত্রক যন্ত্রকে কী পরিমাণ জলীয় বাষ্প অপসারণ করিতে হইবে? বায়ুর আয়তনের পরিবর্তন উপেক্ষা কর। (দেওয়া আছে যে, 30°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব 30 g/m³ এবং 20°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব 17 g/m³)

[Air at 30°C and 90% relative humidity is drawn into an air-conditioning unit and cooled to 20°C, the relative humidity being reduced to 50%. How many grams of water vapour must be removed by the air-conditioning unit from a cubic metre of air? Neglect the change of volume of air. (Given that the density of saturated water vapour in air at 30°C is 30 g/m³ and at 20°C is 17 g/m³)]

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে, আপেক্ষিক আর্দ্রতা

$$=\frac{\text{কোন নির্দিষ্ট আয়তন বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভর}}{\text{ঐ আয়তনের বায়ুকে সম্পৃক্ত করিতে প্রয়োজনীয় জলীয় বাষ্পের ভর}}$$

∴ কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভর

= ঐ বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা × ঐ বায়ুকে সম্পৃক্ত করিতে প্রয়োজনীয় জলীয় বাষ্পের ভর।

শর্তানুসারে, 30°C উষ্ণতায় এবং 90% আপেক্ষিক আর্দ্রতাবিশিষ্ট 1 m³ বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্প $=0{\cdot}90\times 30 \text{ g}=27 \text{ g}$ ··· (i)

অনুরূপভাবে, 20°C উষ্ণতাবিশিষ্ট এবং 50% আপেক্ষিক আর্দ্রতাবিশিষ্ট 1 m^3 বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভর$=0{\cdot}50\times17=8{\cdot}5$ g ... (ii)

সুতরাং, শীততাপ-নিয়ন্ত্রক যন্ত্রটি প্রতি ঘনমিটার বায়ু হইতে যে-পরিমাণ জলীয় বাষ্প অপসারণ করে উহার ভর, $m=(27-8{\cdot}5)$ g

[সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে]

$\therefore \quad m=18{\cdot}5$ g

উদাহরণ 7.10 যখন উপরিস্থ বায়ুর চাপ 733 mmHg তখন জল 99°C উষ্ণতায় ফুটিলে 101°C উষ্ণতায় জলের সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ কত হইবে ?

[If water boils at 99°C when the superincumbent pressure is 733 mmHg, what is the saturated vapour pressure of water at 101°C ?]

সমাধান : প্রমাণ বায়ুমণ্ডলীয় চাপে অর্থাৎ 760 mmHg চাপে জলের স্ফুটনাঙ্ক=100°C। চাপের (760−733) বা 27 mmHg পরিবর্তন ঘটিলে স্ফুটনাঙ্কের পরিবর্তন হয় (100−99) বা 1°C।

কাজেই, যে-চাপে জল 101°C উষ্ণতায় ফুটিবে উহার মান=(760+27)

=787 mmHg

কিন্তু আমরা জানি যে, স্ফুটনাঙ্কে কোন তরলের বাষ্পচাপ তলের উপরিস্থ চাপের সমান। অর্থাৎ 101°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ=787 mmHg।

উদাহরণ 7.11 কোন দিনের উষ্ণতা 20°C এবং আপেক্ষিক আর্দ্রতা 60%। যদি উষ্ণতা 5°C-এ নামিয়া যায় তাহা হইলে জলীয় বাষ্পের ভরের কত ভগ্নাংশ ঘনীভূত হইবে ? 20°C এবং 5°C উষ্ণতায় জলের সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ যথাক্রমে 17·5 mmHg এবং 6·5 mmHg।

[The temperature of air on a certain day is 20°C and relative humidity is 60 per cent. Calculate the fraction of the mass of water vapour that will condense if the temperature falls to 5°C, if the saturated vapour pressure of water at 20°C and at 5°C are respectively 17·5 mm and 6·5 mm of mercury.] (Jt. Entrance, 1976)

সমাধান : প্রাথমিক উষ্ণতা=20°C এবং আপেক্ষিক আর্দ্রতা=60%

$$\therefore \quad 0{\cdot}60=\frac{\text{বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের চাপ}}{\text{20°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ}}$$

∴ বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের চাপ$=0{\cdot}60\times17{\cdot}5=10{\cdot}5$ mmHg

বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভর উহার চাপের সমানুপাতিক। কাজেই লেখা যায়, কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ বায়ুতে 20°C উষ্ণতায় বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভর$=K\times10{\cdot}5$ g ; এখানে K=সমানুপাতিক ধ্রুবক।

5°C উষ্ণতায় জলের সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ 6·5 mmHg। কাজেই, এই অবস্থায় একই পরিমাণ বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের সর্বোচ্চ ভর$=K\times6{\cdot}5$ g

কিন্তু, বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের মান 10·5 K g ; কাজেই, উষ্ণতা 5°C-এ নামিয়া আসিলে (10·5 K – 6·5 K) বা 4 K g জলীয় বাষ্প ঘনীভূত হইয়া জলে পরিণত হইবে।

$$\text{এখন, } \frac{\text{ঘনীভূত জলীয় বাষ্পের ভর}}{\text{বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভর}} \times 100 = \frac{4\text{ K}}{10{\cdot}5\text{ K}} \times 100$$
$$= 38{\cdot}1\%$$

কাজেই, বায়ুর উষ্ণতা 20°C হইতে 5°C-এ নামিয়া আসিলে বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের 38·1% ঘনীভূত হইবে।

উদাহরণ 7.12 দার্জিলিং-এ ব্যারোমিটারের পারদস্তম্ভের উচ্চতা 23 ইঞ্চি। যদি প্রতি 1 mmHg চাপের পরিবর্তনের ফলে জলের স্ফুটনাঙ্কের 0·04°C পরিবর্তন হয় তাহা হইলে দার্জিলিং-এ জল কোন্ উষ্ণতায় ফুটিবে ?

[At Darjeeling the barometric height is 23 inches. If there is a change of 0·04°C in the boiling point of water for 1 mmHg change in pressure, at what temperature water will boil there ?]

সমাধান : ব্যারোমিটারের পারদস্তম্ভের উচ্চতা = 23 inches

$$= 23 \times 2{\cdot}54 \text{ cm বা } 584{\cdot}2 \text{ mm}$$

স্বাভাবিক বায়ুমণ্ডলীয় চাপ অপেক্ষা দার্জিলিং-এ চাপ (760 – 584·2) বা 175·8 mmHg কম।

1 mmHg চাপ কমিলে জলের স্ফুটনাঙ্ক কমে 0·04°C

কাজেই, 175·8 mmHg চাপ কমিলে জলের স্ফুটনাঙ্ক কমিবে 0·04 × 175·8

বা 7·03°C (প্রায়)

সুতরাং, দার্জিলিং-এ জলের স্ফুটনাঙ্ক = 100°C – 7·03°C = 92·97°C

উদাহরণ 7.13 যখন ব্যারোমিটারের পাঠ 753·6 mmHg এবং শিশিরাঙ্ক যখন 16·1°C তখন 27°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 1 লিটার আর্দ্র বায়ুর ভর নির্ণয় কর। 16·1°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ 13·6 mmHg ; প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় বায়ুর ঘনত্ব 0·001293 g/cm^3 এবং প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব 0·000808 g/cm^3।

[Calculate the mass of 1 litre of moist air at 27°C when the barometer reads 753·6 mmHg and the dew point is 16·1°C. The saturated vapour pressure of water at 16·1°C is 13·6 mmHg ; the density of water at standard temperature and pressure is equal to 0·001293 g/cm^3 ; the density of saturated vapour pressure of water at standard temperature and pressure is equal to 0·000808 g/cm^3.]

(I. I. T. Adm. Test, 1977)

সমাধান : আর্দ্র বায়ুতে জলীয় বাষ্পের আংশিক চাপ = 13·6 mmHg

কাজেই, আর্দ্র বায়ুতে বায়ুর আংশিক চাপ = 753·6 – 13·6 = 740 mmHg

প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় 1 লিটার আর্দ্র বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের আয়তন V হইলে লেখা যায়,

$$\frac{10^3 \times 13 \cdot 6}{(273+27)} = \frac{V \times 760}{273}$$

বা, $$V = \frac{13 \cdot 6 \times 10^3 \times 273}{300 \times 760} = 16 \cdot 28 \text{ cm}^3$$

কাজেই, 1 লিটার আর্দ্র বায়ুতে জলীয় বাষ্পের ভর, m

$$= 16 \cdot 28 \times 0 \cdot 000808 = 0 \cdot 013 \text{ g} \qquad \cdots \qquad (i)$$

প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় কেবলমাত্র বায়ুর আয়তন V′ হইলে লেখা যায়,

$$\frac{740 \times 10^3}{300} = \frac{760 \times V'}{273}$$

বা, $$V' = \frac{740 \times 10^3 \times 273}{300 \times 760} = 886 \cdot 05 \text{ cm}^3$$

সুতরাং, 1 লিটার আর্দ্র বায়ুতে বিদ্যমান বায়ুর ভর, m'

$$= V' \times \text{বায়ুর ঘনত্ব} = 886 \cdot 05 \times 0 \cdot 001293 = 1 \cdot 157 \text{ g}$$

কাজেই, 1 লিটার আর্দ্র বায়ুর মোট ভর $= m + m'$

$$= 0 \cdot 013 + 1 \cdot 1457 = 1 \cdot 159 \text{ g}$$ (প্রায়)

প্রশ্নমালা 7

1. কোন একদিন যখন বায়ুর উষ্ণতা 16°C তখন দেখা গেল যে, শিশিরাঙ্ক 12°C। বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় কর। দেওয়া আছে যে, 12°C এবং 16°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 10·51 mmHg এবং 13·62 mmHg।

[On a certain day, the dew-point was found to be 12°C, when the air temperature was 16°C. Find the relative humidity of the air, given that the saturated vapour pressure of water at 12°C and 16°C are respectively 10·51 mmHg and 13·62 mmHg.]

(H. S. (Comp.), 1946) [77·16%]

2. বায়ুর উষ্ণতা এবং শিশিরাঙ্ক যথাক্রমে 28·6°C এবং 20·2°C। 28·6°C এবং 20·2°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 30·9 mmHg এবং 18·85 mmHg হইলে বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতার মান কত ?

[The temperature of air and the dew-point are respectively 28·6°C and 20·2°C. If the saturated vapour pressure of water at 28·6°C and 20·2°C are respectively 30·9 mmHg and 18·85 mmHg what is the relative humidity of air ?] [61%]

3. বায়ুর উষ্ণতা 24·5°C এবং শিশিরাঙ্ক 13°C। আপেক্ষিক আর্দ্রতার মান নির্ণয় কর। 24°C, 25°C এবং 13°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 22·2 mmHg, 23·5 mmHg এবং 11·1 mmHg।

[The temperature of air is 24·5°C and the dew-point is 13°C. Find the relative humidity. The saturated vapour pressure of water at 24°C, 25°C and 13°C are 22·2 mmHg, 23·5 mmHg and 11·1 mmHg respectively.] [48·57%]

4. 30°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 75% আপেক্ষিক আর্দ্রতাবিশিষ্ট বায়ুকে একটি শীতাতপনিয়ন্ত্রক যন্ত্রে প্রবেশ করান হইল। ইহাতে বায়ুর উষ্ণতা নামিয়া 15°C হইল এবং বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা হ্রাস পাইয়া 25% হইল। ইহাতে প্রতি লিটার বায়ু হইতে শীতাতপনিয়ন্ত্রক যন্ত্রটিকে কী পরিমাণ জলীয় বাষ্প অপসারণ করিতে হইবে? বায়ুর আয়তনের পরিবর্তন উপেক্ষণীয়। ধরিয়া লও যে, 30°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব 30 g/m^3 এবং 15°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের ঘনত্ব 12 g/m^3।

[Air at 30°C and 75% relative humidity is drawn into an air-conditioning unit and cooled to 15°C, the relative humidity being reduced to 25%. How many grams of water vapour must be removed by the air-conditioner from a litre of air? The change of volume of air is negligible. Assume that the density of saturated water vapour in air at 30°C is 30 g/m^3 and at 15°C is 12 g/m^3]

[$19·5 \times 10^{-3}$ g]

5. 17°C উষ্ণতায় কোন আবদ্ধ ঘরের বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা 40%। যদি উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইয়া 25°C হয় তাহা হইলে আপেক্ষিক আর্দ্রতা কত হইবে? 17°C এবং 25°C উষ্ণতায় জলের সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ যথাক্রমে 14·4 mmHg এবং 23·5 mmHg।

[The relative humidity of air in a closed room at 17°C is 40%. What will be the relative humidity of the air, if the temperature is raised to 25°C. The values of saturated vapour pressure of water at 17°C and 25°C are 14·4 mmHg and 23·5 mmHg respectively.]

[25·2%]

6. কোন একদিন বায়ুর উষ্ণতা 29·5°C এবং শিশিরাঙ্ক 16°C। আপেক্ষিক আর্দ্রতার মান নির্ণয় কর। 16°C, 29°C এবং 30°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় চাপ যথাক্রমে 13·5 mmHg, 29·8 mmHg এবং 31·4 mmHg।

[On a certain day, the temperature of air is 29·5°C, and the dew-point is 16°C. Calculate the relative humidity, Assume that the values of saturated vapour pressure of water at 16°C, 29°C and 30°C are 13·5 mmHg, 29·8 mmHg and 31·4 mmHg respectively.] [44·1%]

7. যখন বায়ুর উষ্ণতা 25°C এবং আপেক্ষিক আর্দ্রতা 80% তখন বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের চাপ কত? 25°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ 23·5 mmHg।

[What is the pressure due to aqueous vapour in the air when the air temperature is 25°C and the relative humidity is 80%? The saturated vapour pressure of water at 25°C is 23·5 mmHg.]

[18·8 mmHg]

8. যদি বায়ুর উষ্ণতা 20°C হইতে 5°C-এ নামিয়া যায় এবং যদি প্রাথমিক অবস্থায় আপেক্ষিক আর্দ্রতা 60% হয়, তবে বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভরের কত ভগ্নাংশ ঘনীভূত হইবে নির্ণয় কর। 20°C উষ্ণতায় জলীয় বাষ্পের সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ=17·5 mmHg এবং 5°C-এ সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ=6·5 mmHg।

[Calculate what fraction of mass of aqueous vapour present in the air would condense if the temperature of air fell from 20°C to 5°C and if the original humidity was 60%. The saturated vapour pressure of water at 20°C=17·5 mmHg and that at 5°C= 6·5 mmHg.] [0·38 (প্রায়)]

9. যখন উপরিস্থ চাপ 746·5 mmHg তখন জলের স্ফুটনাঙ্ক 99·5°C। তাহা হইলে 100·8°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ কত হইবে ?

[The boiling point of water is 99·5°C when the superincumbent pressure is 746·5 mmHg. What is the saturated vapour pressure of water at 100·8°C ?] [781·60 mm]

10. কিছু পরিমাণ বায়ুর শিশিরাঙ্ক 15°C এবং উষ্ণতা 20°C। যদি উষ্ণতা 10°C-এ নামিয়া যায় তাহা হইলে বায়ুতে বিদ্যমান জলীয় বাষ্পের ভরের কত ভগ্নাংশ ঘনীভূত হইবে ? 13°C, 15°C এবং 20°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 9·2 mmHg, 12·8 mmHg এবং 17·5 mmHg।

[The dew-point of a mass of air is 15°C and its temperature is 20°C. What fraction of water vapour will condense if the temperature of air drops to 10°C ? The values of the saturated vapour pressure of water at 13°C, 15°C and 20°C are 9·2 mmHg, 12·8 mmHg and 17·5 mmHg respectively.] [0·28]

অষ্টম পরিচ্ছেদ

গ্যাসের গতিতত্ত্ব

8.1 গ্যাসের গড় বর্গ বেগ : মনে করি, কোন পাত্রে N সংখ্যক অণু আছে। ইহাদের মধ্যে প্রথমটির বেগ c_1, দ্বিতীয়টির বেগ c_2, তৃতীয়টির বেগ $c_3, \cdots$ এবং N-তম অণুটির বেগ c_N হইলে সংজ্ঞানুসারে গতিবেগের গড় বা গড় বর্গ বেগ (mean square velocity)

$$\overline{c^2}=\frac{c_1^2+c_2^2+c_3^2+\cdots+c_N^2}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N} c_i^2}{N} \quad \cdots \quad (8.1)$$

গ্যাসের বর্গমাধ্য মূল বেগ (root mean square velocity) c হইলে লেখা যায়,

$$c=\sqrt{\overline{c^2}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} c_i^2}{N}} \quad \cdots \quad (8.2)$$

8.2 গ্যাসের চাপ : কোন গ্যাসের প্রতিটি অণুর ভর m, প্রতি একক আয়তনে অণুব সংখ্যা n এবং গ্যাসের অণুর বর্গমাধ্য মূল বেগ c হইলে গ্যাসের চাপ P নিম্নের সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়,

$$P=\tfrac{1}{3}mnc^2 \quad \cdots \quad (8.3)$$

কিন্তু, mn=একটি অণুর ভর × একক আয়তনে মোট অণুর সংখ্যা

=একক আয়তন গ্যাসেব ভর=গ্যাসের ঘনত্ব (ρ)

সুতবাং লেখা যায়, $P=\tfrac{1}{3}\rho c^2 \quad \cdots \quad (8.4)$

সমীকরণ (8.4) হইতে পাই, $c=\sqrt{\frac{3P}{\rho}} \quad \cdots \quad (8.5)$

8.3 বর্গমাধ্য মূল বেগ ও উষ্ণতার সম্পর্ক : 8.4 নং সমীকরণকে V দ্বারা গুণ করিয়া লেখা যায়, $PV=\tfrac{1}{3}\rho Vc^2$

এখানে V=গ্যাসেব গ্রাম-আণবিক আয়তন (gram-molecular volume) হইলে, $PV=\tfrac{1}{3}Mc^2 \quad \cdots \quad (8.6)$

কারণ, $\rho V=M$, গ্যাসের আণবিক ওজন (molecular weight)

কিন্তু আমরা জানি, $PV=RT \quad \cdots \quad (8.7)$

কাজেই, সমীকরণ (8.6) এবং (8.7) হইতে পাই,

$$\therefore RT=\tfrac{1}{3}Mc^2 \quad \cdots \quad (8.8)$$

$$\text{বা, } c=\sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \cdots \quad (8.9)$$

8.4 গ্যাসের অণুর গড় গতিশক্তি : সমীকরণ (8.8) হইতে পাই,

$$Mc^2=3RT$$

কাজেই, এক মোলাব গ্যাসেব আণবিক গতিশক্তি, $\tfrac{1}{2}Mc^2=\tfrac{3}{2}RT$

কাজেই, গ্যাসের কোন অণুর গড আণবিক গতিশক্তি

$$\frac{\tfrac{1}{2}Mc^2}{N}=\frac{3R}{2N}\cdot T \quad [\text{ এখানে N হইল অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা }] \quad (8.10)$$

বা, গ্যাসের অণুর গড আণবিক শক্তি$=\tfrac{3}{2}kT \quad \cdots \quad (8.11)$

(k=বোল্টৎজ্‌মান ধ্রুবক)

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 8.1 কোন্ উষ্ণতায় নাইট্রোজেন অণুর বর্গমাধ্য মূল বেগ উহার প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতার বর্গমাধ্য মূল বেগের দ্বিগুণ হইবে ?

[At what temperature will the root mean square velocity of

nitrogen gas be double its value at standard temperature and pressure ?]

সমাধান : ধরি, নির্ণেয় উষ্ণতা $= T$ K

আমরা জানি, $c=\sqrt{3RT/M}$ $\therefore$ $c \propto \sqrt{T}$

বা, $\dfrac{c}{c_0}=\sqrt{\dfrac{T}{T_1}}$ ... (i)

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\dfrac{c}{c_0}=2$ এবং $T_0=273$ K

$2=\sqrt{\dfrac{T}{273}}$ বা, $T=4\times273=1092$ K

$\therefore$ সেলসিয়াস স্কেলে নির্ণেয় উষ্ণতা $=1092-273=819°C$

উদাহরণ 8.2 প্রমাণ উষ্ণতায় এবং প্রমাণ বায়ুমণ্ডলীয় চাপে হাইড্রোজেন গ্যাসের ঘনত্ব 9×10^{-5} g/cm^3 হইলে হাইড্রোজেন অণুর বর্গমাধ্য মূল বেগের মান নির্ণয় কর।

[If the density of the hydrogen gas at standard temperature and pressure is 9×10^{-5} g/cm^3, find the root mean square velocity of hydrogen molecules.]

সমাধান : আমরা জানি যে, বর্গমাধ্য মূল বেগ, $c=\sqrt{\dfrac{3P}{\rho}}$

এখানে, P = গ্যাসের চাপ এবং ρ = গ্যাসের ঘনত্ব

শর্তানুসারে, $\rho=9\times10^{-5}$ g/cm^3 এবং $P=76$ cmHg

$=76\times13{\cdot}6\times981$ dyn/cm^2

কাজেই, $c=\sqrt{\dfrac{3\times76\times13{\cdot}6\times981}{9\times10^{-5}}}=1{\cdot}84$ km/s (প্রায়)

উদাহরণ 8.3 0°C উষ্ণতা এবং স্বাভাবিক বায়ুমণ্ডলীয় চাপে অক্সিজেন অণুর বর্গমাধ্য মূল বেগের মান 0·461 km/s হইলে অক্সিজেন গ্যাসের ঘনত্ব কত ?

[If the root mean square velocity of oxygen molecules is 0·461 km/s at 0°C and standard atmospheric pressure, what is the density of oxygen gas ?]

সমাধান : আমরা জানি যে, $c=\sqrt{\dfrac{3P}{\rho}}$ $\therefore$ গ্যাসের ঘনত্ব, $\rho=\dfrac{3P}{c^2}$

এখানে, $P=76$ cmHg $=76\times13{\cdot}6\times981$ dyn/cm^2

এবং $c=0{\cdot}461$ km/s $=0{\cdot}461\times10^5$ cm/s

$$\therefore \rho=\frac{3\times76\times13{\cdot}6\times981}{(0{\cdot}461\times10^5)^2}=1{\cdot}43\times10^{-8}\text{ g/cm}^3$$

উদাহরণ 8.4 দেওয়া আছে যে, মোলার গ্যাস ধ্রুবক (R)-এর মান 8·31 J mol^{-1} K^{-1}। নিম্নোক্ত গ্যাসগুলির ক্ষেত্রে বর্গমাধ্য মূল আণবিক বেগ নির্ণয় কর : (a) 0°C উষ্ণতায় হাইড্রোজেন গ্যাস, (b) 50°C উষ্ণতায় হাইড্রোজেন গ্যাস এবং (iii) 0°C উষ্ণতায় অক্সিজেন গ্যাস (ধরিয়া লও যে, সকল ক্ষেত্রেই প্রমাণ চাপ ক্রিয়াশীল)।

[Given that the molar constant R has a value of 8·31 J mol^{-1} K^{-1}, calculate the root mean square molecular velocities in the following cases : (a) hydrogen gas at 0°C. (b) hydrogen gas at 50°C, (c) oxygen gas at 0°C (Assume conditions of standard pressure throughout).]

সমাধান : আমরা জানি যে, বর্গমাধ্য মূল আণবিক বেগ

$$c=\sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

(a) হাইড্রোজেন গ্যাসের ক্ষেত্রে 1 মোল-এর ভর 0·002 kg

∴ 0°C উষ্ণতায় হাইড্রোজেন গ্যাসের বর্গমাধ্য মূল আণবিক বেগ,

$$c=\sqrt{\frac{3\times 8{\cdot}31\times 273}{0{\cdot}002}}=1{\cdot}845\times 10^3\ ms^{-1}$$

(b) লক্ষণীয় যে, কোন নির্দিষ্ট গ্যাসের ক্ষেত্রে (M স্থির হইলে) (i) নং সমীকরণ হইতে লেখা যায়, $c \propto \sqrt{T}$

$$\frac{c_{50}}{c_0}=\sqrt{\frac{273+50}{273}}=\sqrt{\frac{323}{273}}$$

$$\therefore \quad c_{50}=c_0\times\sqrt{\tfrac{323}{273}}=1{\cdot}845\times 10^3\times\sqrt{\tfrac{323}{273}}=2{\cdot}007\times 10^3\ ms^{-1}$$

(c) সমীকরণ (i) হইতে দেখা যাইতেছে যে, একই উষ্ণতায় বিভিন্ন গ্যাসের ক্ষেত্রে, $c \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$

কাজেই, $\frac{c_0}{c_H}=\sqrt{\frac{M_h}{M_0}}=\sqrt{\frac{0{\cdot}002}{0{\cdot}032}}=\frac{1}{4}$.

$$\therefore \quad c_0=\frac{c_H}{4}=\frac{1{\cdot}845\times 10^3}{4}=4{\cdot}61\times 10^2\ ms^{-1}$$

উদাহরণ 8.5 27°C উষ্ণতায় এক গ্রাম-অণু হিলিয়াম গ্যাসের আণবিক গতিশক্তি কত ?

[What is the kinetic energy of a gram-molecule of helium at 27°C ?]

সমাধান : আমরা জানি যে, প্রতি গ্রাম-অণু গ্যাসের আণবিক গতিশক্তি

$$=\tfrac{3}{2}RT$$

এখানে, মোলার-ধ্রুবক, $R=8{\cdot}3\times 10^7$ erg mol^{-1} K^{-1}

এবং উষ্ণতা $T=27+273=300$ K

∴ নির্ণেয় গতিশক্তি$=\frac{3}{2}\times 8{\cdot}3\times 10^7\times 300$ erg$=3735$ J

উদাহরণ 8.6 27°C উষ্ণতায় এবং 740 mmHg চাপে 21·7 cm^3 আয়তনের একটি গ্যাসের ভর হইল 0·05 g। গ্যাসটির আণবিক ওজন নির্ণয় কর।

[The mass of 21·7 cm^3 of a gas at a temperature of 27°C and a pressure of 740 mmHg is 0·05 g. Calculate the molecular weight of the gas.]

সমাধান ঃ ধরি, প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় গ্যাসটির আয়তন হইবে V cm^3। সুতরাং, গ্যাস-সূত্র অনুযায়ী লেখা যায়,

$$\frac{740\times 21{\cdot}7}{(273+27)}=\frac{760\times V}{273} \quad \text{বা,} \quad V=19{\cdot}23 \text{ cm}^3$$

শর্তানুসারে, প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় 19·23 cm^3 আয়তনের ভর 0·05 g

কাজেই, মোলার আয়তনের ভর [22·4 লিটার বা 22400 cm^3 গ্যাসের ভর]

$$=\frac{0{\cdot}05\times 22400}{19{\cdot}23}=58{\cdot}2 \text{ g}$$

কাজেই, আলোচ্য গ্যাসটির আণবিক ওজন=58·2

উদাহরণ 8.7 0·04 g ভরবিশিষ্ট এক ফোঁটা জলে অণুর সংখ্যা কত? দেওয়া আছে যে, অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা=$6{\cdot}023\times 10^{23}$।

[What is the number of molecules in a drop of water of mass 0·04 g? Given that Avogadro number=$6{\cdot}023\times 10^{23}$]

সমাধান ঃ জলের আণবিক ওজন=18

কাজেই, 18 g জলে অণুর সংখ্যা $6{\cdot}023\times 10^{23}$ (অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা)

$$\therefore \quad 0{\cdot}04 \text{ g জলে অণুর সংখ্যা}=\frac{6{\cdot}023\times 10^{23}\times 0{\cdot}04}{18}=13{\cdot}38\times 10^{20}$$

উদাহরণ 8.8 60°C উষ্ণতাবিশিষ্ট এক গ্রাম-মোল হিলিয়াম গ্যাসের সহিত 30°C উষ্ণতাবিশিষ্ট এক গ্রাম-মোল আর্গন গ্যাস মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের উষ্ণতা কত হইবে?

[One gram-mole of helium at 60°C is mixed with one gram-mole of argon at 30°C. What is the temperature of the mixture?]

সমাধান ঃ একটি অণুর গড় গতিশক্তি=$\frac{3}{2}kT$

এখানে, k হইল বোল্টৎজমান ধ্রুবক এবং T হইল পরম স্কেলে গ্যাসের উষ্ণতা।

প্রতি গ্রাম-অণুতে N_0-সংখ্যক অণু বিদ্যমান থাকে (N=অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা) বলিয়া লেখা যায়,

60°C উষ্ণতাবিশিষ্ট এক গ্রাম-মোল হিলিয়ামের গতিশক্তি=$N_0 \frac{3}{2}kT$

$$=N_0 \tfrac{3}{2} k\,(60+273)=\tfrac{3}{2} N_0 k\times 333 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

অনুরূপভাবে, 30°C উষ্ণতাবিশিষ্ট এক গ্রাম-মোল আর্গনের গতিশক্তি

$$=N_0.\tfrac{3}{2} k\,(30+273)=\tfrac{3}{2} N_0\, k\times 303 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

পরম স্কেলে গ্যাসের মিশ্রণের উষ্ণতা T_0 হইলে লেখা যায়, $(2N_0)\times\frac{3}{2}kT$
=এক গ্রাম-মোল হিলিয়ামের গতিশক্তি+এক গ্রাম মোল আর্গনের গতিশক্তি

বা, $2N_0 \cdot \frac{3}{2}kT = N_0 \cdot \frac{3}{2}k \times 333 + N_0 \cdot \frac{3}{2}k \times 303$

বা, $2T = 333 + 303$ বা, $T = 318$ K

∴ সেলসিয়াস স্কেলে উক্ত দুই গ্যাসের মিশ্রণের উষ্ণতা $= 318 - 273 = 45°C$

প্রশ্নমালা 8

1. নিম্নের উপাত্তগুলি হইতে (a) 0°C উষ্ণতা 10^{-4} mmHg চাপে, (b) 50°C উষ্ণতায় এবং 10^{-4} mmHg চাপে কোন গ্যাসের 1 cm^3 আয়তনে গ্যাসের অণুর সংখ্যা নির্ণয় কর।

অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা $= 6{\cdot}02 \times 10^{23}$ mol^{-1}

প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় মোলার আয়তন $= 2{\cdot}24 \times 10^{-2}$ m^3 mol^{-1}

পারদের আপেক্ষিক ঘনত্ব $= 13{\cdot}6$

অভিকর্ষজ ত্বরণ $= 9{\cdot}81$ ms^{-2} ।

[Use the following data to find the number of molecules in 1 cm^3 of a gas at (a) 0°C and 10^{-4} mmHg, (b) 50°C and 10^{-4} mmHg :

Avogadro constant $= 6{\cdot}02 \times 10^{23}$ mol^{-1}

Molar volume at standard temperature and pressure $= 2{\cdot}24 \times 10^{-2}$ m^3 mol^{-1}

Relative density of mercury $= 13{\cdot}6$

Acceleration due to gravity $= 9{\cdot}81$ ms^{-2}]

[(a) $3{\cdot}57 \times 10^{12}$, (b) $3{\cdot}01 \times 10^{12}$]

2. কোন্ উষ্ণতায় অক্সিজেনের অণুগুলির বর্গমাধ্য মূল বেগ —50°C উষ্ণতা-বিশিষ্ট হাইড্রোজেন গ্যাসের অণুগুলির বর্গমাধ্য মূল বেগের সমান ?

[At what temperature will oxygen molecules have the same mean square velocity as the molecules of hydrogen at −50°C ?]

[3295°C]

3. কোন্ উষ্ণতায় হিলিয়াম গ্যাসের অণুগুলির বর্গমাধ্য মূল বেগ উহাদের 27°C উষ্ণতার বর্গমাধ্য মূল বেগের দ্বিগুণ হইবে ?

[At what temperature the root mean square velocity of helium molecules will be double that at 27°C ?] [927°C]

4. 0°C উষ্ণতায় হাইড্রোজেন অণুর বর্গমাধ্য মূল দ্রুতি 1·84 km/s। একই উষ্ণতায় নাইট্রোজেন অণুর বর্গমাধ্য মূল দ্রুতি কত হইবে ? (H = 1, N = 14)

[Hydrogen molecules have root-mean square speed of 1·84 km/s at 0°C. What is the root-mean square speed of nitrogen molecules at the same temperature ?] [0·492 km/s]

5. যদি প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় 32 g অক্সিজেন গ্যাসের আয়তন 22·3 লিটার হয় তাহা হইলে 20°C উষ্ণতায় অক্সিজেন অণুগুলির বর্গমাধ্য মূল বেগের মান নির্ণয় কর।

[If 32 g of oxygen at standard temperature and pressure occupy

22·3 litre, then calculate the root mean square velocity of oxygen molecules at 20°C.] [$4{\cdot}766 \times 10^4$ cm/s]

6. 0°C উষ্ণতায় একটি হাইড্রোজেন অণুর মূল আণবিক গতিশক্তি $5{\cdot}64 \times 10^{-14}$ erg এবং মোলার গ্যাস ধ্রুবকের মান $8{\cdot}32 \times 10^7$ erg $mol^{-1}K^{-1}$ হইলে অ্যাভোগাড্রো ধ্রুবকের মান নির্ণয় কর।

[If the mean molecular kinetic energy of the molecules of hydrogen at 0°C is $5{\cdot}64 \times 10^{-14}$ erg and molar gas constant is $8{\cdot}32 \times 10^7$ erg $mol^{-1}K^{-1}$, calculate Avogadro's number.]

[$6{\cdot}08 \times 10^{23}$ mol^{-1}]

7. প্রমাণ উষ্ণতা ও চাপে হিলিয়াম অণুগুলির বর্গমাধ্য মূল বেগ নির্ণয় কর। হিলিয়ামের আণবিক ওজন $= 4$।

[Find the root mean square velocity of helium molecules at standard temperature and pressure. The molecular weight of helium $= 4$.] [1·31 m/s^{-1} (প্রায়)]

8. 100°C উষ্ণতায় এক গ্রাম-অণু হাইড্রোজেন গ্যাসের গড় আণবিক গতিশক্তি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে যে, প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় 1 লিটার হাইড্রোজেন গ্যাসের ভর 0 0896 g এবং হাইড্রোজেন অণু দ্বি-পরমাণুক। 0°C উষ্ণতায় পারদের ঘনত্ব $= 13{\cdot}6$ g/cm^3 এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 981$ cm/s^2।

[Calculate the average kinetic energy per gram molecule of hydrogen at 100 C, given that one litre of hydrogen gas at standard temperature and pressure is 0·0896 g and that hydrogen molecule is di-atomic. Density of mercury at 0 C $= 13{\cdot}6$ g/cm^3 and acceleration due to gravity $= 981$ cm/s^2.] [$4{\cdot}64 \times 10^{10}$ erg mol^{-1}]

9. প্রমাণ উষ্ণতা এবং চাপে অক্সিজেনের ঘনত্ব 1·43 kg/m^3 ধরিয়া (i) 0°C, (ii) 27°C এবং (iii) 127°C উষ্ণতায় অক্সিজেন অণুর বর্গমাধ্য মূল নির্ণয় কর।

[Taking the density of oxygen at standard temperature and pressure to be 1·43 kg/m^3, find the root-mean square velocity of oxygen molecules at (i) 0 C, (ii) 27 C and (iii) 127°C]

[(i) 461 m/s, (ii) 483 m/s, (iii) 558 m/s]

10. 27°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 2 g নাইট্রোজেন গ্যাসের আণবিক গতিশক্তি নির্ণয় কর।

[Find the total molecular kinetic energy of 2 g of nitrogen at 27°C.] [256·8J]

নবম পরিচ্ছেদ

তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক

9.1 জুলের সূত্র (Joule's Law) : তাপ এক প্রকার শক্তি। তাপশক্তি রূপান্তরিত হইয়া যান্ত্রিক শক্তিতে পরিণত হইতে পারে; আবার, যান্ত্রিক শক্তির রূপান্তরের ফলে তাপশক্তি উৎপন্ন হইতে পারে।

তাপকে যান্ত্রিক শক্তিতে কিংবা যান্ত্রিক শক্তিকে তাপে রূপান্তরিত করিতে ঐ তাপ এবং যান্ত্রিক শক্তি পরস্পরের তুল্য (equivalent) হয়। এই উক্তির তাৎপর্য এই যে, যখন কোন কার্যের ফলে তাপ উৎপন্ন হয় বা তাপ হইতে যখন কোন কার্য সম্পাদিত হয় তখন তাপ ও কার্য পরস্পরের সমানুপাতিক হইয়া থাকে। ইহাকে **জুলের সূত্র** বা তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র (first law of thermodynamics) বলা হয়। ইহাকে শক্তির নিত্যতা সূত্রেরই একটি বিশেষ রূপ বলা যায়।

যদি W পরিমাণ যান্ত্রিক কার্যের ফলে H পরিমাণ তাপ উদ্ভূত হয় তাহা হইলে জুলের সূত্রানুসারে,

$$W \propto H \qquad \text{বা, } W = JH$$

$$\text{বা, } \boxed{\frac{W}{H} = J} \qquad \cdots \quad (9.1)$$

এখানে J একটি ধ্রুবক। ইহাকে **তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক** (mechanical equivalent of heat) বা **তাপের জুল তুল্যাঙ্ক** (Joule's equivalent of heat) বলা হয়। সমীকরণ (9.1) হইতে দেখা যাইতেছে যে, H=1 হইলে W=J। সুতরাং বলা যায়, **একক তাপ উৎপন্ন করিতে যে-পরিমাণ কার্য করিতে হয় তাহাই তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক।**

● তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্কের মান

$$J = 4{\cdot}2 \times 10^7 \text{ erg/cal}$$
$$= 4{\cdot}2 \text{ joules/cal}$$
$$J = 778 \text{ ft-lb/Btu}$$

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 9.1 160 lb ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 200 ft উচ্চতা হইতে ভূমিতে পড়িল। ইহাতে বস্তুটিতে কী পরিমাণ তাপ উৎপন্ন হইবে? (তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক=778 ft-lb/Btu)

[A mass of 160 lb falls to the ground from a height of 200 ft. What will be the heat developed ? (The mechanical equivalent of heat = 778 ft-lb/Btu.]

সমাধান ঃ 160 lb ভরবিশিষ্ট কোন বস্তু 200 ft নিচে পড়িলে অভিকর্ষজ বল-কর্তৃক বস্তুর উপর কৃত কার্য

$$W = mgh = 160 \times 32 \times 200 \text{ ft-poundals} = 160 \times 200 \text{ ft-lb}$$

কাজেই, বস্তুতে উৎপন্ন তাপ, $H = \frac{W}{J} = \frac{160 \times 200}{778}$ Btu $= 41{\cdot}12$ Btu

উদাহরণ 9.2 রাঁচীর হুড্রু জলপ্রপাতের উচ্চতা 1 km ; তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক 4·2 joules/cal ধরিয়া উপরের এবং নিচের জলের উষ্ণতার পার্থক্য নির্ণয় কর।

[The Hudru falls at Ranchi are 1 km in height. Calculate the difference in temperature of the waters at the top and at the bottom, assuming J=4·2 joules/cal.]

সমাধান ঃ মনে করি, কোন নির্দিষ্ট সময়ে *m* g জল উপর হইতে নিচে পড়ে। ইহাতে অভিকর্ষীয় বল-কর্তৃক জলের উপর কৃত কার্য,

$$W = mgh = m \times 980 \times 1000 \times 10^2 \text{ erg}$$

$$= \frac{m \times 98 \times 10^6}{10^7} \text{ joules} = m \times 9{\cdot}8 \text{ joules}$$

আমরা জানি যে, উৎপন্ন তাপ, $H = \frac{W}{J}$

$$J = \text{তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক} = 4{\cdot}2 \text{ joules/cal}$$

$$\therefore \quad H = \frac{m \times 9{\cdot}8}{4{\cdot}2} \text{ cal} \qquad \cdots \quad (i)$$

যদি উপর হইতে নিচে পড়িয়া জলের θ°C উষ্ণতা বৃদ্ধি হয় তাহা হইলে লেখা যায়,

$$H = m \times \theta \text{ cal} \qquad \cdots \quad (ii)$$

$$\therefore \quad m \times \theta = m \times \frac{9{\cdot}8}{4{\cdot}2} \text{ বা, } \theta = \frac{9{\cdot}8}{4{\cdot}2} = 2{\cdot}33^\circ\text{C}$$

উদাহরণ 9.3 100 m/s গতিবেগে ধাবমান একটি লোহার বলকে হঠাৎ থামান হইল। যদি বলটির প্রাথমিক উষ্ণতা 20°C হয় এবং যদি ইহার গতিশক্তির সম্পূর্ণটুকুই তাপে রূপান্তরিত হয় তাহা হইলে লোহার বলটির অন্তিম উষ্ণতা কত হইবে? (লোহার আপেক্ষিক তাপ=0·1)

[An iron ball moving with a velocity of 100 m/s is suddenly stopped. If the whole of kinetic energy is converted into heat, what will be the final temperature, the initial temperature of the ball being 20°C ? (Specific heat of iron=0·1)]

সমাধান ঃ ধরি, লোহার বলটির বল $= m$ g

$$\text{বলটির গতিশক্তি} = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} m\,(100 \times 100)^2 \text{ erg}$$

এই গতিশক্তির সম্পূর্ণ টুকু তাপে রূপান্তরিত হইলে উৎপন্ন তাপ

$$H = \frac{\text{গতিশক্তি}}{\text{তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক (J)}} = \frac{m \times 10^8}{2 \times 4{\cdot}2 \times 10^7} \text{ cal} \qquad \cdots \quad (i)$$

$$[\because \; J = 4{\cdot}2 \times 10^7 \text{ erg/cal}]$$

যদি বলটির অন্তিম উষ্ণতা θ°C হয় তাহা হইলে লেখা যায়,

$$H = m \times 0.1 \times (\theta - 20) \text{ cal} \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

$\therefore$ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $0.1 \times (\theta - 20) = \dfrac{10^8}{2 \times 4.2 \times 10^7}$

$$\text{বা,} \quad \theta - 20 = \frac{10^8}{8.4 \times 10^6} = \frac{100}{8.4} = 11.91°\text{C}$$

$$\therefore \quad \theta = 31.91°\text{C}$$

উদাহরণ 9.4 অপরিবাহী পদার্থের দ্বারা তৈয়ারী একটি নলের মধ্যে 800 g সীসার গুলি ভর্তি করিয়া নলের দুই মুখ বন্ধ করা হইয়াছে। নলটির দৈর্ঘ্য 1 মিটার। ইহাকে উল্লম্বভাবে ধরা হইল। নলটিকে হঠাৎ উল্টান হইল যাহাতে সীসার গুলি কয়টি এক প্রান্ত হইতে অপর প্রান্তে নামিয়া আসে। এইরূপে নলটিকে 50 বার উল্টানর ফলে দেখা গেল যে, সীসার গুলির উষ্ণতা 3·89°C বৃদ্ধি পাইয়াছে। উৎপন্ন তাপ সম্পূর্ণভাবে সীসায় রহিয়াছে এইরূপ ধরিয়া তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্কের মান নির্ণয় কর। (সীসার আপেক্ষিক তাপ=0·03) (H. S. (New) 1978)

[A tube of heat-insulating material, closed at both ends, contains 800 g of lead shots. The tube is 1 m long and is held vertically. It is then suddenly inverted so that the lead shots fall to the other end. After 50 such inversions the temperature of the lead shots is found to rise by 3·89°C. Assuming that the whole of the heat generated remains within the lead shots, calculate the mechanical equivalent of heat. (Specific heat of lead=0·03)]

সমাধান ঃ মনে করি, সীসার গুলিসমূহের ভর $= m$

নলটিকে n বার উল্টাইলে যে-পরিমাণ শক্তির রূপান্তর ঘটে তাহার পরিমাণ, $W = n \times mgh$

$$\text{এখন,} \qquad J = \frac{W}{H} = \frac{n \times mgh}{ms\,\theta} = \frac{ngh}{s\,\theta}$$

এখানে, $n = 50$, $\theta =$ সীসার গুলিসমূহের উষ্ণতা-বৃদ্ধি $= 3·89$°C

$g =$ অভিকর্ষজ ত্বরণ $= 980$ cm/s², $s =$ সীসার আপেক্ষিক তাপ $= 0·03$, $h =$ নলের দৈর্ঘ্য $= 1$ m $= 100$ cm

$$\therefore \quad J = \frac{50 \times 980 \times 100}{0.03 \times 3.89} = 4.2 \times 10^7 \text{ erg/cal}$$

উদাহরণ 9.5 একটি সীসার বুলেট 336 m/s গতিবেগে ছুটিয়া আসিয়া একটি দৃঢ় লক্ষ্যে আঘাত করিল। উৎপন্ন তাপের 75% বুলেটে থাকিলে উহার উষ্ণতা-বৃদ্ধি নির্ণয় কর। ($J = 4·2 \times 10^7$ erg/cal এবং সীসার আপেক্ষিক তাপ=0·03)

[A lead bullet moving with a velocity of 336 m/s strikes a rigid target. If 75% of the heat developed is retained by the bullet, calculate its rise of temperature. ($J = 4·2 \times 10^7$ erg/cal and the specific heat of lead=0·03)]

সমাধান ঃ মনে করি, সীসার বুলেটটির ভর $=m$ g

উহার গতিশক্তি $=\frac{1}{2}mv^2$ erg

ইহার শতকরা 75 ভাগ বুলেটের উষ্ণতা-বৃদ্ধির কাজে লাগে। বুলেটের গতি-শক্তি রূপান্তরিত হইয়া যে-তাপ সৃষ্টি হয় তাহার মান $H=\frac{1}{2}\frac{mv^2}{J}$

বুলেটের উষ্ণতা-বৃদ্ধি θ°C হইলে লেখা যায়,

$$0.75\times\frac{1}{2}\frac{mv^2}{J}=ms\theta,\ s=\text{সীসার আপেক্ষিক তাপ}=0.03$$

$$\text{বা,}\quad \theta=\frac{0.75\times v^2}{2\times J\times s}=\frac{0.75\times(336\times10^2)^2}{2\times4.2\times10^7\times0.03}=336°C$$

উদাহরণ 9.6 একটি গতিশীল সীসার বুলেটের সহিত একটি লক্ষ্যবস্তুর সংঘাতের ফলে উৎপন্ন তাপ বুলেটটির 150°C উষ্ণতা-বৃদ্ধি করে। বুলেটটির গতি-বেগ নির্ণয় কর। (সীসার আপেক্ষিক তাপ=0·03)

[The heat developed due to the impact of a moving lead bullet against a target raised the temperature of the bullet by 150 C. Calculate the speed of the bullet. (Specific heat of lead=0·03)]

সমাধান ঃ মনে করি, বুলেটটির ভর $=m$ g এবং ইহার গতিবেগ $=v$ cm/s

অতএব, বুলেটের গতিশক্তি $=\frac{1}{2}mv^2$ erg

আমরা জানি, $H=\frac{W}{J}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{4.2\times10^7}$ cal ··· (i)

আবার, $H=ms\theta$ এখানে, $s=0.03$ এবং $\theta=150°C$

$\therefore\quad H=m\times0.03\times150$ cal ··· (ii)

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $\frac{mv^2}{2\times4.2\times10^7}=m\times0.03\times150$

$v^2=8.4\times0.03\times150\times10^7\ (cm/s)^2$ বা, $v=194.5$ m/s

উদাহরণ 9.7 একটি বরফখণ্ড স্থির অবস্থা হইতে 0°C উষ্ণতার হ্রদের জলে পড়িল এবং উহার শতকরা 0·5 ভাগ বরফ গলিয়া গেল। ন্যূনতম কত উচ্চতা হইতে বরফ পড়িল তাহা নির্ণয় কর। (বরফের গলনের লীন তাপ=80 cal/g)

[A piece of ice falls from rest into lake water at 0°C and 0·5 per cent of the ice melts. Find the minimum height from which the ice falls. (Latent heat of fusion of ice=80 cal/g)]

সমাধান ঃ মনে করি, বরফখণ্ডটির ভর $=m$ g

ধরা যাক্, বরফখণ্ডটি h cm উচ্চতা হইতে পড়িল। এই উচ্চতা হইতে নিচে পড়িলে বরফখণ্ডের উপর অভিকর্ষ বল-কর্তৃক কৃত কার্য

$$W=mgh\ \text{erg}$$

কাজেই, উৎপন্ন তাপ, $H=\frac{W}{J}=\frac{mgh}{4.2\times10^7}$ cal ··· (i)

যদি ধরিয়া লই যে, উৎপন্ন তাপের সবটুকুই বরফের গলনে ব্যয়িত হয় তাহা হইলে প্রশ্নের শর্তানুসারে লেখা যায়,

$$H=\frac{0\cdot5}{100}\times m\times80=0\cdot4\ m\ \text{cal} \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

কাজেই, (i) এবং (ii) হইতে পাই, $\frac{mgh}{4\cdot2\times10^7}=0\cdot4\ m$

বা, $h=\frac{0\cdot4\times4\cdot2\times10^7}{980}$ [$\because$ $g=980\ \text{cm/s}^2$]

$=171$ m (প্রায়)

উদাহরণ 9.8 2000 lb ভরবিশিষ্ট একটি গাড়ি 10 ft/s গতিবেগে চলিতেছে। ইহাকে স্থির অবস্থায় আনিতে গাড়ির ব্রেকে কত Btu একক তাপ উৎপন্ন হইবে ? ধরিয়া লও যে, তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক, J=778 ft-lb/Btu.

[An automobile weighing 2000 lb is travelling at 10 ft/s. How many Btu of heat are developed in brakes when it is brought to rest ? The mechanical equivalent of heat=778 ft-lb/Btu.]

সমাধান ঃ গাড়ির গতিশক্তি, $W=\frac{1}{2}mv^2$

$$=\frac{1}{2}\times2000\times(10)^2=10^5\ \text{ft-poundals}=\frac{10^5}{32}\ \text{ft-lb}$$

এই গতিশক্তি তাপে রূপান্তরিত হইলে উৎপন্ন তাপের পরিমাণ,

$$H=\frac{W}{J}=\frac{10^5}{32\times778}=4\ \text{Btu (প্রায়)}$$

উদাহরণ 9.9 কয়লার দহনের ফলে উৎপন্ন তাপের সবটুকুই উপযোগী কার্যে রূপান্তরিত হয় ধরিয়া লইলে, যে-বাষ্পীয় ইঞ্জিনে প্রতি ঘণ্টায় 25 lb কয়লা পোড়ে উহার অশ্ব-ক্ষমতা কত ? ধরিয়া লও যে, এক পাউণ্ড কয়লার দহনে 12500 Btu তাপ উৎপন্ন হয় এবং তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক 778 ft-lb/Btu।

[Assuming that all the heat available from burning of coal is converted into useful work, calculate the horse-power of a steam engine which burns 25 lb of coal per hour. 1 lb of coal produces 12500 Btu of heat ; J=778 ft-lb/Btu.]

সমাধান ঃ 25 পাউণ্ড কয়লার দহনের ফলে উৎপন্ন তাপ,

$$H=12500\times25\ \text{Btu}$$

এই তাপের তুল্য কার্য, $W=JH=778\times12500\times25$ ft-lb

ইহার ইঞ্জিন-কর্তৃক প্রতি ঘণ্টায় কৃত কার্য। কাজেই, প্রতি সেকেণ্ডে ইঞ্জিনটি যে কার্য করিবে তাহার পরিমাণ$=\frac{778\times12500\times25}{60\times60}$ ft-lb/s

অতএব, ইঞ্জিনটির অশ্ব-ক্ষমতা$=\frac{778\times12500\times25}{60\times60\times550}=122\cdot8$ H. P.

উদাহরণ 9.10 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 10 g বরফকে 100°C উষ্ণতাবিশিষ্ট জলে পরিণত করার জন্য প্রয়োজনীয় তাপ উৎপন্ন করিতে হইলে কী পরিমাণ কার্য করা দরকার ? (বরফের লীন তাপ=80 cal/g এবং তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক= 4·2 J/cal)

[How much work must be done to supply the heat necessary to convert 10 g of ice at 0°C into water at 100°C ? (Latent heat of fusion of ice=80 cal/g and mechanical equivalent of heat=4·2 J/cal)

সমাধান ঃ 0°C উষ্ণতার 10 g বরফকে গলাইয়া 0°C উষ্ণতার জলে পরিণত করিতে প্রয়োজনীয় তাপ $H_1 = m\ L = 10 \times 80 = 800$ cal

0°C উষ্ণতার 10 g জলকে 100°C উষ্ণতার জলে পরিণত করিতে প্রয়োজনীয় তাপ, $H_2 = 10 \times 1 \times 100 = 1000$ cal

কাজেই, 0°C উষ্ণতার 10 g বরফকে 100°C উষ্ণতার জলে পরিণত করিতে প্রয়োজনীয় মোট তাপ, $H = H_1 + H_2 = 800 + 1000 = 1800$ cal

কাজেই, প্রয়োজনীয় কার্য, $W = JH = 4{\cdot}2 \times 1800 = 7560$ J

উদাহরণ 9.11 100 H.P. ক্ষমতাসম্পন্ন একটি বাষ্পীয় ইঞ্জিনের চুল্লীতে প্রতি ঘণ্টায় 11000 Btu/lb ক্যালরীয় মূল্য (calorific value)-বিশিষ্ট কয়লা কী পরিমাণ জ্বালাইতে হইবে ? ধরিয়া লও যে, ইঞ্জিনের দক্ষতা 50%। তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক =778 ft-lb/Btu

[What mass of coal of calorific value 11000 Btu per pound must be burnt per hour in the furance of steam engine working at 100 H. P. ? Assume a 50% efficiency of the engine. J=778 ft-lb/Btu]

সমাধান ঃ যে-ইঞ্জিনের অশ্ব-ক্ষমতা 100 H.P., প্রতি ঘণ্টায় উহার দ্বারা কৃত কার্য$=100 \times 550 \times 60 \times 60$ ft-lb

ইঞ্জিনের কর্ম-দক্ষতা (efficiency) 50% বলিয়া প্রতি ঘণ্টায় ইঞ্জিনে সরবরাহিত শক্তি,

$$W = \frac{100 \times 550 \times 60 \times 60}{0{\cdot}50} \text{ ft-lb} = 200 \times 550 \times 3600 \text{ ft-lb}$$

এই যান্ত্রিক শক্তির তুল্য তাপ, $H = \frac{W}{J} = \frac{200 \times 550 \times 3600}{778}$ Btu ... (i)

মনে করি, প্রতি ঘণ্টায় m lb কয়লা জ্বালান হইতেছে। কয়লার ক্যালরীয় মূল্য (calorific value) 11000 Btu/lb বলিয়া m lb কয়লার দহনে উৎপন্ন তাপ

$$= m \times 11000 \text{ Btu} \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $m \times 11000 = \frac{200 \times 550 \times 3600}{778}$

বা, $m = 46{\cdot}27$ lb

উদাহরণ 9.12 এক গ্রাম কয়লার দহনের ফলে 800 ক্যালরি তাপ উৎপন্ন হয়। কোন ইঞ্জিনের সাহায্যে 5000 লিটার জলকে 10 m তুলিতে হইলে কতটা কয়লা জ্বালাইতে হইবে ? ধরিয়া লও যে, উৎপন্ন তাপের 10% উপযোগী কার্যে রূপান্তরিত হয়। ($J = 4{\cdot}2 \times 10^7$ erg/cal, $g = 980$ cm/s²)

[The combustion of a gram of coal produces 800 calories of heat. Find how much coal must be burnt to enable an engine to raise 5000 litres of water to a height of 10 metres, if only 10% of the

heat energy produced is converted into useful work by the engine. (The mechanical equivalent of heat$=4\cdot2\times10^7$ erg/cal and the acceleration due to gravity$=980$ cm/s^2)]

সমাধান ঃ 5000 লিটার জলের ভর, $m=5000\times10^3=5\times10^6$ g

এই জলকে 10 m বা, (10×100) cm তুলিতে কৃত কার্য $=mgh$

$$=5\times10^6\times980\times10\times100 \text{ erg}$$

এই কার্যের তুল্য তাপশক্তি$=\dfrac{mgh}{J}$

$$=\frac{5\times10^6\times980\times10^3}{4\cdot2\times10^7}\text{ cal}=\frac{35}{3}\times10^4\text{ cal}$$

$$=11\cdot67\times10^4\text{ cal}$$

শর্তানুসারে, কয়লার দহনের ফলে উৎপন্ন শক্তির শতকরা 10 ভাগ উপযোগী কার্যে রূপান্তরিত হয়। কাজেই, কয়লার দহনে উৎপন্ন তাপ,

$$H=\frac{11\cdot67\times10^4}{0\cdot1}=11\cdot67\times10^5\text{ cal} \quad \dots \quad \text{(i)}$$

মনে করি, এই তাপ উৎপন্ন করিবার জন্য m g কয়লা জ্বালাইতে হয়; কাজেই,

$$H=m\times800\text{ cal} \quad \dots \quad \text{(ii)}$$

কাজেই, (i) এবং (ii) হইতে পাই, $m\times800=11\cdot67\times10^5$ cal

$$m=\frac{11\cdot67\times10^5}{800}=1493\text{ g}$$

উদাহরণ 9.13 একটি গতিশীল বুলেট একটি লক্ষ্যবস্তুতে আঘাত করিয়া গলিয়া গেল। বুলেটের প্রাথমিক উষ্ণতা 50°C, উহার উপাদানের আপেক্ষিক তাপ 0·031, গলনাঙ্ক 335°C এবং গলনের লীন তাপ 5·37 ক্যালরি/গ্রাম। বুলেটের গতিবেগ কমপক্ষে কত ছিল? ধরিয়া লও যে, উৎপন্ন তাপের সবটুকুই বুলেটে থাকে।

[With what velocity must a bullet at a temperature of 50°C strike a target in order that the heat produced may just be sufficient to melt it? Assume all the heat produced remains in the bullet; Specific heat of lead$=0\cdot031$, melting point of lead$=335$°C and the latent heat of fusion of lead$=5\cdot37$ cal/g.]

সমাধান ঃ মনে করি বুলেটের প্রাথমিক গতিবেগ$=v$ cm/s

ভর m g হইলে ইহার গতিশক্তি$=\frac{1}{2}mv^2$ erg

বুলেটটির গলিয়া যাইবার জন্য ন্যূনতম যে-তাপ প্রয়োজন তাহার মান

$$H=ms(\theta_2-\theta_1)+mL$$

এখানে $s=$সীসার আপেক্ষিক তাপ$=0\cdot031$, $\theta_2=$সীসার গলনাঙ্ক$=335$°C

$\theta_1=50$°C, L লীন তাপ$=5\cdot37$ cal/g

কাজেই, $H=m\times0\cdot031\times(335-50)+m\times5\cdot37$

$$=m\times(5\cdot37+285+0\cdot031)\text{ cla}$$

বুলেটটিকে গলিয়া যাইতে হইলে উহার গতিশক্তির মান কম পক্ষে H-এর তুল্য হইতে হইবে।

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv^2 = JH$$

বা, $\frac{1}{2}mv^2 = 4\cdot2\times10^7\times m\ [\ 5\cdot37+285+0\cdot031\ ]$

$\therefore \quad v^2 = 8\cdot4\times10^7\times14\cdot205$ বা, $v = 34\cdot53\times10^3$ cm/s

উদাহরণ 9.14 একটি বাষ্পীয় ইঞ্জিনে 195 H. P. হারে শক্তি উৎপন্ন হয় এবং ইহার বয়লারে ঘন্টায় 400 lb কয়লা পোড়ে। যদি কয়লার ক্যালরীয় মূল্য 13500 Btu/lb হয় তাহা হইলে আলোচ্য প্রকল্পের দক্ষতা কত? (1 Btu=780 ft-lb, 1 H. P.=550 ft-lb/s।)

[A steam engine develops 195 H. P. and its boiler uses 400 lb of coal per hour. If the calorific value of the coal is 13500 Btu/lb, find the efficiency of the plant. [1 Btu=780 ft-lb, 1 H. P. =550 ft-lb/s]]

সমাধান ঃ প্রতি ঘন্টায় ইঞ্জিন-কর্তৃক কৃত কার্য

$$W = 195\times550\times60\times60 \text{ ft-lb}$$

এই শক্তির তুল্য তাপশক্তি, $H = \frac{W}{J} = \frac{195\times550\times60\times60}{780}$ Btu ··· (i)

কয়লার দহনের ফলে প্রতি ঘন্টায় সরবরাহিত তাপশক্তি $= 400\times13500$ Btu

$$\text{ইঞ্জিনের দক্ষতা } (\%) = \frac{\text{ইঞ্জিন-কর্তৃক কৃত কার্য}}{\text{সরবরাহিত শক্তি}}\times100$$

$$= \frac{195\times550\times60\times60}{780\times400\times13500}\times100 = 9\cdot17\%$$

উদাহরণ 9.15 156 H. P. ক্ষমতাসম্পন্ন একটি অন্তর্দহন ইঞ্জিন জ্বালানির দহনের ফলে উদ্ভূত শক্তিকে শতকরা 20% দক্ষতার সহিত রূপান্তরিত করিতে পারে। ইহাকে একটি উড়োজাহাজে স্থাপন করা হইল। উড়োজাহাজটি 150 miles/hr গড় দ্রুতিতে 400 miles অতিক্রম করিল। ইহাতে কী পরিমাণ জ্বালানি ব্যয়িত হইবে? (1 Btu=780 ft-lb, 1 গ্যালন পেট্রলের দহনে উৎপন্ন তাপশক্তি=132,000 Btu এবং 1 অশ্ব-ক্ষমতা=550 ft-lb/s)

[An internal-combustion engine of 156 H. P. is 20 per cent efficient in converting the energy available in the fuel. It is installed in an aeroplane flying 400 miles at an average speed of 150 miles per hour. What is the amount of fuel consumed? (1 Btu =780 ft-lb, 1 gallon of petrol yields 132,000 Btu, 1 horse-power =550 ft-lb/s]

সমাধান ঃ 150 mile/hr গড় গতিবেগে 400 mile যাইতে উড়োজাহাজটির সময় লাগে $t = \frac{400}{150} = \frac{8}{3}$ hours

অন্তর্দহন ইঞ্জিনের ক্ষমতা 156 H. P. বলিয়া $\frac{8}{3}$ ঘন্টায় ইহার দ্বারা কৃত কার্য,

$$W = 156\times550\times60\times60\times\frac{8}{3} \text{ ft-lb}$$

এই কার্যের তুল্য তাপশক্তি, $H=\frac{W}{J}=\frac{156\times550\times60\times60\times8}{3\times780}$ Btu

ইঞ্জিনের দক্ষতা 20% বলিয়া কয়লার দহনে উৎপন্ন তাপশক্তির পরিমাণ,

$$Q=\frac{H}{0\cdot20}\text{ Btu}=\frac{156\times550\times60\times60\times8}{3\times780\times0\cdot20}\text{ Btu} \qquad \text{(i)}$$

কাজেই, প্রয়োজনীয় পেট্রলের পরিমাণ x গ্যালন হইলে লেখা যায়,

$$Q=x\times132000\text{ Btu} \qquad \text{(ii)}$$

∴ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $x=\frac{156\times550\times60\times60\times8}{3\times780\times0\cdot20\times132000}=40$

কাজেই, আলোচ্য সময়ের মধ্যে যে-পরিমাণ পেট্রল জ্বলে তাহার আয়তন 40 গ্যালন।

উদাহরণ 9.16 8 lb ভরবিশিষ্ট একটি উল্কাপিণ্ড পৃথিবীর বায়ুমণ্ডলে প্রবেশ করিল এবং বায়ুর ঘর্ষণে ইহা মন্দীভূত হইল। ইহার দ্রুতি 500 ft/s হইতে 300 ft/s-এ নামিয়া আসিলে কী পরিমাণ তাপ উৎপন্ন হইবে? (J=780 ft-lb/Btu)

[A meteorite of mass 8 lb enters the earth's atmosphere and is slowed down by air resistance. How much heat is developed as its speed changes from 500 ft/s to 300 ft/s ? (J=780 ft-lb/Btu)]

সমাধান : উল্কাপিণ্ডটির গতিশক্তির পরিবর্তন,

$$W=\tfrac{1}{2}mu^2-\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m(u^2-v^2)$$

এখানে $m=8$ lb, $u=500$ ft/s এবং $v=300$ ft/s

$$\therefore\quad W=\tfrac{1}{2}\,8(500^2-300^2)=64\times10^4\text{ ft-poundal}$$

$$=\frac{64\times10^4}{32}\text{ ft-lb}=2\times10^4\text{ ft-lb}$$

এই শক্তির রূপান্তরের ফলে উৎপন্ন তাপশক্তি,

$$H=\frac{W}{J}=\frac{2\times10^4}{780}=25\cdot64\text{ Btu}$$

উদাহরণ 9.17 4 m/s গতিবেগে ধাবমান 3 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুর সহিত সমান ভরের অপর একটি স্থির বস্তুর সংঘাত ঘটিল। সংঘাতের পর বস্তুদ্বয় পরস্পরের সহিত যুক্ত হইয়া গেল। এই সংঘাত প্রক্রিয়ায় উৎপন্ন তাপের পরিমাণ নির্ণয় কর। (যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক=4·2 J/cal)

[A body of mass 3 kg moving with a velocity of 4 m/s strikes a stationary body of the same mass. After the collision the two bodies stick together. Find the total amount of heat evolved in collision. (The mechanical equivalent of heat=4·2 J/cal.)]

সমাধান : এখানে সংঘাতটি একটি অস্থিতিস্থাপক সংঘাত। সংঘাতের পর বস্তুদ্বয়ের সাধারণ গতিবেগ v m/s হইলে লেখা যায়,

$$(m_1+m_2)v=m_1v_1+m_2v_2$$

এখানে, $m_1=m_2=3$ kg, $v_1=4$ m/s, $v_2=0$ m/s

$$\therefore \quad (3+3)v=3\times4+3\times0=12$$

বা, $v=\frac{12}{6}=2$ m/s ... (i)

সংঘাতের পূর্বে প্রথম বস্তুর গতিশক্তি$=\frac{1}{2}\times m_1v_1^2$

$=\frac{1}{2}\times3\times(4)^2=24$ J ... (ii)

সংঘাতের পূর্বে দ্বিতীয় বস্তুর গতিশক্তি$=\frac{1}{2}m_2v_2^2=0$ ... (iii)

$\therefore$ সংঘাতের পূর্বে বস্তুদ্বয়ের গতিশক্তি, $E_1=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2=24$ J

বস্তুদ্বয়ের দ্বারা গঠিত যুগ্মভরের গতিশক্তি (অর্থাৎ, সংস্থার অন্তিম গতিশক্তি)

$$E_2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2=\frac{1}{2}(3+3)\times2^2$$
$$=\frac{1}{2}\times6\times4=12 \text{ J}$$

কাজেই, গতিশক্তির হ্রাস$=\triangle E=E_1-E_2=(24-12)=12$ J

কাজেই, উৎপন্ন তাপশক্তি $H=\frac{W}{J}$

J$=$তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক$=4{\cdot}2$ J/cal

$$\therefore \quad H=\frac{12}{4{\cdot}2}\text{ cal}=2{\cdot}38\text{ cal}$$

প্রশ্নমালা 9

1. 320 lb ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 100 ft উচ্চতা হইতে ভূমিতে পড়িল। ইহাতে বস্তুটিতে কী পরিমাণ তাপ উৎপন্ন হইবে? (তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক $=778$ ft-lb/Btu)

[A mass of 320 lb falls to the ground from a height of 100 ft. What will be the heat developed? (The mechanical equivalent of heat$=778$ ft-lb/Btu)] [41·12 Btu]

2. একটি জলপ্রপাতের উচ্চতা 50 m হইলে উহার উপরের এবং নীচের জলের উষ্ণতার পার্থক্য নির্ণয় কর। (তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক$=4{\cdot}2\times10^7$ erg/cal)

[If the height of a waterfall is 50 m, what is the difference in temperature of water at the top and at the bottom of the waterfall? (The mechanical equivalent of heat$=4{\cdot}2\times10^7$ erg/cal) [0·117°C (প্রায়)]

3. এক কিলোগ্রাম ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু এক কিলোমিটার উচ্চতা হইতে পড়িলে উহাতে কী পরিমাণ তাপ উৎপন্ন হইবে? ধরিয়া লও যে, 60 শতাংশ শক্তি তাপে রূপান্তরিত হইয়াছে। (তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক, $J=4{\cdot}18\times10^7$ erg/cal)

[A body of mass 1 kg falls from a height of 1 km to the ground. If 60% of the energy is converted into heat, find the amount of heat developed. (The mechanical of heat$=4{\cdot}18\times10^7$ erg/cal)] [1408·08 cal]

4. একটি সীসার বুলেট অনমনীয় কোন লক্ষ্যবস্তুতে আঘাত করিলে উহার

200°C উষ্ণতা-বৃদ্ধি হয়। যদি সংঘাতের ফলে উৎপন্ন তাপের সবটুকু সীসার গুলিতেই থাকে তাহা হইলে গুলির বেগ কত ? (সীসার আপেক্ষিক তাপ=0·03)

[On striking an unyielding target, the temperature of a lead bullet rises by 200°C. If the whole heat generated by the impact remains in the bullet, what is the velocity of the bullet ? (The specific heat of lead=0·03)] [224·5 m/s]

5. – 5°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 10 g বরফকে 100°C উষ্ণতাবিশিষ্ট বাষ্পে পরিণত করিতে প্রয়োজনীয় তাপ সরবরাহের জন্য কী পরিমাণ কার্য করিতে হইবে ?

[How much work is to be done in supplying the heat necessary to convert 10 g of ice at – 5°C into steam at 100°C ?]

[30·28 kJ (প্রায়)]

6. 100 m/s গতিবেগে ধাবমান একটি লোহার গোলককে হঠাৎ থামান হইল। যদি ইহার গতিশক্তির 50% তাপে রূপান্তরিত হয় তাহা হইলে লোহার বলটির অন্তিম উষ্ণতা কত হইবে ? ইহার প্রাথমিক উষ্ণতা 10°C।

[An iron sphere moving with a velocity of 100 m/s is suddenly stopped. If 50% of its kinetic energy is converted into heat, what will be the final temperature of the sphere, its initial temperature being 10°C.] [15·85°C (প্রায়)]

7. একটি বাষ্পীয় ইঞ্জিনে 390 H. P. হারে শক্তি উৎপন্ন হয় এবং ইহার বয়লারে ঘণ্টায় 500 lb কয়লা পোড়ে। যদি কয়লার ক্যালরীয় মূল্য 13500 Btu/lb হয় তাহা হইলে আলোচ্য প্রকল্পের দক্ষতা কত ? (1 Btu=780 ft-lb এবং 1 H. P.=550 ft-lb/s)

[A steam engine develops 390 H. P. and its boiler uses 500 lb of coal per hour. If the calorific value of the coal is 13500 Btu/lb ; find the efficiency of the plant. (1 Btu=780 ft-lb and 1 H. P. =550 ft-lb/s) [14·67%]

8. এক গ্রাম কয়লার দহনে 500 cal তাপ উৎপন্ন হয়। কোন ইঞ্জিনের সাহায্যে 1000 লিটার জলকে 50 m উচ্চতায় তুলিতে হইলে কতটা কয়লা জ্বালাইতে হইবে ? ধরিয়া লও যে, উৎপন্ন তাপের 16% উপযোগী কার্যে রূপান্তরিত হয়। (তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক=4·2 J/cal এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ=9·8 m/s^2)

[The combustion of a gram of coal produces 500 cal of heat. Find how much coal must be burnt to enable an engine to raise 1000 litres of water to a height of 50 m, if only 16% of the heat energy produced is converted into useful work by the engine. (The mechanical equivalent of heat=4·2 J/cal and the acceleration due to gravity=9·8 m/s^2)] [1·46 kg (প্রায়)]

9. কয়লার দহনের ফলে উৎপন্ন তাপের 50% উপযোগী কার্যে রূপান্তরিত হয় ধরিয়া লইলে, যে-বাষ্পীয় ইঞ্জিনে ঘণ্টায় 50 lb কয়লা পোড়ে উহার অশ্ব-ক্ষমতা কত ? ধরিয়া লও যে, 1 lb কয়লার দহনে 12500 Btu তাপ উৎপন্ন হয় এবং তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক 778 ft-lb/Btu।

[Assuming that 50% of the heat available from burning of coal is converted into useful work, calculate the horse-power of a steam engine which burns 50 lb of coal per hour. 1 lb of coal produces 12500 Btu of heat and the mechanical equivalent of heat=778 ft-lb/Btu.] [122·8 H. P.]

10. নায়েগ্রা জলপ্রপাতের জল 200 m উল্লম্ব উচ্চতা হইতে পড়ে। যদি নিচে পতিত জলের গতিশক্তির 80% উহাকে উত্তপ্ত করিতে ব্যয়িত হয় তাহা হইলে উপরের জল হইতে নিচের জলের উষ্ণতা কতটা বেশি হইবে? (J=4·2 J/cal)

[In the Niagara waterfall water falls through a vertical height of 200 m. If 80% of the kinetic energy of fall is used up at the bottom of the fall in heating the water, how much warmer is water at the bottom than the top of the fall? (J=4·2 J/cal)]

[0·374°C (প্রায়)]

11. একটি সীসার বুলেট 100 m/s গতিবেগে একটি স্থির কাঠের ব্লকে প্রবেশ করিয়া স্থির হইল। যদি উৎপন্ন তাপের 60% বুলেট-কর্তৃক শোষিত হয় তাহা হইলে ইহার উষ্ণতা-বৃদ্ধি কত হইবে? ($J=4{\cdot}2\times10^7$ erg/cal এবং সীসার আপেক্ষিক তাপ=0·032)।

[A lead bullet with a velocity of 100 m/s enters a fixed block of wood and is brought to rest. If 60% of the heat produced is absorbed by the bullet, what will be the rise of its temperature ?] ($J=4{\cdot}2\times10^7$ erg/cal and the specific heat of lead=0·032)

[22·32°C]

12. 1000 kg ভরবিশিষ্ট একটি উল্কাপিণ্ড 50 km/s বেগে পৃথিবীতে পড়িল এবং তৎক্ষণাৎ স্থির অবস্থায় আসিল। ইহার গতিশক্তি সম্পূর্ণভাবে তাপে রূপান্তরিত হইল ধরিয়া উৎপন্ন তাপের পরিমাণ নির্ণয় কর। (J=4·2 J/cal)

[A meteorite of mass 1000 kg falls on the earth with a velocity of 50 km/s and is instantaneously brought to rest. If all its kinetic energy is converted into heat, find the amount of heat produced.] (J=4·2 J/cal) [$29{\cdot}75\times10^7$ kcal]

13. 100 g জলসমবিশিষ্ট একটি পাত্রে 4·8 kg ভরের এবং 0·5 আপেক্ষিক তাপবিশিষ্ট একটি তরল আছে। এই তরলকে মোটর-চালিত প্যাডেলের সাহায্যে আলোড়িত করা হইতেছে। মোটরটির কার্যকর অশ্ব-ক্ষমতা 0·1। যদি প্যাডেলের ঘূর্ণনে ব্যয়িত শক্তি সম্পূর্ণভাবে তাপে রূপান্তরিত হয় তাহা হইলে প্রতি মিনিটে তরলের উষ্ণতা-বৃদ্ধির হার কত হইবে? (ধরিয়া লও যে, 1 H. P.=750 W এবং J=4·2 J/cal)।

[A liquid of mass 4·8 kg and specific heat 0·5 contained in a vessel of water equivalent 100 g is stirred by paddles driven by a motor of effective H. P. 0·1. At what rate will the temperature of the liquid rise, if the energy of rotation of the paddles is wholly

converted into heat? Assume that, 1 H. P.=750 W and J=4·2 J/cal.] [0·429°C/min]

14. 500 g ভরবিশিষ্ট একটি অ্যালুমিনিয়াম পাত্রে 750 g জল এবং 100 g বরফ তাপীয় সাম্যে আছে। পাত্রটিকে একটি বিমান হইতে ভূমিতে ফেলা হইল। ভূমিতে নামিয়া আসিবার পর দেখা গেল যে, পাত্র ও উহার মধ্যবর্তী তরলের উষ্ণতা 25°C। যদি ধরিয়া লওয়া যায় যে, সংঘাতের ফলে ভূমিতে কোন শক্তি সঞ্চালিত হইতেছে না, তাহা হইলে ভূমি স্পর্শ করিবার পূর্বে পাত্রটির গতিবেগ কত ছিল? (অ্যালুমিনিয়ামের আপেক্ষিক তাপ=0·22 এবং J=4·2 J/cal)

[An aluminium vessel of mass 500 g contains 750 g of water and 100 g of ice in thermal equilibrium. The vessel is dropped from an aircraft to the ground. The temperature of the vessel and its contents is found to be 25°C after landing. Assuming that no energy is imparted to the ground in the impact, what was the velocity of the vessel just before it struck the ground? (The specific heat of aluminium=0·22 and J=4·2 J/cal)] [446·2 m/s]

15. একটি বাষ্পীয় ইঞ্জিন 70 H.P. ক্ষমতা উৎপন্ন করে। ইহা ঘণ্টায় 100 lb জ্বালানি ব্যবহার করে। যদি জ্বালানির ক্যালরীয় মূল্য 14000 Btu/lb হয় তাহা হইলে ইঞ্জিনের ক্ষমতা নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, 1 Btu=780 ft-lb।

[A steam engine develops a power of 70 H. P. It uses 100 lb of fuel per hour. If the calorific value of the fuel is 14000 Btu/lb, calculate the efficiency of the engine. Assume that I Btu= 780 ft-lb.] [12·7% (প্রায়)]

16. যদি জ্বালানির শক্তির $\frac{1}{5}$ অংশ ব্যবহারযোগ্য কার্যে রূপান্তরিত হয় তবে 4 অশ্ব-ক্ষমতাসম্পন্ন একটি মোটর-সাইকেল এক গ্যালন পেট্রলের সাহায্যে কতক্ষণ চালু থাকিবে? এক গ্যালন পেট্রল জ্বলিয়া 120,000 Btu তাপ দেয়। (তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক=770 ft-lb/Btu)।

[For how long will a motor-cycle working at 4 horse-power be able to run on one gallon of petrol, if $\frac{1}{5}$ of the energy of the fuel is converted into useful work? A gallon of petrol in burning yields 120,000 Btu. (The mechanical equivalent of heat=770 ft-lb/Btu)]
(Cambridge School Certificate) [2 ঘণ্টা 20 মিনিট]

17. 30 g ভরবিশিষ্ট একটি বুলেট এমন বেগে চলিতেছে যে, যখন ইহা একটি স্থির লক্ষ্যবস্তুতে আঘাত করে তখন ইহা ঠিক সম্পূর্ণভাবে গলিয়া যায়। সংঘাতের ফলে উৎপন্ন তাপের সমস্তটাই বুলেটে থাকিয়া যায় এইরূপ ধরিয়া (i) সংঘাতের ফলে উৎপন্ন তাপ এবং (ii) সংঘাতের পূর্বে বুলেটের বেগ নির্ণয় কর। ধরা যায় যে, সংঘাতের পূর্বে বুলেটের উষ্ণতা 27°C। ইহার উপাদানের গলনাঙ্ক 327°C, আপেক্ষিক তাপ 0·03 cal $g^{-1}°C^{-1}$ এবং গলনের লীন তাপ 5 cal/g। তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক=$4·2\times10^{7}$ erg/cal।

[A bullet of mass 30 g is travelling with such a velocity that it just melts completely when it strikes a fixed target. Assuming

that all the heat produced by collision remains in the bullet, calculate (i) the heat produced by the impact and (ii) the velocity of the bullet just before the impact. It may be assumed that the temperature of the bullet before impact is 27°C, the melting point of the material of the bullet is 327°C, its specific heat is 0·03 cal g^{-1}°C^{-1} and its latent heat is 5 cal/g. The mechanical equivalent of heat$=4{\cdot}2\times10^7$ erg/cal.]

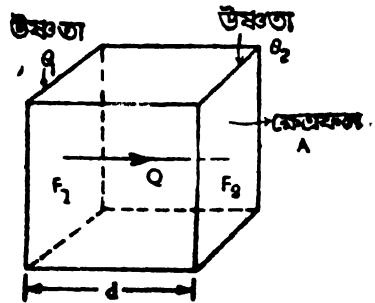
(Cambridge School Certificate) [420 cal, 340 m/s)

দশম পরিচ্ছেদ

তাপ-সঞ্চালন

10.1 পদার্থের তাপ-পরিবাহিতা : কোন পদার্থের মধ্য দিয়া কী পরিমাণ তাপ এক স্থান হইতে অন্য স্থানে পরিবাহিত হইবে তাহা নিম্নের কয়েকটি বিষয়ের দ্বারা নির্ধারিত হয়।

(i) দুই স্থানের উষ্ণতার পার্থক্য, (ii) উহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব, (iii) যে-তলের মধ্য দিয়া তাপ পরিবাহিত হইবে উহার ক্ষেত্রফল, (iv) যে-সময় ধরিয়া তাপ পরিবাহিত হইবে সেই সময়।

এইবার একটি আয়তাকার বস্তুর মধ্য দিয়া তাপের পরিবহণ বিবেচনা করা যাক্ (চিত্র 10.1)। ধরা যাক্, ইহার F_1 পৃষ্ঠের উষ্ণতা θ_1 এবং উহার বিপরীত পৃষ্ঠ F_2-এর উষ্ণতা θ_2। এই দুই পৃষ্ঠের মধ্যবর্তী দূরত্ব d। এখন যদি $\theta_1>\theta_2$ হয়, তাহা হইলে F_1-পৃষ্ঠ হইতে F_2 পৃষ্ঠের দিকে তাপ প্রবাহিত হইবে। পরীক্ষার সাহায্যে দেখান যায় যে, কোন নির্দিষ্ট সময়ে যে-পরিমাণ তাপ F_1-পৃষ্ঠ হইতে F_2-পৃষ্ঠে পরিবাহিত হইবে তাহার মান (i) দুই পৃষ্ঠের উষ্ণতার পার্থক্য $(\theta_1-\theta_2)$-এর সমানুপাতিক, (ii) উভয় পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল A-এর সমানুপাতিক, (iii) সময় t-এর সমানুপাতিক এবং (iv) দূরত্ব d-এর ব্যস্তানুপাতিক।

চিত্র 10.1

অর্থাৎ, পরিবাহিত তাপ, $Q \propto (\theta_1-\theta_2)$

$$\propto A$$

$$\propto t$$

$$\propto \frac{1}{d}$$

কাজেই লেখা যায়, $\theta \propto \dfrac{A(\theta_1-\theta_2)t}{d}$

$$\text{বা,}\quad Q=\frac{KA(\theta_1-\theta_2)t}{d} \quad \cdots \quad (10.1)$$

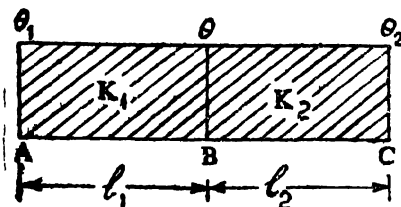
এখানে K একটি ধ্রুবক। ইহাকে আলোচ্য পদার্থের **তাপ পরিবহণ গুণাঙ্ক** (coefficient of thermal conductivity) বা তাপ-পরিবাহিতা (thermal conductivity) বলা হয়।

K-এর একক হইল cal cm^{-1} s^{-1} $°C^{-1}$

10.2 তাপমাত্রিক পরিবাহিতা (thermometric conductivity) বা, তাপীয় ব্যাপকতা (thermal diffusity) : কোন পদার্থের তাপ-পরিবাহিতা ও উহার একক আয়তনের তাপগ্রাহিতার অনুপাতকে ঐ পদার্থের তাপমাত্রিক পরিবাহিতা বা তাপীয় ব্যাপনতা বলা হয়। অর্থাৎ,

$$\text{তাপমাত্রিক পরিবাহিতা,}\quad h=\frac{K}{\rho s}=\frac{\text{তাপ-পরিবাহিতা}}{\text{ঘনত্ব}\times\text{আপেক্ষিক তাপ}}$$

$$=\frac{\text{তাপ-পরিবাহিতা}}{\text{একক আয়তনের তাপগ্রাহিতা}} \quad \cdots \quad (10.2)$$

10.3 যুগ্ম-পাতের তুল্য পরিবাহিতা : মনে করি, AB এবং BC দুইটি আয়তাকার পাত। উহাদের ক্ষেত্রফল A এবং দৈর্ঘ্য যথাক্রমে l_1 এবং l_2। AB এবং CD পাতের উপাদানের পরিবাহিতা যথাক্রমে K_1 এবং K_2। এই দুই পাত পরস্পর যুগ্ম অবস্থায় আছে (চিত্র 10.2)।

চিত্র 10.2

এই যুক্ত-পাতের তুল্য তাপ-পরিবাহিতা,

$$K=\frac{l_1+l_2}{\frac{l_1}{K_1}+\frac{l_2}{K_2}} \quad \cdots \quad (10.3)$$

এবং এই পাত দুইটির বিভেদতলের উষ্ণতা,

$$\theta=\frac{\frac{K_1\theta_1}{l_1}+\frac{K_2\theta_2}{l_2}}{\frac{K_1}{l_2}+\frac{K_2}{l_-}} \quad \cdots \quad (10.4)$$

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 10.1 একটি ঘরের কাচের জানালাগুলির মোট ক্ষেত্রফল 10 m^2 এবং কাচের বেধ 4 mm। কাচের জানালার ভিতরের তলের উষ্ণতা 20°C এবং বাহিরের তলের উষ্ণতা −5°C হইলে জানালা দিয়া প্রতি মিনিটে পরিবহণের সাহায্যে কী পরিমাণ তাপ ঘর হইতে বাহির হইয়া যাইবে? (কাচের তাপ-পরিবাহিতা = 0·002 c.g.s. একক)।

[The glass windows of a room have a total area of 10 m^2 and

the glass is of 4 mm thick. Find the rate at which heat escapes the room per minute, by conduction, if the temperature of the inside surface of the window is 20°C and that of the outer surfaces is -5°C. (Thermal conductivity of glass=0·002 c.g.s. units.)]

সমাধান ঃ আমরা জানি, $Q=\frac{KA(\theta_1-\theta_2)t}{d}$

$A=10\ m^2=10\times100^2\ cm^2$, $K=0{\cdot}002\ cal\ cm^{-1}\ s^{-1}\ {}^{\circ}C^{-1}$

$d=4\ mm=0{\cdot}4\ cm$, $t=1\ minute=60\ s$

কাজেই, জানালার মধ্য দিয়া প্রতি মিনিটে পরিবাহিত তাপ

$$Q=\frac{0{\cdot}002\times10\times100^2\times\{20-(-5)\}\times60}{0{\cdot}4}\ cal$$

$$=\frac{0{\cdot}002\times10^5\times25\times60}{0{\cdot}4}=7{\cdot}5\times10^2\ cal=750\ cal$$

উদাহরণ 10.2 এক ব্যক্তি 2 mm পুরু কাপড়ের সাহায্যে নিজেকে আচ্ছাদিত করিয়াছে। যদি বাহিরের উষ্ণতা 20°C হয় তবে ঐ ব্যক্তির শরীরের প্রতি বর্গমিটার হইতে প্রতি ঘন্টায় কী পরিমাণ তাপ বাহির হইবে? ধরিয়া লও যে, কাপড়ের পরিবাহিতা$=10^{-5}$ সি. জি. এস. সেন্টিগ্রেড একক এবং মানবদেহের উষ্ণতা=98·6°F।

[A man wraps himself in a cloth 2 mm thick. How much heat will be lost per hour per sq. metre of the surface of the body if the outside temperature is 20°C ? Conductivity of the cloth$=10^{-5}$ c.g.s. centrigrade units and the temperature of the human body=98·6°F.]

সমাধান ঃ আমরা জানি, পরিবাহিত তাপ, Q

$$=\frac{KA(\theta_1-\theta_2)}{d}\cdot t$$

এখানে, $K=10^{-5}$ c.g.s. centigrade unit

$A=1\ m^2=100^2\ cm^2$, $d=2\ mm=0{\cdot}2\ cm$, $\theta_2=20^{\circ}C$

$\theta_1=98{\cdot}6^{\circ}F$, $t=1\ hr=60\times60\ s$

এখন $\frac{C}{5}=\frac{F-32}{9}$ এই সমীকরণ হইতে লেখা যায়,

$$\frac{C}{5}=\frac{98{\cdot}6-32}{9}=\frac{66{\cdot}6}{9}$$

$$C=37^{\circ}C$$

অর্থাৎ, $\theta_1=98{\cdot}6^{\circ}F=37^{\circ}C$

$$\therefore\quad Q=\frac{10^{-5}\times100^2\times(37-20)\quad60\times60}{0{\cdot}2}=\frac{10^{-1}\times17\times60\times60}{0{\cdot}2}$$

$$=17\times30\times60=30600\ cal$$

উদাহরণ 10·3 20 cm বাহুবিশিষ্ট একটি ঘনকাকার পাত্রকে 0°C উষ্ণতায়

বরফ দ্বারা পূর্ণ করিয়া পাত্রটিকে 100°C উষ্ণতার ফুটন্ত জলে ডুবান হইল। পাত্রের সম্পূর্ণ বরফ গলিয়া যাইতে কত সময় লাগিবে নির্ণয় কর। পাত্রের দেওয়ালের বেধ 0·25 cm, উহার উপাদানের তাপ-পরিবাহিতা 0·02 c.g.s. unit ; বরফের ঘনত্ব = 0·9 g/cm³ এবং বরফের লীন তাপ = 80 cal/g।

[A cubical vessel of 20 cm side is filled with ice at 0°C and is immersed in boiling water at 100°C. Find the time in which all the ice will melt. Thickness of the wall of the vessel = 0·25 cm, the coefficient of thermal conductivity of the material of the vessel is 0·02 c. g. s. units, density of ice = 0·9 g/cm³ and latent heat = 80 cal/g.]

সমাধান : ঘনকের ছয়টি তল দিয়াই উহাতে তাপ প্রবেশ করে।

ঘনকটির প্রতিটি তলের ক্ষেত্রফল $= 6\times 20\times 20$ cm² $= 6\times 400$ cm²

ঘনকটিতে বরফের আয়তন $= 20\times 20\times 20 = 8\times 10^3$ cm³

বরফের ভর $= 8\times 10^3\times 0{\cdot}9$ g $= 7200$ g

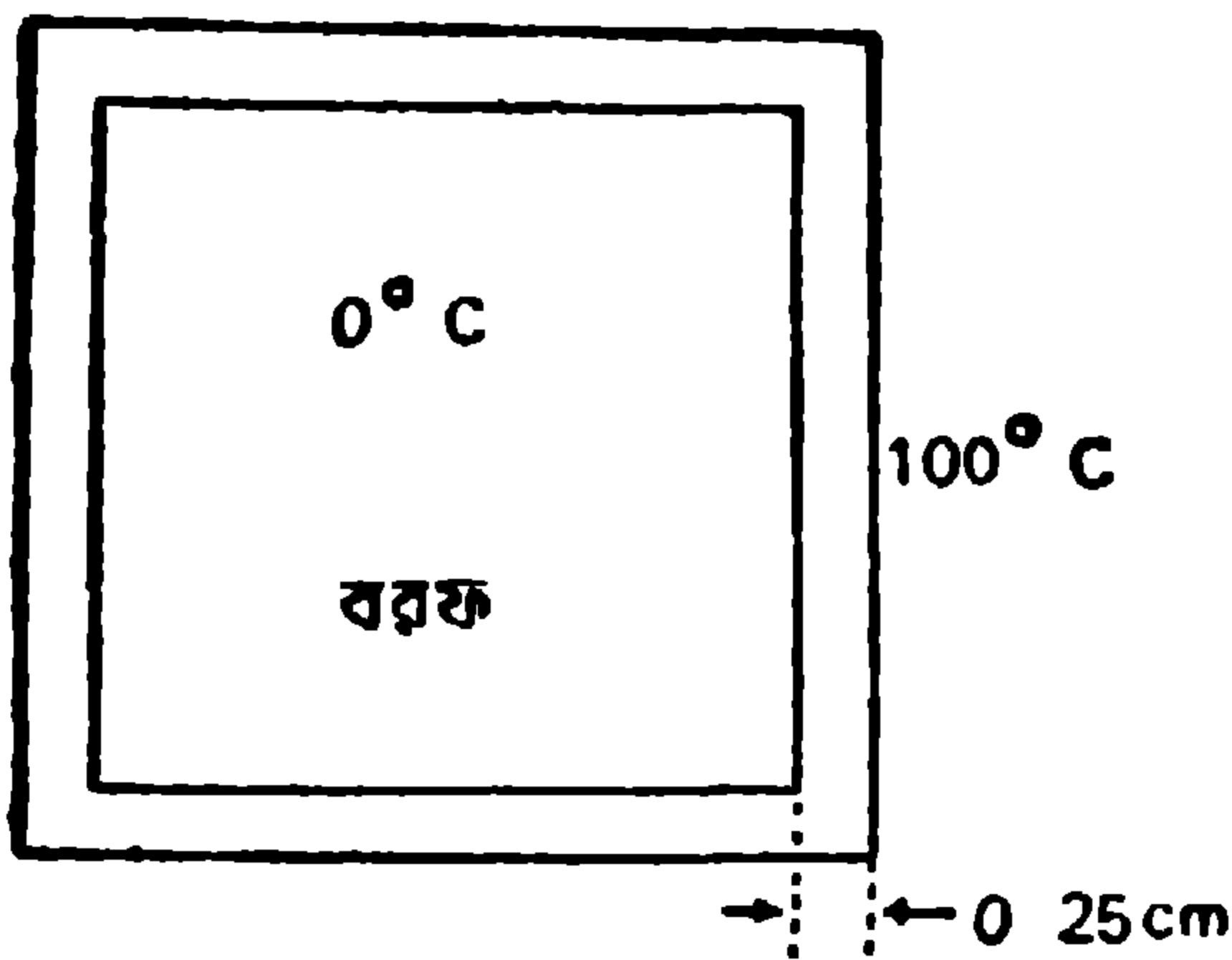
চিত্র 10.3

900 g বরফের জন্য প্রয়োজনীয় তাপ

$= 7200\times 80$ cal

যদি সমস্ত বরফ গলিতে মোট t সময় লাগে তাহা হইলে লেখা যায়,

$$7200\times 80 = \frac{(0{\cdot}02)\times(6\times 400)\times(100)\times t}{0{\cdot}25}$$

$$\therefore\ t = \frac{7200\times 80\times 0{\cdot}25}{0{\cdot}02\times(6\times 400)\times 100} = 30\text{ s}$$

উদাহরণ 10.4 একটি স্টোভের উপর স্থাপিত সমতল তলদেশবিশিষ্ট কেটলিতে জল ফুটান হইতেছে। কেটলির তলদেশের ক্ষেত্রফল 300 cm² এবং বেধ 2 mm। যদি প্রতি মিনিটে 1 g করিয়া বাষ্প উৎপন্ন হয় তাহা হইলে কেটলির তলদেশের বাহিরের এবং ভিতরের উষ্ণতার প্রভেদ নির্ণয় কর। (কেটলির উপাদানের তাপ-পরিবাহিতা $= 0{\cdot}5$ cal cm⁻¹ s⁻¹ °C⁻¹ এবং জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ $= 540$ cal/g)

[Water is being boiled in a flat bottomed kettle placed on a stove. The area of the bottom is 300 cm² and the thickness is 2 mm. If the amount of steam produced is 1 g per minute, calculate the difference of temperature between the inner and the outer surface of the bottom. (The thermal conductivity of the material of the kettle $= 0{\cdot}5$ cal cm^{-1} s^{-1} °C^{-1} and the latent heat of steam $= 540$ cal/g).]

সমাধান : 1 g বাষ্প উৎপন্ন করিবার জন্য প্রয়োজনীয় তাপ

$= m\times L = 1\times 540$ cal

কাজেই, প্রতি মিনিটে কেটলির তলদেশের মধ্য দিয়া 540 cal তাপ পরিবাহিত হইয়া জলে প্রবেশ করে।

আমরা জানি যে, পরিবাহিত তাপ,

$$Q=\frac{KA\times \text{উষ্ণতার পার্থক্য } (\theta)\times t}{d}$$

এখানে, $K=0{\cdot}5$ cal cm^{-1}s^{-1}°C^{-1} ; $A=300$ cm^2 ; $t=60$ s

এবং $d=2$ mm$=0{\cdot}2$ cm

$$\therefore\ Q=\frac{0{\cdot}5\times 300\times\theta\times 60}{0{\cdot}2}\ \text{cal}$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $Q=540$ cal

$$\therefore\ \frac{0{\cdot}5\times 300\times\theta\times 60}{0{\cdot}2}=540\ \text{বা,}\ \theta=\frac{540\times 0{\cdot}2}{0{\cdot}5\times 300\times 60}=0{\cdot}012°C$$

উদাহরণ 10.5 3600 cm^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এবং 10 cm বেধবিশিষ্ট একটি পাথরের ফলকের নিম্নপৃষ্ঠটিকে 100°C উষ্ণতার বাষ্পের সংস্পর্শে রাখা হইল। ফলকটির উপরের পৃষ্ঠে 0°C উষ্ণতাবিশিষ্ট একটি বরফের ব্লক রহিয়াছে। এক ঘন্টায় 4800 g বরফ গলিল। পাথরের তাপ-পরিবাহিতা নির্ণয় কর। (বরফের লীন তাপ=80 cal/g)

[A slab of stone of area 3600 cm^2 and thickness 10 cm is exposed on the lower surface to the steam at 100°C. A block of ice at 0°C rests on the upper surface of the slab. In one hour 4800 g of ice is melted. Calculate the thermal conductivity of the stone. (Latent heat of ice=80 cal/g)] (I. I. T. Adm. Test, 1972)

সমাধান : মনে করি, পাথরের তাপ-পরিবাহিতা=K

প্রতি ঘন্টায় পাথরের ফলকটির মধ্য দিয়া পরিবাহিত তাপ, Q

$$=\frac{KA(\theta_1-\theta_2)t}{d}$$

এখানে, $A=3600$ cm^2

$(\theta_1-\theta_2)=100-0=100°C$, $t=60\times 60=3600$ s, $d=10$ cm

$$\therefore\ Q=K\times 3600\times \tfrac{100}{10}\times 3600 \qquad \ldots \qquad (i)$$

এই তাপই 4800 g বরফকে গলাইয়া জলে পরিণত করে। কাজেই

$$Q=4800\times 80\ \text{cal} \qquad \ldots \qquad (ii)$$

(i) এবং (ii) হইতে $K\times 3600\times 10\times 3600=4800\times 80$

বা, $K=0{\cdot}003$ cal cm^{-1}s^{-1} °C^{-1}

উদাহরণ 10.6 একটি দণ্ডের সাহায্যে একটি বাষ্প-কক্ষের সহিত একটি বরফের ব্লক যুক্ত আছে। দণ্ডটির প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল 2 cm^2 এবং দৈর্ঘ্য 10 cm হইলে প্রতি মিনিটে কতটা বরফ গলিবে ? দণ্ডটির উপাদানের তাপ-পরিবাহিতা 0·25 সি. জি. এস. একক।

[A steam-chamber is connected with a block of ice by means of a rod. If the area of cross-section of the rod is 2 cm^2 and its

length is 10 cm, what will be the amount of ice melted per minute? The thermal conductivity of the material of the rod is 0·25 c. g. s. unit.] **(সংসদের নমুনা প্রশ্ন, 1979)**

সমাধান: আমরা জানি যে, পরিবাহিত তাপ, $Q=\frac{K A(\theta_1-\theta_2) t}{d}$

এখানে, $K=0{\cdot}25$ c.g s. unit, $A=2\ cm^2$, $d=10$ cm,

$\theta_1=100°C$; $\theta_2=0°C$ এবং $t=60$ s

∴ বাষ্পকক্ষ হইতে প্রতি মিনিটে যে-পরিমাণ তাপ-পরিবাহিত হইয়া বরফের ব্লকে আসে উহার মান

$$Q=\frac{0{\cdot}25\times2\times(100-0)\times60}{10}\ cal=300\ cal$$

1 g বরফ গলিতে 80 cal তাপ প্রয়োজন। কাজেই, প্রতি মিনিটে যে-পরিমাণ বরফ গলে উহার ভর, $m=\frac{300}{80}=3{\cdot}75$ g

উদাহরণ 10.7 একটি তামার দণ্ডের এক প্রান্তের উষ্ণতা 0°C এবং অন্য প্রান্তের উষ্ণতা 100°C। দণ্ডটি 50 cm দীর্ঘ এবং ইহার প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল 4·0 cm^2। ওয়াট এককে দণ্ডের তাপ-প্রবাহের মান নির্ণয় কর। তামার তাপ-পরিবহণ গুণাঙ্ক$=0{\cdot}90$ cal $cm^{-1}s^{-1}\ °C^{-1}$ এবং তাপের তুল্যাঙ্ক$=4{\cdot}2$ J/cal ধরিয়া লও।

[One end of a copper rod is kept at 0°C and the other end at 100°C. The rod is 50 cm long and has cross-sectional area of 4·0 cm^2. Calculate the heat current in the rod in watts. The co-efficient of thermal conductivity of copper$=0{\cdot}90$ cal $cm^{-1}\ s^{-1}\ C^{-1}$ and the mechanical equivalent of heat$=4{\cdot}2$ J/cal.]

সমাধান: প্রতি সেকেণ্ডে পরিবাহিত তাপ বা তাপ-প্রবাহ

$$=\frac{Q}{t}=\frac{KA(\theta_1-\theta_2)}{d}$$

এখানে, $K=0{\cdot}90$ cal $cm^{-1}\ s^{-1}\ °C^{-1}$,

$A=4{\cdot}0\ cm^2$, $Q=100°C$, $\theta_2=0°C$ এবং $d=50$ cm

কাজেই, $\frac{Q}{t}=\frac{0{\cdot}9\times4{\cdot}0\times100}{50}=7{\cdot}2$ cal/s

কিন্তু, 1 cal$=4{\cdot}2$ J

∴ তাপ-প্রবাহ, $\frac{Q}{t}=7{\cdot}2\times4{\cdot}2$ J/s$=30{\cdot}24$ W

উদাহরণ 10.8 একটি ঘরের মাপ 7 m × 5 m × 3 m। ইহার ইটের দেওয়ালের বেধ 20 cm এবং জানালার বেধ 0·5 cm ও ক্ষেত্রফল 5 m^2। ঘরের উষ্ণতা বাহিরের উষ্ণতা অপেক্ষা 20°C বেশি। ঘরের দেওয়াল এবং জানালার মধ্য দিয়া প্রতি মিনিটে কী পরিমাণ তাপ বাহির হইয়া যাইবে তাহার আসন্ন মান

নির্ণয় কর। ইট ও কাচের তাপ পরিবাহিতা যথাক্রমে 12×10^{-4} এবং 17×10^{-4} সি. জি. এস. একক।

[A room is 7 m by 5 m by 3 m and the walls are of brick 20 cm thick and have windows made of glass 0·5 cm thick and of total area 5 m^2. The temperature of the room is 20°C higher than outside. Calculate approximately the quantity of heat that is passing out per minute through the walls and windows of the room. Thermal conductivities of brick and glass are 12×10^{-4} c.g.s. unit and 17×10^{-4} c.g.s. unit respectively.] (Jt. Entrance, 1978)

সমাধান : জানালাসহ ঘরের দেওয়ালগুলির ক্ষেত্রফল,

$$=2\,[7\times3+3\times5]=72\ m^2$$

প্রশ্নানুসারে, জানালার ক্ষেত্রফল $=5\ m^2$

কাজেই, দেওয়ালের ইট-নির্মিত অংশের ক্ষেত্রফল

$$=(72-5)=67\ m^2=67\times10^4\ cm^2$$

ইটের দেওয়ালের মধ্য দিয়া পরিবাহিত তাপের পরিমাণ

$$Q_1=\frac{K_1A_1\,(\theta_2-\theta_1)\,t}{d_1}$$

এখানে $K_1=12\times10^{-4}$ c. g. s. unit, $A_1=67\times10^4\ cm^2$

$(\theta_2-\theta_1)=20^\circ C$, $t=1$ মিনিট $=60$ s

$$\therefore\quad Q_1=\frac{12\times10^{-4}\times67\times10^4\times20\times60}{20}=4{\cdot}8\times10^4\ cal\quad(\text{প্রায়})$$

কাচের জানালার মধ্য দিয়া পরিবাহিত তাপ, $Q_2=\dfrac{K_2A_2\,(\theta_2-\theta_1)\,t}{d_2}$

$$=\frac{17\times10^{-4}\times5\times10^4\times20\times60}{0{\cdot}5}=204\times10^4\ cal$$

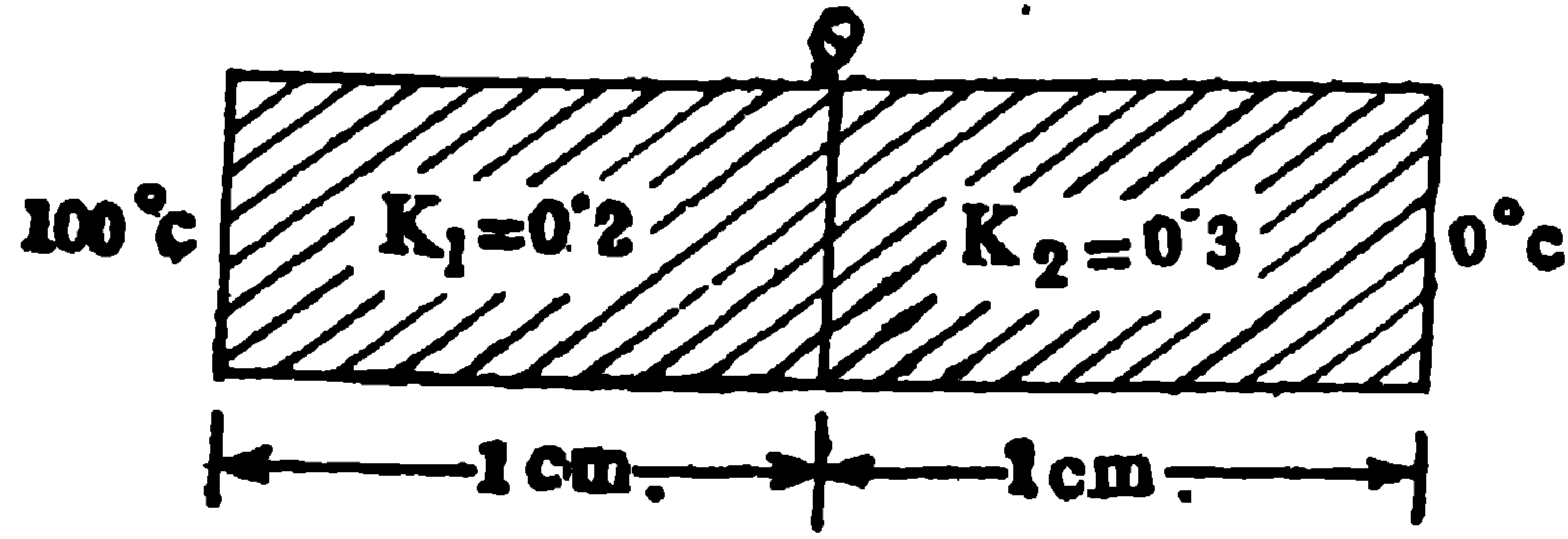
$\therefore$ ইটের দেওয়াল ও কাচের জানালার মধ্য দিয়া পরিবাহিত মোট তাপ

$$=Q_1+Q_2$$

$$=(20{\cdot}4+4{\cdot}8)\times10^4=25{\cdot}2\times10^4\ cal\quad(\text{প্রায়})$$

উদাহরণ 10.9 0·2 এবং 0·3 সি. জি. এস. একক তাপ-পরিবাহিতাবিশিষ্ট দুইটি পদার্থের দুইটি স্তর দ্বারা গঠিত একটি পাতের মধ্য দিয়া তাপ-পরিবাহিত হইতেছে। প্রতিটি স্তরের বেধ 1 cm। যদি পাতটির দুই প্রান্তের উষ্ণতা 100°C এবং 0°C হয় তবে স্থির অবস্থায় দুই স্তরের বিভেদ-তলের উষ্ণতা কত ?

[A composite plate is made of two layers made of materials having thermal conductivities 0·2 and 0·3 c.g.s. units respectively. The thickness of each layer is 1 cm. If the temperature of the two ends of the plate be 100°C and 0°C at steady state, what is the temperature of the surface of separation between the two layers ?]

সমাধান ঃ মনে করি, বিভেদ-তলের উষ্ণতা $=\theta$°C (চিত্র 10.4)
এবং উভয় স্তরের ক্ষেত্রফল $=A$

চিত্র 10.4

স্থির অবস্থায়, $\frac{K_1A\,(100-\theta)}{1}=\frac{K_2A\,(\theta-0)}{1}$

বা, $0·2(100-\theta)=0·3\theta$ বা, $0·5\theta=20$ বা, $\theta=40$°C

উদাহরণ 10.10 একটি বাষ্প প্রকোষ্ঠের ঢাকনাটি 60 cm দৈর্ঘ্য, 5 cm প্রস্থ এবং 1 cm বেধবিশিষ্ট একটি পাথরের ফলকের তৈয়ারী। এই ফলকটির উপর বরফ রাখা হইল। ইহাতে আধ ঘন্টায় 5 kg বরফ গলিয়া যাইতে দেখা গেল। যদি বায়ুমণ্ডলের সহিত বরফের কোন তাপ-বিনিময় না হয় তাহা হইলে পাথরের তাপ-পরিবাহিতা নির্ণয় কর।

[The top of a steam chamber is formed of a slab 60 cm long, 5 cm broad and 1 cm thick. Ice is placed upon the slab and it is found that 5 kg of ice is melted in half an hour. Assuming that there is no loss or gain of heat from the ice slab to or from the atmosphere, calculate the thermal conductivity of the stone.]

সমাধান ঃ এখানে, পাথরের ঢাকনার মধ্য দিয়া বাষ্প-প্রকোষ্ঠ হইতে তাপ সঞ্চালনের ফলে বরফ গলিতেছে।

পাথরের ঢাকনার ক্ষেত্রফল, $A=60\times5=300$ cm²

ঢাকনার বেধ, $d=1$ cm

ঢাকনার দুই পৃষ্ঠের উষ্ণতার ব্যবধান, $(\theta_1-\theta_2)=100$°C

আধ ঘন্টায় বা 30×60 s সময়ে ঢাকনার মধ্য দিয়া পরিবাহিত তাপ,

$$Q=\frac{K\,A\,(\theta_1-\theta_2)\,t}{d}=\frac{K\times300\times100\times30\times60}{1}\text{ cal} \quad \cdots \quad (i)$$

এখানে K হইল পাথরের তাপ-পরিবাহিতা।

এই তাপ 5 kg বরফ গলায়। বরফের গলনের লীন তাপ $=80$ cal/g ; কাজেই 5 kg বরফ-কর্তৃক লীন তাপ $=80\times5\times1000$ cal $\cdots$ (ii)

কাজেই, (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়,

$K\times300\times100\times1800=80\times5000$

বা, $K=0·0074$ cal s⁻¹ cm⁻¹ °C⁻¹

উদাহরণ 10.11 কোন কার্ডবোর্ডের 1 ইঞ্চি দূরত্বে অবস্থিত দুই পৃষ্ঠে 1°F উষ্ণতার পার্থক্য থাকিলে উহার 1 ft² ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়া ঘন্টায় 0·3 Btu তাপ

পরিবাহিত হয়। একটি ঘরের দেওয়ালগুলি এইরূপ 50টি কার্ডবোর্ডের তৈয়ারী। প্রতিটি কার্ডবোর্ডের মাপ 2 ft × 6 ft × 1·5 inch। ঘরের বাহিরের উষ্ণতা যখন 32°F তখন ঘরের উষ্ণতাকে 72°F উষ্ণতায় স্থির রাখিতে দৈনিক কতটা কয়লা পোড়াইতে হইবে? কয়লার দহনজনিত তাপ = 12 kBtu/lb।

[Card-board transmits 0·3 Btu of heat per hour through 1 ft² area when the temperature between its faces one inch apart is 1°F. The walls of room are made of 50 such card-boards of dimensions 2 ft × 6 ft × 1·5 inch. Find out how much coal has to be burnt inside the room per day in order to maintain the temperature of the room at 72°F when the temperature outside is 32°F. Heat of combustion of coal = 12 kBtu/lb]

সমাধান ঃ মনে করি, কার্ডবোর্ডের তাপ-পরিবাহিতা = K

এখন, $Q = \frac{KA(\theta_1 - \theta_2)t}{d}$

শর্তানুসারে, Q = 0·3 Btu, A = 1 ft²,

$t = 1$ h = 60 × 60 s এবং $d = 1$ inch $= \frac{1}{12}$ ft

$$\therefore \quad 0{\cdot}3 = \frac{K \times 1 \times 1 \times 60 \times 60}{\frac{1}{12}}$$

$$\text{বা,}\quad K = \frac{0{\cdot}3}{12 \times 60 \times 60}\,\text{Btu ft}^{-1}\text{s}^{-1}\,{}^{\circ}\text{F}^{-1} \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

ঘরের দেওয়ালের মোট ক্ষেত্রফল, A = 5 × 2 × 6 = 60 ft²

দেওয়ালের বেধ, $d = 1{\cdot}5$ inch $= \frac{1{\cdot}5}{12}$ ft

ঘরের ভিতরের ও বাহিরের উষ্ণতার পার্থক্য,

$$(\theta_1 - \theta_2) = (72 - 32) = 40^{\circ}\text{F}$$

সময়, $t = 1$ দিন = 24 × 60 × 60 s

কাজেই, ঘরের দেওয়ালের মধ্য দিয়া 1 দিনে যে-তাপ-পরিবাহিত হইয়া বাহির হইয়া যাইবে তাহার মান, $Q = \frac{KA(\theta_1 - \theta_2)t}{d}$

(i) নং সমীকরণ হইতে K-এর মান বসাইয়া পাই,

$$Q = \frac{0{\cdot}3}{12 \times 60 \times 60} \times \frac{60 \times 40 \times 24 \times 60 \times 60}{(1{\cdot}5/12)}$$

$$= \frac{0{\cdot}3 \times 60 \times 40 \times 24}{1{\cdot}5} = 11520 \text{ Btu} \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

মনে করি, প্রতিদিন m lb কয়লা জ্বালাইতে হইবে।

কাজেই, $Q = m \times 12000$ Btu $\qquad \cdots \qquad$ (iii)

(ii) এবং (iii) হইতে পাই, $m \times 12000 = 11520$

$$\therefore \quad m = \frac{11{\cdot}52}{12} = 0{\cdot}96 \text{ lb}$$

উদাহরণ 10.12 সুষম প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট এবং 1·5 m দীর্ঘ একটি তামার দণ্ডের এক প্রান্ত গলন্ত বরফের সংস্পর্শে আছে এবং অন্য প্রান্তটি আছে 100°C উষ্ণতার জলের সংস্পর্শে। ইহার দৈর্ঘ্য বরাবর কোন্ বিন্দুকে 200°C উষ্ণতায় স্থির রাখিলে বরফের গলনের হার এবং জলের বাষ্পীভবনের হার সমান হইবে? বরফের গলনের লীন তাপ=80 cal/g এবং জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ =540 cal/g।

[One end of a uniform copper rod and of length 1·5 m is in contact with melting ice and the other end is in contact with water at 100°C. Which point along its length is to be maintained at 200°C, so that the rate of melting of ice equals the rate of evaporation of water? The latent heat of fusion of ice=80 cal/g and the latent heat of evaporation of water=540 cal/g.]

সমাধান: মনে করি, যে-প্রান্তটি গলন্ত বরফের সংস্পর্শে আছে উহা হইতে x cm দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুটিকে 200°C উষ্ণতায় রাখিলে বরফের গলনের হার অন্য প্রান্তের জলের বাষ্পীভবনের হারের সমান হয়।

ধরা যাক, প্রতি সেকেণ্ডে m গ্রাম বরফ গলে এবং m গ্রাম জল বাষ্পীভূত হয়।

তামার তাপ-পরিবাহিতা K cal $\text{cm}^{-1}\text{s}^{-1}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$ এবং দণ্ডটির প্রস্থচ্ছেদ A cm^2 হইলে পরিবহনের ফলে প্রতি সেকেণ্ডে বরফ কর্তৃক প্রাপ্ত তাপ,

$$Q_1 = \frac{KA\,(200-0)}{x}\text{ cal}$$

$$= \frac{200\text{ K A}}{x}\text{ cal} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

এই তাপই m গ্রাম বরফ গলায় বলিয়া লেখা যায়,

$$Q_1 = m \times 80\text{ cal} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\frac{200\text{ K A}}{x} = m \times 80\text{ cal} \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

অনুরূপভাবে, পরিবহণের ফলে 100°C উষ্ণতার জল-কর্তৃক প্রাপ্ত তাপ,

$$Q_2 = \frac{\text{K A}\,(200-100)}{(150-x)}\text{ cal}$$

$$= \frac{100\text{ K A}}{(150-x)}\text{ cal} \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

এই তাপই m গ্রাম জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ যোগায় বলিয়া লেখা যায়,

$$Q_2 = m \times 540\text{ cal} \quad \cdots \quad \text{(v)}$$

সমীকরণ (iv) এবং (v) হইতে পাই,

$$\frac{100\text{ K A}}{(150-x)} = m \times 540 \quad \cdots \quad \text{(vi)}$$

সুতরাং, সমীকরণ (iii) এবং (vi) হইতে

$$\frac{2(150-x)}{x}=\frac{80}{540}=\frac{4}{27}$$

বা, $2x=27(150-x)$ বা, $x=\frac{150\times27}{29}=139{\cdot}6$

কাজেই, তামার দণ্ডটির যে-প্রান্ত গলন্ত বরফের সংস্পর্শে আছে সেই প্রান্ত হইতে 139·6 cm দূরে অবস্থিত বিন্দুটির উষ্ণতা 200°C উষ্ণতায় স্থির রাখিতে হইবে।

প্রশ্নমালা 10

1. 2 cm বেধবিশিষ্ট এবং 100 cm² ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি লোহার পাতের মধ্য দিয়া প্রতি ঘন্টায় কী পরিমাণ তাপ পরিবাহিত হইবে? ঐ পাতের উভয় পার্শ্বের উষ্ণতা 0°C এবং 20°C। লোহার তাপ-পরিবাহিতা=0·2 c.g.s. units।

[How much heat is conducted in one hour through an iron plate 2 cm thick and 100 cm² in area? The temperatures of the two faces of the plate are 0°C and 20°C respectively. Thermal conductivity of iron=0·2 c.g.s. units] [720 kcal]

2. 30 cm দীর্ঘ এবং 8 mm ব্যাসবিশিষ্ট একটি দণ্ডের এক প্রান্তকে 100°C উষ্ণতার ফুটন্ত জলে এবং অপর প্রান্তকে বরফে রাখা হইল। ইহাতে দেখা গেল যে, প্রতি মিনিটে 1·2 g বরফ গলিতেছে। ঐ দণ্ডের উপাদানের তাপ-পরিবাহিতা কত?

[One end of a rod of length 30 cm and diameter 8 mm is kept in boiling water at 100°C and the other end is kept in ice. It is found that 1·2 g of ice melts per minute. What is the thermal conductivity of the material of the rod?] [0·96 cal cm^{-1}s^{-1}°C^{-1}]

3. কোন ধাতব পদার্থের তৈয়ারী একটি ফাঁপা ঘনকের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 cm। ঘনকটির দেওয়ালের বেধ 1 cm। ইহাকে গলন্ত বরফ দ্বারা পূর্ণ করা হইল এবং ইহাকে 100°C উষ্ণতায় জল দ্বারা চারিদিক হইতে ঘিরিয়া রাখা হইল। প্রতি মিনিটে কী পরিমাণ বরফ গলিবে? ধাতুটির তাপ-পরিবাহিতা=0·5 সি. জি. এস. একক এবং বরফের লীন তাপ=80 cal/g।

[The length of each side of a hollow cube of metal is 10 cm. The thickness of the wall of the cube is 1 cm. It is filled with melting ice and kept surrounded by water at 100°C How much ice will melt in a minute? (Conductivity of the metal=0·5 c.g s. unit and the latent heat of ice=80 cal/g.)] [22·5 g]

4. একটি দণ্ডের অর্ধেক তামার দ্বারা এবং অর্ধেক লোহার দ্বারা তৈয়ারী। দণ্ডের লোহার প্রান্তটি এবং তামার প্রান্তটি যথাক্রমে 0°C এবং 100°C উষ্ণতায় রাখা হইয়াছে। সাম্যাবস্থায় লোহা ও তামার সংযোগস্থলের উষ্ণতা কী হইবে? তামার এবং লোহার তাপ-পরিবাহিতা যথাক্রমে 0·9 এবং 0·12 সি. জি. এস. একক।

[A bar consists of two halves—one made of iron and the other made of copper. The iron and copper ends of the bar are maintained at 0°C and 100°C respectively. Find the temperature of the junction between copper and iron. The thermal conductivities of copper and iron are 0·9 and 0·12 c.g.s. units respectively.]

[88·2°C (প্রায়)]

5. একটি দেওয়াল 1 cm, 2 cm, 3 cm এবং 4 cm বেধবিশিষ্ট বিভিন্ন পদার্থের স্তর দ্বারা তৈয়ারী। ঐ পদার্থগুলির তাপ-পরিবাহিতা যথাক্রমে 0·2, 0·3, 0·1 এবং 0·05 সি. জি. এস. একক হইলে দেওয়ালটির তুল্য তাপ-পরিবাহিতা নির্ণয় কর।

[A wall is made of layers made of different materials and of different thickness 1 cm, 2 cm, 3 cm and 4 cm. If the thermal conductivities of the materials are 0·2, 0·3, 0·1 and 0·05 c.g.s. units respectively, find the equivalent thermal conductivity of the wall.] [0·082 c.g.s. units]

6. একটি ঘরের কাচের জানালাগুলির মোট ক্ষেত্রফল 10 m² এবং কাচের বেধ 3 mm। কাচের জানালার ভিতরের তলের উষ্ণতা 12·5°C এবং বাহিরের তলের উষ্ণতা 0°C হইলে জানালার মধ্য দিয়া প্রতি মিনিটে পরিবহণের সাহায্যে কী পরিমাণ তাপ ঘর হইতে বাহির হইয়া যাইবে? (কাচের তাপ-পরিবাহিতা= 0·002 সি. জি. এস. একক)

[The glass windows of a room have a total area of 10 m² and the glass is 3 mm thick. Find the rate at which heat escapes the room per minute, by conduction, if the temperature of the inside surfaces of the windows are at 12·5°C and the outside surfaces are at 0°C. (The thermal conductivity of glass= 0·002 c.g.s. unit).] [500 kcal]

7. 2 cm ব্যাসবিশিষ্ট এবং 50 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি তামার দণ্ডের এক প্রান্ত ফুটন্ত জলের মধ্যে রাখা আছে এবং অপর প্রান্তটি রহিয়াছে একটি জ্যাকেটের মধ্যে। জ্যাকেটটির মধ্য দিয়া 10°C উষ্ণতার জল প্রবেশ করিয়া ঐ প্রান্তটিকে শীতল রাখা হইয়াছে। 6 মিনিটে জ্যাকেটের মধ্য দিয়া 200 g জল প্রবাহিত হইলে ঐ জলের উষ্ণতা-বৃদ্ধি কত হইবে? তামার তাপ-পরিবাহিতা=1·02 cal $cm^{-1}s^{-1}$ $°C^{-1}$

[A copper rod of diameter 2 cm and of length 50 cm has one of its ends in boiling water and the other end in a jacket cooled by flowing water which enters at 10°C. If 200 g of water flows through the jacket in 6 minutes, what is the rise of temperature of the water? Thermal conductivity of copper=1·02 cal $cm^{-1}s^{-1}°C^{-1}$.] [10°C (প্রায়)]

8. একটি ঘরের পাথরের দেওয়ালের বেধ 10 cm। পাথরের তাপ-পরিবাহিতা 0·009 cal cm^{-1} s^{-1} $°C^{-1}$। ঘরের ভিতরের উষ্ণতা 10°C এবং বাহিরের উষ্ণতা −10°C। দেওয়ালের প্রতি বর্গমিটারের মধ্য দিয়া প্রতি ঘণ্টায় কী পরিমাণ তাপ বাহির হইয়া যায়?

[The stone walls of a room are 10 cm thick. The thermal conductivity of stone is 0·009 cal $cm^{-1}s^{-1}{}^\circ C^{-1}$. The temperature of the room is 10°C and the temperature outside is −10°C. What is the amount of heat lost by conduction through the walls per hour per square metre of the wall ?] [$6·48 \times 10^5$ cal]

9. 2 cm বেধবিশিষ্ট এবং 100 cm × 60 cm × 60 cm মাপের একটি কাঠের বাক্সে 0°C উষ্ণতার বরফ আছে। যদি বাহিরের উষ্ণতা 30°C হয় এবং কাঠের তাপ-পরিবাহিতা 0·0004 cal $cm^{-1}s^{-1}{}^\circ C^{-1}$ হয়, তাহা হইলে কী হারে বরফ গলিবে তাহা নির্ধারণ কর।

[Estimate the rate at which ice at 0°C will melt in a wooden box 2 cm thick and having dimensions 100 cm × 60 cm × 60 cm, if the temperature outside is 30°C and conductivity of wood is 0·0004 cal $cm^{-1}s^{-1}{}^\circ C^{-1}$.] (Jt. Entrance, '73) [2·34 g/s]

10. তিনটি ফলকের বেধ d_1, d_2 এবং d_3 ; ইহাদের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ অভিন্ন। ইহাদের উপাদানের পরিবাহিতাঙ্ক যথাক্রমে k_1, k_2 এবং k_3। ইহাদিগকে 1, 2, 3 —এই বিন্যাসে পর পর স্তূপাকারে বসান হইল। দেখাও যে, স্থির অবস্থায় (তাপীয় সাম্যাবস্থায়), যখন কোন বিকিরণজনিত তাপ ক্ষয় হয় না তখন ফলকের স্তূপটি k তাপ-পরিবাহিতাঙ্কবিশিষ্ট পদার্থের একটি ফলকের ন্যায় আচরণ করে, এখানে k নিম্নের সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়,

$$\frac{d_1+d_2+d_3}{k}=\frac{d_1}{k_1}+\frac{d_2}{k_2}+\frac{d_3}{k_3}$$

[Three slabs are of thickness d_1, d_2 and d_3. They are of same length and breadth. The thermal conductivities of the materials of the slabs are k_1, k_2 and k_3 respectively. They are piled up one over the other in the order 1, 2, 3. Show that if there is no radiation loss, the combination behaves, at steady state, as a single slab of material of thermal conductivity k, given by

$$\frac{d_1+d_2+d_3}{k}=\frac{d_1}{k_1}+\frac{d_2}{k_2}+\frac{d_3}{k_3}\,.$$]

11. 60 cm^2 প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট এবং 0·5 cm বেধবিশিষ্ট একটি ধাতব পাতের মধ্য দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে 3000 cal তাপপ্রবাহের হার বজায় রাখিতে হইবে। পাতটির দুই পৃষ্ঠে উষ্ণতার প্রভেদ কত হওয়া প্রয়োজন? দেওয়া আছে যে, উক্ত ধাতুর তাপ-পরিবাহিতাঙ্ক 1·53 cal $cm^{-1}s^{-1}{}^\circ C^{-1}$।

[It is required to maintain a steady flow of heat at the rate of 3000 cal/s through a metal plate with a cross-section of 60 cm^2 and thickness 0·5 cm. What should be the temperature difference

between the two faces of the plate? Given that the thermal conductivity of the metal=1·53 cal $cm^{-1}s^{-1}{}^{\circ}C^{-1}$.]

[16·34°C]

12. 0·32 এবং 0·14 তাপ-পরিবাহিতাঙ্কবিশিষ্ট উপাদানের তৈয়ারী দুইটি সমান্তরাল স্তর দ্বারা গঠিত ফলকের মধ্য দিয়া তাপ প্রবাহিত হইতেছে। স্তর দুইটির বেধ যথাক্রমে 3·6 cm এবং 4·2 cm। ফলকটির দুই বহিঃস্থ পৃষ্ঠের উষ্ণতা 96°C এবং 8°C। উভয় স্তরের উষ্ণতার নতিমাত্রা নির্ণয় কর।

[Heat is being conducted through a composite slab made of two parallel layers of materials of conductivities 0·32 and 0·14 c.g.s. units. The layers are of thickness 3·6 cm and 4·2 cm. The temperatures of the outer faces of the slab are 96°C and 8°C. Find the temperature gradient in each layer.]

[6·67°C/cm, 15·24°C/cm]

13. একটি বাষ্প-প্রকোষ্ঠের ঢাকনাটি পাথরের তৈয়ারী। ইহার দৈর্ঘ্য 6 dm, প্রস্থ 5 dm এবং বেধ 1 dm। পাথরের ঢাকনাটির উপর কিছু পরিমাণ বরফ রাখিলে $\frac{1}{2}$ ঘন্টায় 5 kg বরফ গলিয়া যায়। পাথরের তাপ-পরিবাহিতাঙ্ক নির্ণয় কর।

[The top of a steam chamber made of stone is of length 6 dm, breadth 5 dm and thickness 1 dm. If some ice is placed on the stone 5 kg of ice melts in $\frac{1}{2}$ hour. Find the thermal conductivity of stone. [0·0074 cal $cm^{-1}s^{-1}{}^{\circ}C^{-1}$]

14. ধরিয়া লও যে, তামার তাপ-পরিবাহিতাঙ্ক পিতলের তাপ-পরিবাহিতাঙ্কের 4 গুণ। একই দৈর্ঘ্য ও প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি তামার এবং একটি পিতলের দণ্ড লইয়া একটির এক প্রান্তের সহিত অপরটির এক প্রান্ত যুক্ত করা হইল। তামার দণ্ডের মুক্ত প্রান্তকে 0°C উষ্ণতায় এবং পিতলের দণ্ডের মুক্ত প্রান্তকে 100°C উষ্ণতায় রাখা হইল। তাপীয় সাম্য প্রতিষ্ঠিত হইলে দণ্ডদ্বয়ের সংযোগস্থলের উষ্ণতা কত হইবে? (বিকিরণজনিত তাপক্ষয় উপেক্ষা কর।)

[Assume that the thermal conductivity of copper is 4 times that of brass. Two rods of copper and brass having the same length and cross-section are joined end-to-end. The free end of the copper rod is kept at 0°C and the free end of the brass rod is kept at 100°C. Find the temperature of the junction of the two rods at equilibrium. Neglect radiation loss.]

[20°C]

15. 300 cm^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এবং 5 cm বেধবিশিষ্ট একটি অ্যালুমিনিয়াম পাতের এক পার্শ্ব বাষ্পের সাহায্যে 100°C উষ্ণতায় রাখা হইয়াছে এবং অপর পার্শ্বের উষ্ণতা জলের সাহায্যে 30°C রাখা হইয়াছে। যদি পাতের মধ্য দিয়া

9 kW হারে শক্তি পরিবাহিত হয় তাহা হইলে $Wm^{-1}K^{-1}$ এককে অ্যালুমিনিয়ামের তাপ-পরিবাহিতাঙ্ক নির্ণয় কর।

[An aluminium plate of area 300 cm^2 and thickness 5 cm has one side maintained at 100°C by steam, and the other side at 30°C by water. If energy passes through the plate at a rate of 9 kW, find the coefficient of thermal conductivity in Wm $^1K^{-1}$ unit.]

16. 5 mm বেধবিশিষ্ট তামা এবং 10 mm বেধবিশিষ্ট অ্যালুমিনিয়ামের দেওয়ালের মধ্য দিয়া তাপ পরিবাহিত হইতেছে। তামার বহিস্তলের উষ্ণতা 100°C এবং অ্যালুমিনিয়ামের বহিস্তলের উষ্ণতা ৪0°C। কী হারে তাপ পরিবাহিত হইতেছে এবং তামা ও অ্যালুমিনিয়ামের সংযোগস্থলের উষ্ণতা কত? ধরিয়া লও যে, তামার তাপ-পরিবাহিতাঙ্ক=400 $Wm^{-1}K^{-1}$ এবং অ্যালুমিনিয়ামের তাপ-পরিবাহিতাঙ্ক=200 $Wm^{-1}K^{-1}$.

[Heat is conducted through a composite wall consisting of a 5 mm thickness of copper and a 10 mm thickness of aluminium. The temperatures are 80°C on the outside of the aluminium and 100°C on the outside of the copper. What is the rate of flow of heat and what is the temperature where copper and aluminium join? Assume that the coefficient of thermal conductivity of copper=400 $Wm^{-1}K^{-1}$ and the coefficient of thermal conductivity of aluminium=200 $Wm^{-1}K^{-1}$.] [320 kWm^{-2}, 96°C]

17. নিম্নের তালিকায় সি. জি. এস. এককে তিনটি ধাতুর তাপ-পরিবাহিতা K, আপেক্ষিক তাপ s এবং ঘনত্ব ρ-এর মান দেওয়া হইয়াছে। তাপমাত্রিক পরিবাহিতার মানের ক্রমানুসারে ইহাদিগকে সাজাও।

ধাতু	তাপ-পরিবাহিতা, K	আপেক্ষিক তাপ, s	ঘনত্ব, ρ
তামা	0·92	0·091	8·9
সীসা	0·08	0·03	11·3
অ্যালুমিনিয়াম	0·50	0·21	2·7

[The values of thermal conductivity K, specific heat s and density ρ of three metals in c.g.s. units are given in the following table. Arrange them in the order of decreasing thermometric conductivity :

Metal	Thermal conductivity, K	Specific heat, s	density, ρ
Copper	0·92	0·091	8·9
Lead	0·08	0·03	11·3
Aluminium	0·50	0·21	2·7

[তামা, অ্যালুমিনিয়াম, সীসা]

18. তাপন-কুণ্ডলীসহ একটি ধাতব ব্লক 20 cm দীর্ঘ এবং 0·05 cm ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট দুইটি তারের সাহায্যে শূন্যস্থানে ঝুলান আছে। ব্লকটিকে বিলম্বন-তারের অন্য প্রান্তের উষ্ণতা অপেক্ষা 20°C বেশি উষ্ণতায় রাখিতে হইলে তাপন-কুণ্ডলীতে 0·042 W হারে শক্তি ব্যয়িত হয়। বিলম্বন-তারের উপাদানের তাপ-পরিবাহিতার মান নির্ণয় কর। (বিকিরণজনিত তাপ উপেক্ষা কর)।

[A metal block containing a heating coil is suspended in vacuum by two wires 20 cm long and 0·05 cm in radius. In order to maintain the temperature of the block 20°C above that of the other end of the suspension, a power of 0·042 W must be dissipated in the heating coil. Find the coefficient of thermal conductivity of the material of the suspension wires. (Neglect the loss of heat by radiation.)] [0·64 cal $cm^{-1}s^{-1}°C^{-1}$ (প্রায়)]

কম্পন ও তরঙ্গ

প্রথম পরিচ্ছেদ

সরল দোল গতি

1.1 সরল দোল গতির গাণিতিক সমীকরণ : সরল দোল গতির সাধারণ সমীকরণটি এইরূপ : $x=a \sin(\omega t+\delta)$ ... (1.1)

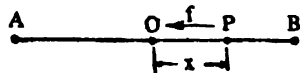
এখানে, x হইল যে-কোন মুহূর্তে গতিপথের মধ্যবিন্দু হইতে সরল দোল গতি নিষ্পন্নকারী বস্তুকণার সরণ এবং δ হইল আলোচ্য বস্তুকণার প্রারম্ভিক দশা (initial phase)।

প্রারম্ভিক মুহূর্তে (অর্থাৎ, যখন $t=0$) বস্তুকণা যদি উহার গতিপথের মধ্যবিন্দু হইতে (O-বিন্দু হইতে) যাত্রা শুরু করিয়া ধনাত্মক x-অক্ষাভিমুখে চলিতে থাকে তাহা হইলে ঐ কণার সরল দোল গতির সমীকরণ হইবে

$$x=a \sin \omega t \qquad \cdots \qquad (1.2)$$

প্রারম্ভিক মুহূর্তে বস্তুকণাটি যদি মধ্যবিন্দু হইতে ধনাত্মক x-অক্ষাভিমুখে সর্বোচ্চ দূরত্বে থাকে তাহা হইলে ঐ কণার সরল দোল গতির সমীকরণ হইবে

$$x=a \cos \omega t \qquad \cdots \qquad (1.3)$$

A O f P B
x

চিত্র 1.1

(1.1), (1.2) এবং (1.3) নং সমীকরণে a হইল বস্তুকণার দোলন-বিস্তার, ω হইল বস্তুকণার কৌণিক বেগ।

দোলনকাল T এবং কৌণিক বেগ ω-এর সম্পর্কটি নিম্নরূপ :

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \qquad \cdots \qquad (1.4)$$

সরল দোল গতি নিষ্পন্নকারী কণার কম্পাঙ্ক, $n=\frac{1}{T}$ ... (1.5)

1.2 সরল দোল গতি নিষ্পন্নকারী বস্তুকণার গতিবেগ ও ত্বরণ : সাম্যাবস্থা হইতে বস্তুকণার সরণের সহিত উহার গতিবেগ v-এর সম্পর্কটি এইরূপ :

$$v=\pm\omega\sqrt{a^2-x^2} \qquad \cdots \qquad (1.6)$$

প্রতিটি অবস্থানে কণার দুইটি গতিবেগ সম্ভব—ইহাদের মান সমান কিন্তু চিহ্ন বিপরীত। গতিবেগ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হইবার তাৎপর্য এই যে, কণাটি প্রতিটি অবস্থানকে পর্যায়ক্রমে বিপরীত দিক হইতে অতিক্রম করে।

কাজেই, সর্বোচ্চ গতিবেগ, $V_{max}=\omega . a$ ... (1.7)

গতিপথের যে-কোন বিন্দু P-তে আলোচ্য কণার ত্বরণ,

$$f=-\omega^2 x \qquad \cdots \qquad (1.8)$$

এখানে ঋণাত্মক চিহ্নটির তাৎপর্য হইল এই যে, বস্তুকণার ত্বরণ সর্বদা উহার গতিপথের মধ্যবিন্দু O-এর অভিমুখে ক্রিয়াশীল।

ঋণাত্মক চিহ্নটি উপেক্ষা করিয়া লেখা যায়,

$$\omega=\sqrt{\frac{f}{x}}=\sqrt{\frac{\text{ত্বরণ}, f}{\text{সরণ}, x}} \quad \cdots \quad (1.9)$$

$$\text{বা}, \ \frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{\text{ত্বরণ}, f}{\text{সরণ}, x}} \ \text{বা}, \ T=2\pi\sqrt{\frac{1}{\text{একক সরণে ত্বরণ}}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{\text{ভর}}{\text{একক সরণে বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল বল}}} \quad \cdots \quad (1.10)$$

1.3 সরল দোল গতি নিষ্পন্নকারী বস্তুকণার শক্তি :

যখন সাম্যাবস্থা হইতে বস্তুকণার x সরণ ঘটে তখন উহার গতিশক্তি $=\frac{1}{2}mv^2$

$=\frac{1}{2}m\omega^2(a^2-x^2)$ [(1.6) হইতে] .. (1.11)

মোট শক্তি = গতিশক্তির সর্বোচ্চ মান $=\frac{1}{2}m\omega^2a^2$ ... (1.12)

∴ স্থিতিশক্তি = মোট শক্তি − গতিশক্তি $=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ ... (1.13)

আলোচ্য কণার কম্পাঙ্ক n হইলে লেখা যায় $\omega=2\pi n$ ... (1.14)

∴ সরল দোল গতি নিষ্পন্নকারী বস্তুকণার মোট শক্তি

$=2m\pi^2a^2n^2$ ... (1.15)

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 1.1 একটি সরল দোল গতি নিষ্পন্নকারী কণা 0·001 s দোলনকাল এবং 0·5 cm বিস্তার লইয়া একটি সরলরেখা বরাবর আন্দোলিত হইতেছে। যখন কণাটি উহার গতিপথের মধ্যবিন্দু হইতে 0·2 cm দূরে বিদ্যমান তখন উহার ত্বরণ নির্ণয় কর। কণাটির সর্বোচ্চ গতিবেগও নির্ণয় কর।

[A particle executes simple harmonic motion along a straight line with a period of 0·001 s and an amplitude of 0·5 cm. Find the acceleration of the particle when it is 0·2 cm away from the mean position. Also find its maximum velocity.]

সমাধান : আমরা জানি যে, সরল দোল গতি নিষ্পন্নকারী বস্তুকণার ত্বরণ,

$$f=\omega^2x$$

$$=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 . x \quad \text{বা}, \quad f=\frac{4\pi^2}{T^2} . x$$

এখানে, দোলনকাল, T = 0·001 s এবং $x=0\cdot2$ cm

$$\text{কাজেই}, \quad f=\frac{4\pi^2}{(0\cdot001)^2}\times0\cdot2=7\cdot9\times10^6 \text{ cm/s}^2$$

$$=7\cdot9\times10^4 \text{ m/s}^2$$

আলোচ্য কণার সর্বোচ্চ গতিবেগ, $v_{max}=\omega\times a$

$$=\frac{2\pi}{T}\times a=\frac{2\times3\cdot14}{0\cdot001}\times0\cdot5 \text{ cm/s}=31\cdot4 \text{ m/s}$$

উদাহরণ 1.2 প্রমাণ কর যে, সরল দোল গতিতে বস্তুকণা সাম্যাবস্থা হইতে বিস্তারের $\sqrt{3/2}$ দূরত্বে থাকিলে উহার গতিবেগের অর্ধেক হইবে।

[**Prove that the velocity of a particle executing simple harmonic motion is half its maximum velocity at a distance of $\sqrt{3/2}$ times its amplitude from its mean position.**]

সমাধান ঃ আমরা জানি যে, গতিবেগ, $v=\omega\sqrt{a^2-x^2}$

এখানে, a=বিস্তার এবং x=সরণ

গতিবেগের সর্বোচ্চ মান, $v_{max}=\omega a$

$$\therefore \quad \frac{v}{v_{max}}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

কিন্তু, প্রশ্নের শর্তানুসারে লেখা যায়, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$\therefore \quad \frac{x}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$\frac{v}{v_{max}}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2} \quad \text{বা,} \quad v=\tfrac{1}{2}\,v_{max}$$

উদাহরণ 1.3 সরল দোলন গতিসম্পন্ন একটি কণার দোলনকাল π s এবং মোট শক্তি 6400 erg। মধ্যবিন্দু অতিক্রম করিবার $(\pi/8)$ s পর কণাটির সরণ $2\sqrt{2}$ cm হইলে উহার ভর এবং দোলন-বিস্তার নির্ণয় কর।

[**The time period of a particle executing simple harmonic motion is π s and its total energy is 6400 erg. If the displacement of the particle $(\pi/8)$ s after passing through the middle point of its path is $2\sqrt{2}$ cm, find its mass and amplitude of oscillation.**]

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে দোলনকাল, $T=\pi$ s

কাজেই, কৌণিক বেগ, $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$ rad/s

বস্তুটি যে-মুহূর্তে মধ্যবিন্দুতে আসে সেই মুহূর্ত হইতে সময় t মাপিলে লেখা যায়,

সরণ, $x=a\sin\omega t$, a=দোলনবিস্তার

শর্তানুসারে, $2\sqrt{2}=a\sin 2\times\frac{\pi}{8}=a\times\frac{1}{\sqrt{2}}$ বা, $a=4$ cm

বস্তুকণার মোট শক্তি, $W=\frac{1}{2}m\,\omega^2a^2$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{2}m\,\omega^2a^2=6400$

$$\text{বা,} \quad m=\frac{2\times6400}{\omega^2a^2}=\frac{2\times6400}{2^2\times4^2}=200 \text{ g}$$

উদাহরণ 1.4 সরল দোল গতি নিষ্পন্নকারী একটি কণার সর্বোচ্চ সরণ 8 cm এবং গতিপথের মধ্যবিন্দু হইতে 2 cm দূরত্বে ইহার ত্বরণ 10 cm/s^2। বস্তুকণা যখন মধ্যবিন্দু হইতে 4 cm দূরত্বে রহিয়াছে তখন ইহার গতিবেগ কত ?

[A particle executing simple harmonic motion has a maximum displacement of 8 cm and its acceleration at a distance of 2 cm from the middle point of its path is 10 cm/s². What is its velocity when it is at a distance of 4 cm from its middle point ?]

সমাধান : প্রশ্নানুসারে, কণার দোলন-বিস্তার, $a=8$ cm

আমরা জানি, সরল দোল গতি নিষ্পন্নকারী কণার ত্বরণ, $f=\omega^2 x$

শর্তানুসারে, যখন $x=2$ cm তখন $f=10$ cm/s²

$$\therefore \quad \omega^2 \times 2=10 \quad \text{বা,} \quad \omega=\sqrt{5} \text{ rad/s}$$

আবার, মধ্যবিন্দু হইতে x দূরত্বে ইহার গতিবেগ

$$v=\omega\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{5}\times\sqrt{8^2-4^2}$$

$$=\sqrt{5}\times\sqrt{48}=15{\cdot}49 \text{ cm/s (প্রায়)}$$

উদাহরণ 1.5 সরল দোল গতি নিষ্পন্নকারী একটি বস্তুর দোলনবিস্তার 10 cm এবং দোলনকাল 1·5 s। স্থির অবস্থান হইতে $5\sqrt{3}$ cm দূরত্ব যাইতে বস্তুটি কত সময় লয় তাহা নির্ণয় কর।

[A body executing simple harmonic motion has an amplitude of 10 cm and time period of 1·5 s. Calculate the time taken by the body to travel a distance of $5\sqrt{3}$ cm from its rest position].

সমাধান : বস্তুটি যখন উহার স্থির অবস্থানে রহিয়াছে তখন হইতে সময়ের পরিমাপ করিলে সরল দোল গতির সমীকরণটি নিম্নরূপ হইবে—

$$x=a\cos\omega t \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

$$\text{প্রশ্নের শর্তানুসারে, } a=10 \text{ cm}, \ T=\frac{2\pi}{\omega}=1{\cdot}5 \text{ s}$$

$$\text{কাজেই, } \omega=\frac{2\pi}{1{\cdot}5} \text{ rad/s}$$

মনে করি, বস্তুটি স্থির অবস্থান অতিক্রম করিবার t s পর উহার গতিপথের মধ্যবিন্দু হইতে $5\sqrt{3}$ দূরে পৌঁছায়। সুতরাং, সমীকরণ (i) হইতে লেখা যায়,

$$5\sqrt{3}=10\cos\frac{2\pi}{1{\cdot}5}.t \quad \text{বা,} \quad \cos\frac{2\pi}{1{\cdot}5}t=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{সুতরাং, } \frac{2\pi}{1{\cdot}5}t=\frac{\pi}{3} \quad \text{বা, } t=\frac{1{\cdot}2}{3\times 2}=0{\cdot}25 \text{ s}$$

উদাহরণ 1.6 একটি কণা সরল দোল গতি সম্পাদন করিতেছে। যখন কণাটি উহার গতিপথের মধ্যবিন্দু হইতে 2 cm এবং 3 cm দূরে অবস্থিত, তখন উহার গতিবেগ যথাক্রমে 5 cm/s এবং 4 cm/s। কণাটির গতিপথের দৈর্ঘ্য, কম্পাঙ্ক এবং কণাটি যখন উহার গতিপথের মধ্যবিন্দু হইতে 2 cm দূরে অবস্থিত তখন উহার গতির দশা কত তাহা নির্ণয় কর।

[A particle is executing simple harmonic motion. When the particle is at a distance of 2 cm and 3 cm from the midpoint of its path, the magnitudes of the velocity of the particle is 5 cm/s and

4 cm/s respectively. Find the length of its path, the frequency of its oscillation and the phase of its motion when it is at a distance of 2 cm from the midpoint of its path.]

সমাধান ঃ আমরা জানি যে, গতিপথের মধ্যবিন্দু হইতে x দূরত্বে সরল দোল গতিসম্পন্ন কণার গতিবেগ v হইলে

$$v^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$$

এখানে, ω=কণার কৌণিক বেগ, a=বিস্তার।

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $5^2 = \omega^2(a^2 - 2^2)$ ... (i)

এবং $4^2 = \omega^2(a^2 - 3^2)$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $a^2 = \frac{161}{9}$ এবং $\omega^2 = \frac{9}{5}$

$\therefore \quad a = \sqrt{\frac{161}{9}} = 4 \cdot 23$ cm (প্রায়) এবং $\omega = \frac{3}{\sqrt{5}}$ rad/s

$\therefore$ গতিপথের দৈর্ঘ্য $= 2a = 8 \cdot 46$ cm (প্রায়)

যখন কণাটি উহার মধ্যবিন্দুতে রহিয়াছে তখন উহার দশা শূন্য ধরিলে কণাটির সরল দোল গতির সমীকরণ হইবে $x = a \sin \omega t$

কণার দশা, $\theta = \omega t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$

$x = 2$ cm হইলে, $\theta = \sin^{-1} \frac{2}{4 \cdot 23} = 28^\circ \cdot 22$

বস্তুকণার কম্পাঙ্ক n হইলে লেখা যায়, $\omega = 2\pi n = \frac{3}{\sqrt{5}}$

বা, $n = \frac{3}{2\pi\sqrt{5}} = 0 \cdot 214$/s (প্রায়)

উদাহরণ 1.7 একটি বস্তুকণা 2 cm দীর্ঘ রেখা বরাবর সরল দোল গতি নিষ্পন্ন করিতেছে। ঐ রেখার মধ্যবিন্দু অতিক্রম করিবার সময় উহার গতিবেগ 10 cm/s হইলে উহার দোলনকাল এবং কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A particle is executing simple harmonic motion along a straight line 2 cm in length. Its velocity when it crosses the middle point of its path is 10 cm/s. Find its time period and frequency.]

সমাধান ঃ কণাটি যখন মধ্যবিন্দু অতিক্রম করে তখন ইহার গতিবেগ, $v = a \times \omega$

এখানে, a=বিস্তার এবং ω=কৌণিক বেগ$= \frac{2\pi}{T}$

$$\therefore \quad v = \frac{2\pi a}{T}$$

সুতরাং, দোলনকাল $T = \frac{2\pi a}{v}$

এখানে, বিস্তার, $a=\frac{2}{2}=1$ cm ; $v=10$ cm/s

$$\therefore \quad T=\frac{2\times\pi\times1}{10}=0{\cdot}628 \text{ s}$$

এবং কম্পাঙ্ক, $n=\frac{1}{T}=\frac{1}{0{\cdot}628}=1{\cdot}59$ Hz

উদাহরণ 1.8 10 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু নিম্নের সমীকরণ অনুসারে কম্পিত হইতেছে : $x=10\cos\left(0{\cdot}2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$ cm। বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল বলের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর।

[A body of mass 10 g oscillates according to the following equation : $x=10\cos\left(0{\cdot}2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$ cm. Find the maximum value of the force acting on the body.]

সমাধান : আমরা জানি যে, সরল দোল গতির সাধারণ সমীকরণ নিম্নরূপ :

$$x=a\cos(\omega t+\delta) \quad \cdots \quad (i)$$

আবার, আলোচ্য বস্তুর সমীকরণ : $x=10\cos\left(0{\cdot}2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$cm $\cdots$ (ii)

(i) এবং (ii) নং সমীকরণ তুলনা করিয়া লেখা যায়,

$\omega=$ বস্তুটির কৌণিক বেগ $=0{\cdot}2\pi$ rad/s

$a=$ বস্তুটির দোলনবিস্তার $=10$ cm

বস্তুর ত্বরণের সর্বোচ্চ মান, $f_{max}=\omega^2 a$

কাজেই, বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল বলের সর্বোচ্চ মান, $F_{max}=mf_{max}=m\omega^2 a$

কাজেই, $F_{max}=10\times(0{\cdot}2\pi)^2\times10$ dyn $=39{\cdot}48$ dyn

উদাহরণ 1.9 100 lb ভরবিশিষ্ট একটি কণা 4 ft বিস্তার লইয়া সরল দোল গতি নিষ্পন্ন করিতেছে। যখন কণাটি উহার গতিপথের মধ্যবিন্দু হইতে 2 ft দূরে অবস্থিত তখন উহার ত্বরণ 10 ft/s^2। যখন কণাটি মধ্যবিন্দু হইতে 3 ft দূরে অবস্থিত তখন (i) ইহার গতিবেগ, (ii) ত্বরণ এবং (iii) ইহার উপর ক্রিয়াশীল বলের মান নির্ণয় কর।

[A particle of mass 100 lb executes simple harmonic motion with an amplitude of 4 ft. When the particle is 2 ft away from the mean position of its path, its acceleration is 10 ft/s^2. Find (i) the velocity, (ii) the acceleration and (iii) the force acting on the particle when it is 3 ft away from the mean position.]

সমাধান : আমরা জানি যে, ত্বরণ $f=\omega^2 x$ (অভিমুখ উপেক্ষা করিয়া)

এক্ষেত্রে, $f=10$ ft/s^2 ; $x=2$ ft

$$\therefore \quad \omega=\sqrt{\frac{f}{x}}=\sqrt{\frac{10}{2}} \quad \text{বা,} \quad \omega=\sqrt{5} \text{ rad/s}$$

(i) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, গতিবেগ, $v=\omega\sqrt{a^2-x^2}$

$$=\sqrt{5}\times\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{5}\times\sqrt{16-9}=\sqrt{35}\text{ ft/s}$$

(ii) কণার ত্বরণ, $f=\omega^2 x=(\sqrt{5})^2\times 3=15\text{ ft/s}^2$

(iii) বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল বল$=mf$

$$=100\text{ lb}\times 15\text{ ft/s}^2=1500\text{ poundals}$$

উদাহরণ 1.10 একটি কণার সরল দোল গতির দোলনকাল 12 s এবং বিস্তার 10 cm হইলে কণাটি উহার ধনাত্মক প্রান্তের চূড়ান্ত অবস্থান দিয়া যাইবার 16 s পর উহার সরণ ও দশা কত হইবে ?

[If the period of simple harmonic motion executed by a particle is 12 s and its amplitude is 10 cm, what is the phase and displacement of the particle at a time 16 s after a passage of the particle through its extreme positive end ?]

সমাধান : যদি প্রাথমিক অবস্থায় কণাটি উহার গতিপথের ধনাত্মক প্রান্তের চূড়ান্ত অবস্থানে থাকে তাহা হইলে উহার গতির সমীকরণ হইবে নিম্নরূপ :

$$x=a\cos\omega t$$

এখানে $x=$মধ্যবিন্দু হইতে বস্তুর সরণ, $a=$বস্তুকণার দোলন-বিস্তার এবং $\omega=$কৌণিক বেগ।

শর্তানুসারে, $a=10\text{ cm},\ T=\dfrac{2\pi}{\omega}=12\text{ s}$

$$\therefore\quad \omega=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}\text{ rad/s}$$

ধনাত্মক প্রান্তের চূড়ান্ত অবস্থানে আসিবার 16 s পর বস্তুটির সরণ,

$$x=10\cos\left[\frac{\pi}{6}\times 16\right]=10\cos\left[2\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$=10\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-5\text{ cm}$$

ঋণাত্মক চিহ্নটির তাৎপর্য এই যে, এই সময় কণাটি উহার গতিপথের মধ্যবিন্দু হইতে ঋণাত্মক প্রান্তের দিকে রহিয়াছে।

এই সময় কণার দশা$=\dfrac{2\pi}{3}\text{ rad}=120°$

উদাহরণ 1.11 m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণাকে l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট A প্রস্থচ্ছেদ-বিশিষ্ট একটি ভরহীন তারের এক প্রান্ত হইতে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক Y হইলে উল্লম্ব অভিমুখে ইহার দোলনের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A point mass m is suspended at the end of a massless wire of length l and cross-section A. If Y is the Young's modulus for the wire, obtain the frequency of oscillation for the simple harmonic motion along the vertical line.]

সমাধান : একটি উল্লম্ব তারের নিম্নপ্রান্তে m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা

ঝুলিতেছে। বস্তুটিকে উহার সাম্যাবস্থান হইতে উল্লম্ব অভিমুখে সামান্য টানিয়া ছাড়িয়া দিলে বস্তুটি সরল দোল গতিতে আন্দোলিত হইতে থাকিবে।

স্বাভাবিক অবস্থায় তারটির দৈর্ঘ্য l। মনে করি, m ভরবিশিষ্ট বস্তুটিকে ঝুলাইয়া দিবার ফলে ইহার দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি হইল l_0। এই অবস্থায় তারের টান T বস্তুর ভর mg-কে প্রতিমিত করে বলিয়া লেখা যায়, $T=mg$ ... (i)

তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক, $Y=\dfrac{mg/A}{l_0/l}$

বা, $Y\dfrac{l_0}{l}.A=mg$ ... (ii)

এইবার মনে করি, m ভরবিশিষ্ট বস্তুটি উল্লম্ব অভিমুখে দুলিতেছে এবং কোন নির্দিষ্ট মুহূর্তে বস্তুটি উহার সাম্যাবস্থা হইতে x দূরত্ব নিচে রহিয়াছে (চিত্র 1.2)।

চিত্র 1.2

এই সময় তারের টান$=Y\left(\dfrac{l_0+x}{l}\right).A$

বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষ বল mg নিম্নাভিমুখী বলিয়া ইহার উপর ক্রিয়াশীল উর্ধ্বমুখী অসম বল,

$$F=Y.\frac{l_0+x}{l}.A-mg$$

$$=Y\frac{l_0+x}{l}A-Y\frac{l_0}{l}.A \text{ [ii হইতে]}$$

$$=\frac{YA}{l}.x$$

কাজেই, সাম্যাবস্থানের দিকে m ভরবিশিষ্ট বস্তুটির ত্বরণ, $f=\dfrac{F}{m}=\dfrac{YA}{ml}x$

$\therefore$ একক সরণে বস্তুর ত্বরণ$=\dfrac{f}{x}=\dfrac{YA}{ml}$

আমরা জানি যে, সরল দোল গতি নিষ্পন্নকারী বস্তুব দোলনের পর্যায়কাল

$$T=2\pi\sqrt{\frac{1}{\text{একক সরণে ত্বরণ}}}=2\pi\sqrt{\frac{ml}{YA}}$$

সুতরাং, বস্তুটির কম্পাঙ্ক $n=\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{YA}{ml}}$

উদাহরণ 1.12 5 lb ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে একটি লম্বা ও হালকা স্প্রিং হইতে ঝুলান হইল। 2 lb-wt অতিরিক্ত বল প্রয়োগ করিলে স্প্রিংটির 4 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য-বৃদ্ধি ঘটে। (a) স্প্রিংটির বল ধ্রুবক K এবং (b) যখন 5 lb ভরবিশিষ্ট বস্তুটিকে নিচের দিকে সামান্য টানিয়া ছাড়িয়া দেওয়া হয় তখন উহার দোলনের কম্পাঙ্ক কত নির্ণয় কর।

[A body of mass 5 lb is suspended by a long and light spring. An additional force of 2 lb-wt stretches the spring 4 inches. Find

(a) the force constant K of the spring and (b) the period of vibration of the body of 5 lb if pulled down a little and then released.]

সমাধান ঃ আমরা জানি যে, বল ধ্রুবক, $K = \frac{\text{বল}, F}{\text{সরণ}, x}$

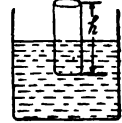
এখানে, বল, F=2 lb-wt এবং সরণ, $x = \frac{4}{12}$ ft $= \frac{1}{3}$ ft

$\therefore$ বল ধ্রুবক, $K = \frac{2}{(1/3)} = 6$ lb-wt/ft $= 6 \times 32$ poundal/ft

বস্তুটির দোলনকাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{6 \times 32}}$ s $= 1{\cdot}01$ s (প্রায়)

উদাহরণ 1.13 ρ ঘনত্ববিশিষ্ট h দৈর্ঘ্যের একটি চোঙ δ ঘনত্বের একটি তরলে উল্লম্বভাবে ভাসিতেছে। চোঙটিকে উল্লম্ব অবস্থায় রাখিয়া উহাকে ঈষৎ চাপিয়া দিলে চোঙটি যে-সরল দোল গতি সম্পাদন করিবে উহার পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

[A cylinder of length h, made of material of density ρ is floating vertically in a liquid of density δ. If the cylinder is depressed a little (keeping it vertical), and then released, find the period of oscillation of the cylinder.]

সমাধান ঃ মনে করি, চোঙটির ব্যাসার্ধ$=r$। ভাসমান অবস্থায় তরলের প্লবতা এবং চোঙের ওজন পরস্পর সমান। চোঙটিকে উল্লম্ব অবস্থায় রাখিয়া উহার অতিরিক্ত x পরিমাণ দৈর্ঘ্য তরলে চাপিয়া ধরিলে প্লবতার জন্য চোঙের উপর ক্রিয়াশীল ঊর্ধ্বমুখী বল$=$ চোঙ-কর্তৃক অপসারিত অতিরিক্ত জলের ওজন$=\pi r^2 x\delta g$

চিত্র 1.3

$\therefore$ তরলের প্লবতার ফলে চোঙের ত্বরণ, f

$$= \frac{\pi r^2 x\delta g}{\text{চোঙের ভর}} = \frac{\pi r^2 \delta g x}{\pi r^2 h\rho} = \frac{\delta g}{h\rho} \cdot x$$

প্রতি একক সরণে চোঙের ত্বরণ$= \frac{f}{x} = \frac{\delta g}{h\rho}$

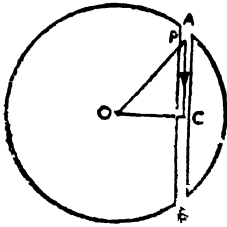
এখন, দোলনকাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\text{একক সরণে ত্বরণ}}} = 2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\delta g}}$

উদাহরণ 1.14 পৃথিবীর মধ্য দিয়া উহার পৃষ্ঠের এক বিন্দু হইতে অপর একটি বিন্দু পর্যন্ত একটি ঘর্ষণহীন সোজা সুড়ঙ্গ কাটা হইল। দেখাও যে, ঐ সুড়ঙ্গের এক প্রান্তে একটি বস্তুকণা ছাড়িয়া দিলে উহা সরল দোল গতিতে আন্দোলিত হইতে থাকিবে। যদি ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান $9{\cdot}8$ m/s^2 হয় এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $6{\cdot}38 \times 10^6$ m হয় তাহা হইলে ঐ বস্তুকণার গতির দোলনকাল নির্ণয় কর।

[A straight frictionless tunnel is bored through the earth from one point of its surface to another. Show that if a particle is dropped at one end of the tunnel, it will execute simple harmonic motion. If the acceleration due to gravity on the earth's surface

is 9·8 m/s² and the radius of the earth is 6·38×10⁶ m, find the period of oscillation of the particle.]

সমাধান ঃ আলোচ্য সুড়ঙ্গ এবং পৃথিবীর কেন্দ্র যে-তলে অবস্থিত 1.4 নং চিত্রে পৃথিবীর সেই তলের ছেদ দেখান হইয়াছে। চিত্রে AB হইল সুড়ঙ্গ এবং O হইল পৃথিবীর কেন্দ্র। মনে করি, আলোচ্য মুহূর্তে বস্তুকণাটি P বিন্দুতে আসিয়াছে। আমরা জানি যে, এই অবস্থায় বস্তুকণার উপর কেবলমাত্র OP ব্যাসার্ধের গোলকটির অভিকর্ষ বল কার্যকর হইবে। বস্তুকণার ভর m হইলে উহার উপর ক্রিয়াশীল কেন্দ্রাভিমুখী বল,

$F=G.\frac{\frac{4}{3}\pi OP^3 \rho m}{OP^2}$, ρ=পৃথিবীর উপাদানের গড় ঘনত্ব এবং G=মহাকর্ষীয় ধ্রুবক।

বা, $F=G.\frac{4}{3}\pi\rho m.OP$

চিত্র 1.4

O হইতে সুড়ঙ্গের অক্ষের উপর OC লম্ব টানা হইল। AB রেখার অভিমুখে F বলের উপাংশ,

$F_0=F\cos\angle OPC$

$=G.\frac{4}{3}\pi\rho\, m.\, OP\cos\angle OPC=G.\frac{4}{3}\pi\rho\, m.\, PC$

এই উপাংশের জন্যই বস্তুকণা সুড়ঙ্গপথে চলে। F-এর অপর উপাংশ সুড়ঙ্গের অভিলম্বে। সুড়ঙ্গ মসৃণ বলিয়া F-এর এই উপাংশে AB রেখা বরাবর বস্তুকণার গতিকে প্রভাবিত করিতে পারে না।

দেখা যাইতেছে যে, বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল বলের সক্রিয় উপাংশ C বিন্দু হইতে কণার দূরত্বের সমানুপাতিক। সুড়ঙ্গের সর্বত্রই ইহা C বিন্দুর অভিমুখী।

সুতরাং, P অবস্থানে আলোচ্য বস্তুকণার ত্বরণ, $f=\frac{F_0}{m}=G\frac{4}{3}\pi\rho.PC$

$$\therefore \quad \frac{\text{ত্বরণ}}{\text{সরণ}}=\frac{f}{PC}=G.\frac{4}{3}\pi\rho$$

আমরা জানি যে, কৌণিক বেগ, $\omega=\sqrt{\frac{\text{ত্বরণ}}{\text{সরণ}}}$ [সমীকরণ (1.9) হইতে]

$$\therefore \quad \frac{2\pi}{T}=\sqrt{G\tfrac{4}{3}\pi\rho} \quad \text{বা,} \quad T=2\pi\sqrt{\frac{3}{4G\pi\rho}} \qquad \cdots \qquad (i)$$

এখন, ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g=\frac{GM}{R^2}$

এখানে, M=পৃথিবীর ভর এবং R হইল পৃথিবীর ব্যাসার্ধ

$$\therefore \quad g=\frac{G.\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{R^2}=G.\tfrac{4}{3}\pi\rho.R \quad \text{বা,} \quad \frac{R}{g}=\frac{3}{4G\pi\rho} \qquad \cdots \qquad (ii)$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

প্রশ্নানুসারে, $R=6{\cdot}38\times10^6$ m এবং $g=9{\cdot}8$ m/s²

$$\therefore \quad T=2\pi\sqrt{\frac{6{\cdot}38\times10^6}{৯{\cdot}৪}}=5067 \text{ s} \quad (\text{প্রায়})$$

$=1$ ঘণ্টা 24 মিনিট (প্রায়)

উদাহরণ 1.15 একটি অনুভূমিক পাতের উপর কিছু পরিমাণ বালি ছড়াইয়া দেওয়া হইল। পাতটি উল্লম্ব অভিমুখে সরল দোল গতি নিষ্পন্ন করিতেছে। যখন ইহার বিস্তার ঠিক 0·125 cm হয় ঠিক তখন বালিগুলি আর সর্বদা পাতটির সহিত সংস্পর্শ বজায় রাখিতে পারে না। পাতটির দোলনের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

($g=980$ cm/s²)

[Some sands are sprinkled on a horizontal plate. The plate is executing simple harmonic motion in the vertical direction. When the amplitude of oscillation of the plate is 0·125 cm, the sands just fail to make continuous contact with the plate. Find the frequency of vibration of the plate. ($g=980$ cm/s²)]

সমাধান: যদি বালিগুলি পাতের উপর না থাকিত তাহা হইলে উহারা অভিকর্ষজ ত্বরণে নিচে পড়িত। যদি পাতটির সর্বোচ্চ অবস্থানে উহার নিম্নাভিমুখী ত্বরণ অভিকর্ষজ ত্বরণ g অপেক্ষা বেশি হয় তাহা হইলে বালিগুলি সর্বদা পাতের সংস্পর্শে থাকিতে পারিবে না। অর্থাৎ, যে-সর্বোচ্চ ত্বরণ পর্যন্ত বালিগুলি সর্বদা পাতের সংস্পর্শে থাকিবে তাহার মান, g।

এই অবস্থায়, $\omega^2 a=g$

$\omega=$পাতের কৌণিক বেগ এবং a হইল ইহার বিস্তার।

$$\therefore \quad \omega=\sqrt{\frac{g}{a}}$$

পাতের কম্পাঙ্ক n হইলে লেখা যায়, $\omega=2\pi n=\sqrt{\frac{g}{c}}$ বা, $n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{a}}$

এখানে, $g=980$ cm/s² এবং $a=0{\cdot}125$ cm

$$\therefore \quad n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{980}{0{\cdot}125}}=14 \text{ Hz} \ (\text{প্রায়})$$

উদাহরণ 1.16 যখন 60 kg ভরবিশিষ্ট এক ব্যক্তি একটি গাড়িতে উঠে তখন গাড়ির ভরকেন্দ্র 0·3 cm নামিয়া যায়। গাড়ির ভর 1000 kg ধরিয়া শূন্য অবস্থায় ইহার স্পন্দনের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[When a man weighing 60 kg gets into a car, the centre of gravity of the car is depressed by 0·3 cm. Assuming the mass of the car to be 1000 kg find the frequency of vibration of the car when it is empty.]

সমাধান: গাড়ির উপর 60 kg ভর চাপাইলে ইহার ভারকেন্দ্রের অবনমন 0·3 cm। কাজেই, গাড়ির কম্পনশীল অংশের প্রত্যানয়ক গুণাঙ্ক

$$K=\frac{mg}{l}=\frac{60\times 9{\cdot}8}{0{\cdot}3\times 10^{-2}}\ N/M=2\times 98\times 10^3\ N/M$$

শূন্য গাড়ির স্পন্দনের দোলনকাল, $T=2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$

এখানে M=শূন্য গাড়ির ভর=1000 kg

$$\therefore\quad T=2\pi\sqrt{\frac{1000}{2\times 98\times 10^3}}=0{\cdot}449\ s$$

কাজেই, গাড়ির স্পন্দনের কম্পাঙ্ক$=\frac{1}{0{\cdot}449}=2{\cdot}23$ Hz

উদাহরণ 1.17 M ভরবিশিষ্ট একটি বায়ুনিরুদ্ধ ঘর্ষণহীন পিস্টনের দ্বারা একটি চোঙাকৃতি পাত্রে বায়ুমণ্ডলীয় চাপ P-তে V আয়তন বায়ু আবদ্ধ রহিয়াছে। দেখাও যে, পিস্টনটিতে বল প্রয়োগ করিয়া উহাকে সামান্য নীচে ঠেলিয়া ছাড়িয়া দিলে পিস্টনটি সরল দোল গতিতে আন্দোলিত হইতে থাকে এবং এই দোল গতির দোলনকাল $\frac{2\pi}{A}\sqrt{\frac{MV}{P}}$ (ধরিয়া লও যে, বায়ুর উষ্ণতা অপরিবর্তিত রহিয়াছে)।

[A volume V of air is enclosed at atmospheric pressure P in a cylindrical vessel of cross-sectional area A by a frictionless air-tight piston of mass M. Show that, on slightly forcing down the piston and then releasing it, the piston oscillates with simple harmonic motion of period $\frac{2\pi}{A}\sqrt{\frac{MV}{P}}$ (Assume that the temperature of the air remains unaltered).

সমাধান : মনে করি, পিস্টনকে সামান্য নিচের দিকে ঠেলিয়া দিলে আবদ্ধ বায়ুর আয়তন হ্রাস হয় dV এবং চাপ বৃদ্ধি হয় dP, এই সময় উষ্ণতা স্থির থাকে বলিয়া বয়েল-এর সূত্রানুসারে লেখা যায়, $PV=(P+dP)(V-dV)$

A
চাপ, P
আয়তন, V

চিত্র 1.5

বা, $PV+VdP-PdV-dPdV=PV$

dP এবং dV ক্ষুদ্র বলিয়া উহাদের গুণফল উপেক্ষা করিয়া পাই, $VdP=PdV$ বা, $dP=\frac{PdV}{V}$ ... (i)

সাম্যাবস্থান হইতে পিস্টনের সরণ dx হইলে লেখা যায়, $dV=Adx$ ... (ii)

সুতরাং, (i) এবং (ii) হইতে পাই, $dP=\frac{PA}{V}dx$

পিস্টনের উপর ক্রিয়াশীল অসম বল, $dF=AdP=\frac{PA^2}{V}dx$

পিস্টনের ত্বরণ, $f=\frac{dF}{M}=\frac{PA^2}{MV}dx$ ... (iii)

কাজেই এক্ষেত্রে পিস্টনের ত্বরণ ইহার সরণের সমানুপাতিক। এই ত্বরণ

পিস্টনের সাম্যাবস্থার অভিমুখে ক্রিয়াশীল। সুতরাং, পিস্টনটি সরল দোল গতি সম্পাদন করিবে। আমরা জানি যে, সরল দোল গতির দোলনকাল,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{1}{\text{একক সরণে বস্তুর ত্বরণ}}} \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

সমীকরণ (iii) হইতে পাই, $\frac{\text{ত্বরণ}\,(f)}{\text{সরণ}\,(dx)}=\frac{PA^2}{MV}$

$$\therefore \quad T=2\pi\sqrt{\frac{MV}{PA^2}}=\frac{2\pi}{A}\sqrt{\frac{MV}{P}}$$

প্রশ্নাবলী 1

1. 4 cm দীর্ঘ একটি সরলরেখার উপর একটি বস্তুকণা সরল দোল গতি সম্পাদন করিতেছে। সরলরেখাটির মধ্যবিন্দু অতিক্রম করিবার সময় বস্তুকণার গতিবেগ 12 cm/s হইলে উহার গতিবেগ কত হইবে ?

[A particle is executing simple harmonic motion along a straight line of length 4 cm. If the velocity of the particle, when it passes through the midpoint of its path, is 12 cm/s, what is its time-period ?] [1·047 s]

2. সরল দোল গতিসম্পন্ন একটি বস্তুকণার বিস্তার 2 cm এবং দোলনকাল 1·5 s। কণাটি উহার গতিপথের মধ্যবিন্দু হইতে $\sqrt{3}$ cm দূরত্বে আসিতে কত সময় লয় ?

[The amplitude and time-period of a particle executing simple harmonic motion is 2 cm and 1·5 s respectively. What is the time taken by the particle to come at a distance of $\sqrt{3}$ cm from the midpoint of its path ?] [0·25 s]

3. একটি কণার সরল দোল গতির দোলনকাল 12 s এবং বিস্তার 10 cm হইলে কণাটি উহার ধনাত্মক প্রান্তের চূড়ান্ত অবস্থান দিয়া যাইবার 14 s পর উহার সরণ ও দশা কত হইবে ?

[If the period of simple harmonic motion executed by a particle is 12 s and its amplitude is 10 cm, what is the phase and displacement of the particle at a time 14 s after a passage through its extreme positive end ?] [60°, 5 cm]

4. একটি সুর-শলাকার প্রং-এর শীর্ষবিন্দুটি যখন 512 Hz কম্পাঙ্কে সরল দোল গতি সম্পাদন করে তখন ইহার সর্বোচ্চ দ্রুতি 4 m/s। ইহার দোলন-বিস্তার কত ?

[The tip of the prong of a tuning fork has a maximum speed of 4 m/s while executing simple harmonic motion of frequency 512 Hz. What is its amplitude ?] [1·2 mm]

5. একটি সরলরেখা বরাবর সরল দোল গতি নিষ্পন্নকারী কোন কণা যখন উহার সাম্যাবস্থান হইতে 3 cm এবং 5 cm দূরে থাকে তখন উহার বেগ যথাক্রমে 8 cm/s এবং 2 cm/s। কম্পনের বিস্তার এবং কণার দোলনকাল নির্ণয় কর।

[A particle executing simple harmonic motion in a straight line has velocities of 8 cm/s and 2 cm/s when at positions 3 cm and 5 cm respectively from its position of equilibrium. Find the amplitude of vibrations and the time period of the particle.] [5·1 cm. 3·24 s]

6. কোন বস্তুকণা সরল দোল গতি সম্পাদন করিতেছে। সাম্যাবস্থা হইতে কণাটির দূরত্ব যখন x_1 এবং x_2 তখন উহার গতিবেগ যথাক্রমে v_1 এবং v_2 হইলে দেখাও যে, কণাটির সরল দোল গতির পর্যায়কাল,

$$T=2\pi\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{v_1^2-v_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

[A particle is executing simple harmonic motion. When the particle is at distances x_1 and x_2 from its mean position, the values of its velocity are v_1 and v_2 respectively. Show that, the time-period of the simple harmonic motion of the particle is

$$T=2\pi\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{v_1^2-v_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

7. সরল দোল গতিসম্পন্ন একটি বস্তুকণার দোলনকাল 2π s এবং মোট শক্তি 10240 erg। মধ্যবিন্দু অতিক্রম করিবার $\pi/4$ s পর কণাটির সরণ $2\sqrt{2}$ cm হইলে উহার ভর এবং দোলন-বিস্তার নির্ণয় কর।

[The time-period of a particle executing simple harmonic-motion is 2π s and its total energy is 10240 erg. If the displacement of the particle $\pi/4$ s after passing through the middle point of its path is $2\sqrt{2}$ cm, find its mass and amplitude of oscillation.]

[80 g, 16 cm]

8. একটি বস্তুকণা 4 cm দীর্ঘ একটি সরলরেখা বরাবর সরল দোল গতি সম্পাদন করিতেছে। ঐ রেখার মধ্যবিন্দু অতিক্রম করিবার সময় উহার গতিবেগ 12 cm/s হইলে উহার দোলনকাল ও কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A particle is executing simple harmonic motion along a straight line 4 cm in length. Its velocity when it crosses the middle point of its path is 12 cm/s. Find its time-period and frequency.]

[1·05 s, 0·95 Hz]

9. 250 g ভরবিশিষ্ট একটি কণা 5 cm বিস্তার লইয়া সরল দোলগতি নিষ্পন্ন করিতেছে। যখন কণাটি উহার গতিপথের মধ্যবিন্দু হইতে 2 cm দূরে অবস্থিত তখন উহার ত্বরণ 8 cm/s². যখন বস্তুকণাটি মধ্যবিন্দু হইতে 3 cm দূরে অবস্থিত তখন (i) ইহার গতিবেগ, (ii) ত্বরণ এবং (iii) ইহার উপর ক্রিয়াশীল বল নির্ণয় কর।

[A partiele of mass 250 g excutes simple harmonic motion

with an amplitude of 5 cm. When the particle is 2 cm away from the mean position of its path, its acceleration is 8 cm/s^2. Find (i) the velocity, (ii) the acceleration and (iii) the force acting on the particle when it is 3 cm away from the mean position.]

[8 cm/s, 12 cm/s^2, 3000 dyn]

10. 2 g ভরবিশিষ্ট একটি কণা 2 s দোলনকাল এবং 10 cm বিস্তার লইয়া সরল দোল গতি সম্পাদন করিতেছে। কণাটি যখন উহার সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে এবং যখন কণাটি ঐ অবস্থান হইতে 5 cm দূরে অবস্থিত তখন উহার গতিশক্তি নির্ণয় কর।

[A particle of mass 2 g executes simple harmonic motion of periodic time 2 s and amplitude 10 cm. Find the kinetic energy of the particle when passing through its equilibrium position and when displaced 5 cm from that position.]

[$2{\cdot}47 \times 10^{-5}$ J, $1{\cdot}85 \times 10^{-5}$ J]

11. একটি বস্তুকণা সরল দোলগতি নিষ্পন্ন করিতেছে। যদি গতিপথের মধ্যবিন্দু হইতে 4 ft এবং 5 ft দূরত্বে ইহার গতিবেগ যথাক্রমে 13 ft/s এবং 5 ft/s হয় তাহা হইলে ইহার দোলনকাল এবং দোলনবিস্তার নির্ণয় কর।

[A particle executes simple harmonic motion. If the velocities at distances 4 ft and 5 ft from the middle point of its path are 13 ft/s and 5 ft/s respectively, find the time period and the amplitude of oscillation.]

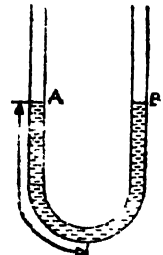
(Cambridge Higher School Certificate) [1·57 s, 51·5 ft]

12. 16 cm লম্বা একটি ধাতব চোঙ পারদে ভাসিতেছে। ইহাকে সামান্য ডুবাইয়া ছাড়িয়া দেওয়া হইল। চোঙের দোলনের দোলনকাল নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ=981 cm/s^2, ধাতুর ঘনত্ব=8·9 g cm^3 এবং পারদের ঘনত্ব=13·6 g/cm^3। ঘর্ষণ ও অন্যান্য প্রক্রিয়া উপেক্ষা কর।

[A metal cylinder 16 cm long floats vertically in mercury. It is depressed a small amount and then released. Find the period of its oscillation. Assume that the acceleration due to gravity= 981 cm/s^2, the density of the metal=8·9 g/cm^3 and the density of mercury=13·6 g/cm^3. Neglect friction and other effects.]

[0·649 s প্রায়]

13. দেখাও যে, যদি U নলের এক বাহুতে ধীরে ফুঁ দিয়া উহার তরলকে অবনমিত করা যায় তাহা হইলে উহার দুই বাহুর তরল তলদ্বয় উহাদের সাম্যাবস্থা A এবং B-এর দুই পাশে সরল দোল গতিতে আন্দোলিত হইতে থাকে (চিত্র 1.6)। এই দোল গতির দোলনকাল নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, U-নলের তরলস্তম্ভের মোট দৈর্ঘ্য h।

A B

চিত্র 1.6

[Show that, if the liquid on one side of a U-tube depressed by blowing gently down that side, the levels of the liquid start oscillating harmonically about their respective mean positions A and B (Fig. 1.6). Find the period of oscillation. Assume that the total length of the liquid column in the U-tube is h.]

[$2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, g=অভিকর্ষজ ত্বরণ]

14. 100 g ভরবিশিষ্ট একটি নল উল্লম্বভাবে 0·8 আপেক্ষিক গুরুত্ববিশিষ্ট তরলে ভাসিতেছে। তরল-তলে নলটির প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল 1 cm². দেখাও যে, উহা উপর-নিচে দুলিতে থাকিলে ইহা সরল দোলগতি নিষ্পন্ন করে। ইহার দোলনকাল নির্ণয় কর।

[A tube of mass 100 g floats vertically in a liquid of specific gravity 0·8. The area of its cross-section at the level of the liquid is 1 cm². Show that when it oscillates up and down, its motion is simple harmonic in nature. Calculate its period of oscillation.]

[12·57 s]

15. 8 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে একটি লম্বা ও হাল্কা স্প্রিং হইতে ঝুলাইয়া দেওয়া হইল। অতিরিক্ত 1 kw-gt বলের ক্রিয়ায় ইহার 10 cm দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি ঘটে। (a) স্প্রিংটির বল-ধ্রুবক এবং (b) যদি বস্তুটিকে সামান্য নিচের দিকে টানিয়া ছাড়িয়া দেওয়া হয় তাহা হইলে উহার কম্পনের দোলনকাল নির্ণয় কর।

[A body of mass 8 kg is suspended by a long and light spring. An additional force of 1 kg-wt stretches the spring by 10 cm. Calculate (a) the force constant of the spring, and (b) the period of vibration of the body if pulled down and then released.]

[(a) $9{\cdot}8\times10^{4}$ dyn/cm, (b) 1·8 s]

16. একটি দীর্ঘ ও হাল্কা স্প্রিং হইতে একটি নির্দিষ্ট ভার ঝুলাইয়া দিলে উহার 6 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি হয়। ভারটিকে নিচের দিকে সামান্য টানিয়া দিলে উহা যে-কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হইতে থাকিবে তাহা নির্ণয় কর।

[A certain weight when hung from a long and light spring streches it 6 inches. Find the period of vibration that sets in when the weight is pulled down a little and then released.]

[0·785 s]

17. একটি স্প্রিং হইতে ঝুলান একটি সীসার গোলক উল্লম্বরেখা বরাবর আন্দোলিত হইতেছে। যদি সীসার গোলকের পরিবর্তে স্প্রিং হইতে একই আকারের একটি অ্যালুমিনিয়ামের গোলক ঝুলান হয় তাহা হইলে দোলনকালের কীরূপ পরিবর্তন হইবে? ধরিয়া লও যে, সীসার আপেক্ষিক গুরুত্ব=11·3 এবং অ্যালুমিনিয়ামের আপেক্ষিক গুরুত্ব=2·6।

[A lead sphere suspended from a spring executes oscillations along the vertical line. How will the period of oscillation change if an aluminium sphere of same size is attached to the spring

instead of the lead sphere. Assume that the specific gravity of lead=11·3 and that of alumiuium=2·6.]

18. 1·6 cm ব্যাসবিশিষ্ট একটি U-নলে 5 kg ভরবিশিষ্ট পারদ ঢালা হইল। পারদস্তম্ভকে খানিকটা আন্দোলিত করিলে উহা সাম্যাবস্থানের উপর-নিচে অবাধে দুলিতে থাকে। এই আন্দোলনের দোলনকাল নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, পারদের ঘনত্ব=$13 \cdot 6$ g/cm^3।

[5 kg of mercury is poured into a U-tube with uniform bore of 1·6 cm diameter. When the mercury column is slightly disturbed, it oscillates up and down freely about the position of equilibrium. Find the time period of their oscillation. Assume that density of mercury=13·6 g/cm^3.] [3·68 s]

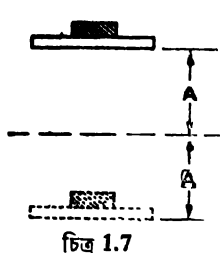
19. একটি বেলনাকার পাত্রের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল A; ইহাতে P চাপে আবদ্ধ V আয়তন গ্যাস M ভরবিশিষ্ট একটি পিস্টনকে ঠিক স্থির অবস্থায় ধরিয়া রাখিতে পারে। পিস্টনটি চোঙের মধ্য দিয়া অবাধে চলিতে পারে। পিস্টনটির সামান্য সরণ ঘটাইয়া ইহাকে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। দেখাও যে, ইহা সরল দোলগতি সম্পন্ন করিবে। যদি গ্যাসের চাপ ও আয়তনের পরিবর্তনের সময় 'PV^γ=ধ্রুবক' হয়, তাহা হইলে পিস্টনের দোলনকাল নির্ণয় কর।

[A cylindrical vessel having an area of cross-section A contains a volume V of a gas at a pressure P which is just sufficient to support a piston of mass M which can slide freely in the cylinder. The piston is given a small displacement and then released. Show that the motion of the piston will then be simple harmonic. Find an expression for the periodic time of this motion if the pressure-volume relation of the gas during the accompanying changes is given by PV^γ=constant.] $\left[\frac{2\pi}{A}\sqrt{\frac{MV}{\gamma P}}\right]$

20. 1 cm বহিব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি পরখ-নলে কয়েক টুকরা সীসা রহিয়াছে। সীসাসমেত পরখ-নলটির মোট ভর 40 g। পরখ-নলটি একটি তরলে উল্লম্বভাবে ভাসিতেছে। এখন যদি ইহাকে তরলের মধ্যে সামান্য ঠেলিয়া ছাড়িয়া দেওয়া হয় তাহা হইলে উহা 1 s দোলনকাল লইয়া দুলিতে থাকে। তরলের ঘনত্ব কত? ঘর্ষণ উপেক্ষা কর। (g=980 cm/s^2)

[A test tube of external radius 1 cm contains some pieces of lead. The total mass of the test tube including the pieces of lead is 40 g. The test tube floats vertically in a liquid. If it is slightly pushed into the liquid and then released, it oscillates with a period of 1 s. What is the density of the liquid? Neglect friction. (g=980 cm/s^2)] [0·513 g/cm^3]

21. একটি স্ট্যাণ্ডের উপর একটি ব্লক স্থাপন করা হইল (চিত্র 1.7)। স্ট্যাণ্ডটি উল্লম্ব রেখা বরাবর A বিস্তার লইয়া সরল দোলগতি সম্পাদন করিতেছে। এই

দোলনের ন্যূনতম দোলনকাল কত হইলে স্ট্যাণ্ডের উপর অবস্থিত ব্লকটি ঐ স্ট্যাণ্ড হইতে পৃথক হইবে না ?

চিত্র 1.7

[A block is placed on a stand (Fig. 1.7). The stand makes simple harmonic oscillations in a vertical line, the amplitude of oscillation being A. What must be the least period of these oscillations, if the block lying on the top of the stand is not to be separated from it ?] $\left[2\pi\sqrt{\frac{A}{g}}\right]$

22. একটি পরখ-নলে সীসার গুলি ভরা হইল যাহাতে উহা উল্লম্বভাবে কোন তরলে ভাসে। দেখাও যে, পরখ-নলটিকে তরলে আরও কিছুটা ডুবাইয়া নিমজ্জক বল প্রত্যাহার করিলে পরখ-নলটিতে যে-উল্লম্ব কম্পনের সৃষ্টি হয় উহা সরল দোল গতি।

দেখা গেল যে, জলে নিমজ্জিত অবস্থায় এইরূপ একটি পরখ-নলের দোলন-কাল 1·80 s এবং প্যারাফিন তেলে নিমজ্জিত অবস্থায় ইহার দোলন-কাল 2·01 s। প্যারাফিন তেলের আপেক্ষিক ঘনত্ব কত ?

[A test-tube is loaded with lead shot so that it floats vertically in a liquid. Show that after being further immersed in the liquid, the vertical oscillations of the test-tube that result after the removal of the immersing force are simple harmonic.

The time period for vertical oscillations of such a test-tube when immersed in water is found to be 1·80 s and when immersed in paraffin oil is 2·01 s. What is the relative density of the paraffin oil ?] [0·8]

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

তরঙ্গ ও উহার ধর্ম

2.1 কোন তরঙ্গের বেগ, কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যকে যথাক্রমে v, n এবং λ দ্বারা সূচিত করিলে লেখা যায়, $v=n\lambda$ ... (2.1)

অর্থাৎ, **তরঙ্গ-বেগ = কম্পাঙ্ক × তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য**

2.2 তরঙ্গ-প্রবাহের অভিমুখে দুইটি পার্শ্ববর্তী কণার দূরত্ব x হইলে এবং উহাদের দশার পার্থক্য ϕ হইলে লেখা যায়,

$$\phi=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x \qquad \cdots \qquad (2.2)$$

বা, **দশার পার্থক্য** $=\frac{2\pi}{\lambda}\times$ **পথের পার্থক্য**

2.3 চল-তরঙ্গের সমীকরণঃ ধনাত্মক x-অক্ষাভিমুখী চল-তরঙ্গের সমীকরণ হইল, $y=a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)$ ... (2.3)

অনুরূপভাবে, ঋণাত্মক x-অক্ষাভিমুখী চল-তরঙ্গের সমীকরণ হইল

$$y=a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt+x) \qquad \cdots \qquad (2.4)$$

2.4 ডপ্‌লার প্রক্রিয়াঃ (i) উৎস স্থির, শ্রোতা গতিশীল—যখন শ্রোতা গতিশীল, কিন্তু শব্দের উৎস স্থির তখন শব্দের কম্পাঙ্ক,

$$f'=f\times\left(\frac{V\pm V_0}{V}\right) \qquad \cdots \qquad (2.5)$$

এখানে f=উৎসের কম্পাঙ্ক বা শব্দের প্রকৃত কম্পাঙ্ক

f'=শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক

V=শব্দের গতিবেগ এবং V_0=শ্রোতার বেগ

শ্রোতা যখন উৎসের অভিমুখে গতিশীল তখন ধনাত্মক চিহ্নটি এবং শ্রোতা যখন উৎস হইতে দূরে সরিয়া যাইতে থাকে তখন ঋণাত্মক চিহ্নটি ধরিতে হইবে।

(ii) শ্রোতা স্থির, কিন্তু উৎস গতিশীল—এক্ষেত্রে, শব্দের আপাত কম্পাঙ্কের পরিমাণ

$$f'=\frac{V}{V\pm V_s}\cdot f \qquad \cdots \qquad (2.6)$$

এখানে V_s হইল উৎসের বেগ। অন্য রাশিগুলি পূর্বের অনুরূপ। উৎস যখন শ্রোতার দিকে অগ্রসর হইতেছে তখন 2.6 নং সমীকরণের হরের ঋণাত্মক চিহ্নটি এবং উৎস যখন শ্রোতা হইতে দূরে সরিয়া যাইতেছে তখন 2.6 নং সমীকরণের হরের ধনাত্মক চিহ্নটি প্রযোজ্য হইবে।

(iii) যখন উৎস ও শ্রোতা উভয়েই গতিশীল—যখন শ্রোতা এবং উৎস উভয়েই গতিশীল তখন শ্রোতা যে-শব্দ শুনিবে তাহার আপাত কম্পাঙ্ক কত হইবে তাহা (2.5) এবং (2.6) সমীকরণ হইতে সহজেই লেখা যায়। এক্ষেত্রে আপাত কম্পাঙ্কের সাধারণ সমীকরণটি হইবে নিম্নরূপ—

$$f'=\frac{(V\pm V_0)}{(V\pm V_s)}\cdot f \qquad \cdots \qquad (2.7)$$

উৎস এবং শ্রোতা যখন উহাদের সংযোজী সরলরেখা বরাবর পরস্পরের দিকে আগাইয়া আসিতে থাকে তখন উপরের চিহ্নগুলি (অর্থাৎ, লবের ধনাত্মক চিহ্ন এবং হরের ঋণাত্মক চিহ্ন) প্রযোজ্য হইবে। উৎস ও শ্রোতা যখন পরস্পর দূরে সরিয়া যাইতে থাকে তখন নিচের চিহ্নগুলি (অর্থাৎ, লবের ঋণাত্মক চিহ্ন এবং হরের ধনাত্মক চিহ্ন) ব্যবহার করিতে হইবে।

আলোর ক্ষেত্রে ডপ্‌লার প্রক্রিয়া : আলোক-তরঙ্গের ক্ষেত্রে ডপ্‌লার প্রক্রিয়ার প্রভাবে কম্পাঙ্কের পরিবর্তনকে নিম্নের সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায়—

$$f' = f\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

এখানে, f'=আলোক-তরঙ্গের আপাত কম্পাঙ্ক, f=উৎস হইতে নিঃসৃত আলোক-তরঙ্গেব কম্পাঙ্ক, c=আলোর গতিবেগ, v=উৎস ও দর্শকের আপেক্ষিক গতিবেগ। যখন দর্শক ও উৎস পরস্পরের দিকে আগাইয়া আসিতে থাকে তখন v-এর মান ধনাত্মক এবং দর্শক ও উৎস পরস্পর হইতে দূরে সরিয়া যাইতে থাকে তখন v-এর মান ঋণাত্মক ধরা হয়।

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 2.1 5 cm তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট তরঙ্গের গতিপথে 1 cm দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর দশার অন্তর নির্ণয় কর।

[Find the phase difference between points 1 cm apart along the direction of propagation of an wave of wavelength 5 cm.]

সমাধান : আমরা জানি যে, দশার অন্তর (Phase difference),

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \times \text{পথের পার্থক্য (Path difference)}$$

এখানে, λ=তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য=5 cm

$$\therefore \quad \phi = \frac{2\pi}{5} \times 1 = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

উদাহরণ 2.2 দুইটি সুরশলাকার কম্পাঙ্ক যথাক্রমে 300 Hz এবং 450 Hz হইলে উহারা বায়ুতে যে-শব্দতরঙ্গ সৃষ্টি করে তাহাদের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের তুলনা কর।

[Compare the wave length of the sound waves produced in air by two tuning forks whose frequencies of vibration are 300 Hz and 450 Hz respectively.]

সমাধান : মনে করি, বায়ুতে শব্দের গতিবেগ=v cm/s

আমরা জানি যে, $v = n\lambda$

ধরি, 300 Hz এবং 450 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরশলাকা কম্পিত হইলে বায়ুতে যে-তরঙ্গ সৃষ্টি হয় উহাদের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য যথাক্রমে λ_1 এবং λ_2

$$\therefore \quad v = 300 \times \lambda_1 = 450\,\lambda_2 \quad \therefore \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{450}{300} = \frac{3}{2}$$

উদাহরণ 2.3 সমুদ্রজলে শব্দের গতিবেগ 5020 ft/s। যে-শব্দ-তরঙ্গের কম্পাঙ্ক 512 Hz সমুদ্রজলে উহার তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[The velocity of sound in sea-water is 5020 ft/s. Find the wavelength in sea-water of a sound wave whose frequency is 512 Hz.]

সমাধান ঃ আমরা জানি, $v=n\lambda$
এখানে $v=5020$ ft/s, $n=512$ Hz

$$\therefore \quad \lambda=\frac{v}{n}=\frac{5020}{512}=9\cdot8 \text{ ft (প্রায়)}$$

উদাহরণ 2.4 কাচে যে শব্দতরঙ্গের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য 175 cm উহা বায়ুর মধ্য দিয়া চলিতে লাগিল। কাচে এবং বায়ুতে শব্দের গতিবেগ যথাক্রমে 5250 m/s এবং 330 m/s হইলে বায়ুতে ঐ শব্দতরঙ্গের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Sound waves of wave-length 175 cm in glass travels into air. Calculate the wavelength of the sound wave in air, if the velocity of sound in glass is 5250 m/s and in air 330 m/s.]

সমাধান ঃ আমরা জানি যে, $n=\frac{v}{\lambda}$ (1)

কোন তরঙ্গ যখন এক মাধ্যম হইতে অন্য মাধ্যমে প্রবেশ করে তখন উহার গতিবেগ ও তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন হয়, কিন্তু উহার কম্পাঙ্ক অপরিবর্তিত থাকে।

কাচে শব্দের বেগ, $v_1=5250$ m/s
বায়ুতে শব্দের বেগ, $v_2=330$ m/s
কাচে শব্দের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য, $\lambda_1=175$ cm $=1\cdot75$ m
মনে করি, বায়ুতে শব্দের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য $=\lambda_2$

$\therefore$ সমীকরণ (1) হইতে লেখা যায়, $n=\frac{v_1}{\lambda_1}=\frac{v_2}{\lambda_2}$

$$\text{বা,} \quad \lambda_2=\frac{v_2}{v_1}\times\lambda_1=\frac{330}{5250}\times1\cdot75 \text{ m}=0\cdot11 \text{ m}$$

উদাহরণ 2.5 কোন নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কে কম্পমান একটি বস্তু A মাধ্যমে 5 cm তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের এবং B মাধ্যমে 7·5 cm তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের শব্দতরঙ্গ সৃষ্টি করে। A এবং B মাধ্যমে শব্দের গতিবেগের তুলনা কর।

[A body vibrating at a constant frequency sends out waves of length 5 cm in a medium A and waves of length 7·5 cm in a medium B. Compare the velocities of the sound waves in the media A and B.]

সমাধান ঃ মনে করি, বস্তুটির কম্পাঙ্ক $=n$/s
আমরা জানি যে, গতিবেগ, $v=$ কম্পাঙ্ক $(n)\times$ তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য (λ) ... (i)
A মাধ্যমে শব্দ-তরঙ্গের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য $=5$ cm
A মাধ্যমে শব্দের গতিবেগ v_1 হইলে সমীকরণ (1) হইতে লেখা যায়,

$$v_1=n\times5 \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

অনুরূপভাবে, B মাধ্যমে শব্দের গতিবেগ v_2 হইলে লেখা যায়,

$$v_2=n\times7\cdot5 \qquad \cdots \quad \text{(iii)}$$

কেননা, B মাধ্যমে শব্দতরঙ্গের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য 7·5 cm

সমীকরণ (ii) এবং (iii) হইতে পাই, $\frac{v_1}{v_2}=\frac{5}{7\cdot5}=\frac{2}{3}$

অর্থাৎ, $v_1 : v_2 = 2 : 3$

উদাহরণ 2.6 তিনটি সুরশলাকার কম্পাঙ্ক যথাক্রমে 123 Hz, 369 Hz এবং 615 Hz ; ইহারা বায়ুতে যে-শব্দতরঙ্গ সৃষ্টি করে তাহাদের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

[The frequencies of three tuning forks are 123 Hz, 369 Hz and 615 Hz respectively. Compare the wavelength of sound produced by them in air.]

সমাধান : মনে করি, বায়ুতে শব্দের গতিবেগ = V

123/s কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরশলাকার দ্বারা উৎপন্ন শব্দতরঙ্গের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য $=\lambda_1$

369/s কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরশলাকার দ্বারা উৎপন্ন শব্দতরঙ্গের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য $=\lambda_2$

এবং 615/s কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরশলাকার দ্বারা উৎপন্ন তরঙ্গের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য $=\lambda_3$

আমরা জানি যে, গতিবেগ $(v)=$ কম্পাঙ্ক $(n)\times$ তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য (λ)

$\therefore\quad v=123\lambda_1=369\lambda_2=615\lambda_3$

বা, $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \frac{1}{123} : \frac{1}{369} : \frac{1}{615}$

বা, $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 15 : 5 : 3$

উদাহরণ 2.7 একটি সুরশলাকার কম্পাঙ্ক 256/s এবং সুরশলাকাটি যতক্ষণে 32 বার কম্পিত হয় ততক্ষণে শব্দ 40 m দূরে যায়। সুরশলাকা হইতে নিঃসৃত শব্দের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য ও শব্দের গতিবেগ নির্ণয় কর।

[The frequency of a tuning fork is 256/s and sound travels to a distance of 40 m while the fork executes 32 vibrations. Find the wavelength of the note emitted by the fork and the velocity of sound.]

সমাধান : সুরশলাকার কম্পাঙ্ক 256/s বলিয়া 32 বার কম্পিত হইতে উহা সময় লয় $t=\frac{32}{256}\text{ s}=\frac{1}{8}\text{ s}$

প্রশ্নের শর্তানুসারে, শব্দ $\frac{1}{8}$ s সময়ে 40 m দূরত্ব অতিক্রম করে। কাজেই, 1 s সময়ে শব্দ যে-দূরত্ব অতিক্রম করে তাহার মান

$$=\frac{40}{\frac{1}{8}}=40\times8=320\text{ m}$$

কাজেই, শব্দের গতিবেগ = 320 m/s

সুরশলাকাটি 32 বার কম্পিত হইলে শব্দ 40 m যায়

$\therefore$ সুরশলাকা 1 বার কম্পিত হইলে শব্দ $\frac{40}{32}$ m যায়।

$\therefore$ উৎপন্ন শব্দের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য $=\frac{40}{32}=1\cdot25$ m

উদাহরণ 2.8 একটি তার বরাবর একটি চল-তরঙ্গ আগাইয়া যাইতেছে। ইহার সমীকরণ $y=10 \sin 16\pi\left(t-\frac{x}{5000}\right)$

এখানে x এবং y-কে সেন্টিমিটার এককে এবং t-কে সেকেণ্ড এককে প্রকাশ করা হইয়াছে। এই তরঙ্গের (i) বিস্তার, (ii) কম্পাঙ্ক, (iii) দ্রুতি এবং (iv) তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[A progressive wave is moving along a string. Its equation is given by $y=10 \sin 16\pi\left(t-\frac{x}{5000}\right)$

where x and y are expressed in centimetre and t in second. Find (i) the amplitude. (ii) the frequency, (iii) the speed and (iv) the wavelength of this wave.]

সমাধান : চল-তরঙ্গের সমীকরণ নিম্নরূপ :

$$y=a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)=a \sin \frac{2\pi v}{\lambda}\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

$$=a \sin 2\pi n\left(t-\frac{x}{v}\right) \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

এখানে, a হইল তরঙ্গের বিস্তার, v হইল তরঙ্গের বেগ এবং n হইল ইহার কম্পাঙ্ক। আলোচ্য চল-তরঙ্গের সমীকরণ

$$y=10 \sin 16\pi\left(t-\frac{x}{5000}\right) \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) তুলনা করিয়া পাই,

$2\pi n=16\pi$ বা $n=8$ Hz

বিস্তার, $a=10$ cm, তরঙ্গের দ্রুতি, $v=5000$ cm/s

∴ তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য, $\lambda=\frac{v}{n}=\frac{5000}{8}=625$ cm

উদাহরণ 2.9 একটি পুলিশের গাড়ির সাইরেনের কম্পাঙ্ক 1000 Hz। যদি গাড়িটি স্থির কোন ব্যক্তির দিকে 100 ft/s দ্রুতিতে অগ্রসর হইতে থাকে তাহা হইলে ঐ ব্যক্তি কী কম্পাঙ্কের শব্দ শুনিবে? ধরিয়া লও যে, শব্দের গতিবেগ=1100 ft/s।

[The frequency of a police car siren is 1000 Hz. If the car approaches a stationary observer at a speed of 100 ft/s, what is the frequency of the sound heard by him? Assume that the velocity of sound=1100 ft/s.]

সমাধান : প্রশ্নানুসারে, শ্রোতা স্থির এবং উৎস শ্রোতার দিকে আগাইতেছে। এক্ষেত্রে, শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক f' এবং প্রকৃত কম্পাঙ্ক f এর সম্পর্কটি নিম্নরূপ :

$$f'=f\times\frac{V}{V-V_s}$$

এখানে, $V = 1100$ ft/s, $V_s = 100$ ft/s

$\therefore \quad f' = 1000 \times \frac{1100}{1100-100} = 1100$ Hz

উদাহরণ 2.10 একটি ট্রেন A স্থির বায়ুর মধ্য দিয়া 40 m/s বেগে চলিতেছে এবং এই সময় ইহার হুইশ্ল হইতে 600 Hz কম্পাঙ্কের শব্দ নিঃসৃত হইতেছে। (i) ট্রেনের সম্মুখে এবং পশ্চাতে বিদ্যমান কোন স্থির শ্রোতার নিকট এই শব্দের কম্পাঙ্ক কী হইবে? (ii) বিপরীত দিকে চলমান অন্য একটি ট্রেন B ট্রেন A-কে 100 m/s বেগে অতিক্রম করিয়া গেল। A ট্রেনটিকে অতিক্রম করিবার পূর্বে এবং পরে B ট্রেনের আরোহীরা A ট্রেনের হুইশ্লের যে-শব্দ শুনিবে তাহার কম্পাঙ্ক কী হইবে? বায়ুতে শব্দের বেগ $= 340$ m/s।

[A train A travels at a speed of 40 m/s in still air while its whistle emits sound of frequency 600 Hz. (i) What are the frequencies of the sound emitted by the whistle as received by a stationary observer in front of and behind the train. (ii) Another train B, moving in opposite direction, is passing the train A at a speed of 100 m/s. What are the frequencies of the sound emitted by the whistle as heard by the passengers in the train B before and after they pass the train A.]

সমাধান: (i) ট্রেনের সম্মুখে অবস্থিত স্থির-শ্রোতার নিকট হুইশ্লের শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক, $f_1 = f \times \frac{V}{V - V_s}$

এখানে, $V =$ শব্দের বেগ $= 340$ m/s, $V_s =$ A ট্রেনের বেগ $= 40$ m/s এবং $f = 600$ Hz

$\therefore \quad f_1 = 600 \times \frac{340}{340-40} = 680$ Hz

A ট্রেনের পশ্চাতে অবস্থিত শ্রোতার নিকট হুইশ্লের শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক,

$$f_1' = f \times \frac{V}{V + V_s}$$

$$= 600 \times \frac{340}{340+40} = 600 \times \frac{34}{38} = 536{\cdot}8 \text{ Hz (প্রায়)}$$

(ii) B ট্রেনটি A ট্রেনকে অতিক্রম করিবার পূর্বে B ট্রেনের আরোহীদের নিকট A ট্রেনের হুইশ্লের শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক f_2 হইলে লেখা যায়,

$$f_2 = f \times \frac{V + V_0}{V - V_s}$$

কেননা, এক্ষেত্রে উৎস শ্রোতার দিকে এবং শ্রোতা উৎসের দিকে আগাইতেছে।

এখানে, $f = 600$ Hz, $V = 340$ m/s, $V_0 = 100$ m/s এবং $V_s = 40$ m/s

$\therefore \quad f_2 = 600 \times \frac{340+100}{340-40} = 600 \times \frac{440}{300} = 880$ Hz

B ট্রেনটি A ট্রেনটিকে অতিক্রম করিবার পর B ট্রেনের আরোহীদের নিকট A ট্রেনের হুইশ্লের শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক f_2' হইলে লেখা যায়,

$$f_2' = f \times \frac{V - V_0}{V + V_s}$$

কেননা, এ ক্ষেত্রে উৎস শ্রোতা হইতে এবং শ্রোতা উৎস হইতে দূরে সরিয়া যাইতেছে।

$$\therefore \quad f_2 = 600 \times \frac{340-100}{340+40} = 600 \times \frac{240}{380} = 379 \text{ Hz} \text{ (প্রায়)}$$

উদাহরণ 2.11 একটি মোটরগাড়ি 72 km/hr দ্রুতিতে একটি উচ্চ দেওয়ালের দিকে উহার লম্বাভিমুখে অগ্রসর হইতেছে। গাড়ির চালক 500 Hz কম্পাঙ্কের হর্ন বাজাইতেছে। চালকের নিকট দেওয়াল হইতে প্রতিফলিত শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক কত হইবে? শব্দের বেগ=340 m/s।

[A motor car is moving towards a high wall along a direction perpendicular to the wall at a speed of 72 km/h. The driver sounds a horn of frequency 500 Hz. What is the frequency of the sound heard by driver coming from the wall after reflection ? The velocity of sound=340 m/s.]

সমাধান: দেওয়াল হইতে প্রতিফলিত হইয়া যে-শব্দ গাড়ির চালকের নিকট আসিতেছে ঐ শব্দ গাড়ির হর্নের 'শব্দ-প্রতিবিম্ব' (acoustical image) হইতে আসিতেছে বলিয়া মনে করা যায়। গাড়ি যখন 72 km/h বেগে দেওয়ালের দিকে আগাইতে থাকে তখন ঐ প্রতিবিম্বও একই বেগে গাড়ির দিকে (চালকের দিকে) আগাইতে থাকে।

কাজেই, এক্ষেত্রে প্রতিফলিত শব্দের উৎস (অর্থাৎ, হর্নের শব্দ-প্রতিবিম্ব) শ্রোতার দিকে 72 km/h বেগে এবং শ্রোতা (চালক) উৎসের দিকে 72 km/h বেগে অগ্রসর হইতেছে।

সুতরাং, চালকের নিকট প্রতিফলিত শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক,

$$f' = f \times \frac{V + V_0}{V - V_s}$$

এখানে, $f = 500$ Hz, V=340 m/s,

$V_0 = 72$ km/h=20 m/s এবং $V_s = 20$ m/s

$$\therefore \quad f' = 500 \times \frac{340+20}{340-20} = 500 \times \frac{360}{320} = 562 \text{ Hz}$$

উদাহরণ 2.12 একটি নীহারিকা 3×10^7 m/s বেগে পৃথিবী হইতে দূরে সরিয়া যাইতেছে। ইহা 6×10^{14} Hz কম্পাঙ্কের আলো নিঃসৃত করিতেছে। পৃথিবী হইতে দেখিলে ঐ আলোর আপাত-কম্পাঙ্ক কী হইবে? আলোর গতিবেগ $= 3 \times 10^8$ m/s।

[A nebula is receding away from the earth with a velocity of 3×10^7 m/s. It is emitting light of frequency 6×10^{14} Hz. What will be the apparent frequency of the light as observed from the earth ? Velocity of light$=3 \times 10^8$ m/s.]

সমাধান: আলোক-তরঙ্গের প্রকৃত কম্পাঙ্ক, f এবং আপাত কম্পাঙ্ক f' হইলে ইহাদের পারস্পরিক সম্পর্ক হইল, $f' = f \cdot \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$

এখানে, c হইল আলোর গতিবেগ এবং v হইল আলোক-উৎস ও দর্শকের আপেক্ষিক বেগ। (মনে রাখিতে হইবে যে, যখন দর্শক ও উৎস পরস্পরের দিকে আগাইয়া আসিতে থাকে তখন v-এর মান ধনাত্মক এবং যখন দর্শক ও উৎস পরস্পর হইতে দূরে সরিয়া যাইতে থাকে তখন v-এর মান ঋণাত্মক ধরা হয়।)

কাজেই প্রশ্নানুসারে, $f=6\times10^{14}$ Hz

$$v=-3\times10^{7} \text{ m/s এবং } c=3\times10^{8} \text{ m/s}$$

$$\therefore \quad \frac{v}{c}=-0{\cdot}1$$

কাজেই, পৃথিবীতে বিদ্যমান দর্শকের চোখে আলোচ্য নীহারিকা হইতে আগত আলোর আপাত কম্পাঙ্ক

$$f'=f\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}=6\times10^{14}\sqrt{\frac{1-0{\cdot}1}{1+0{\cdot}1}}$$

$$=6\times10^{14}\times\sqrt{\frac{0{\cdot}9}{1{\cdot}1}}=5{\cdot}4\times10^{14} \text{ Hz (প্রায়)}$$

● বিশেষভাবে লক্ষণীয় যে, আলোর ক্ষেত্রে এবং শব্দের ক্ষেত্রে ডপ্‌লার প্রক্রিয়াজনিত কম্পাঙ্ক পরিবর্তন নির্ণয়ে একই সমীকরণ প্রযোজ্য নয়। প্রচলিত কয়েকটি গ্রন্থে এ-সম্পর্কে কয়েকটি ভুল ধারণা রহিয়াছে। ছাত্রছাত্রীদের এ-সম্পর্কে সতর্ক করিয়া দেওয়া হইতেছে।

প্রশ্নমালা 2

1. 110 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একটি তরঙ্গের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য 300 cm। ঐ তরঙ্গের গতিবেগ নির্ণয় কর।

[A wave of frequency 110 Hz has a wavelength of 300 cm. Find the velocity of the wave.] [330 m/s]

2. একটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কে কম্পমান একটি বস্তু A মাধ্যমে 32 cm তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট এবং 160 m/s গতিবেগবিশিষ্ট তরঙ্গ সৃষ্টি করিতেছে। অন্য একটি মাধ্যম B-তে তরঙ্গ-সঞ্চালনের গতিবেগ 250 m/s হইলে ঐ মাধ্যমে তরঙ্গটির তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[A body vibrating with a particular frequency generates waves having wavelength 32 cm in a medium A travelling with velocity 160 m/s. Find the wavelength of the wave it will generate in another medium B in which the velocity of propagation is 250 m/s.] [50 cm]

3. দুইটি সুরশলাকার কম্পাঙ্ক যথাক্রমে 256 Hz এবং 384 Hz। ইহারা বায়ুতে যে-তরঙ্গের সৃষ্টি করে তাহাদের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

[Two tuning forks have frequencies 256 Hz and 384 Hz respectively. Compare the wavelengths of the waves produced by them in air] [3 : 2]

4. একটি সুরশলাকার কম্পাঙ্ক 264 Hz। ঐ সুরশলাকা হইতে শব্দ বায়ুতে 150 ft দূরে পৌঁছিবার পূর্ব পর্যন্ত সুরশলাকাটি কতবার কম্পিত হইবে ? ধরিয়া লও যে, বায়ুতে শব্দের বেগ 1100 ft/s।

[The frequency of a tuning fork is 264 Hz. Find the number of vibrations executed by the tuning fork before sound is heard at a distance 150 ft in air. Assume that the velocity of sound in air is 1100 ft/s.] [36]

5. যদি কোন সুরশলাকার কম্পাঙ্ক 500 Hz এবং বায়ুতে শব্দের গতিবেগ 330 m/s হয় তবে সুরশলাকা যে-সময়ে 40টি কম্পন নিষ্পন্ন করিবে সেই সময়ে শব্দ কতদূর অগ্রসর হইবে ?

[If the frequency of a tuning fork is 500 Hz and the velocity of sound in air is 330 m/s, find how far sound travels during the time in which the fork executes 40 vibrations.] [26·4 m]

6. কোন বেতার-কেন্দ্র হইতে 1000 kHz কম্পাঙ্কের তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ প্রেরিত হইতেছে। এই তরঙ্গের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য কত ? তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গের গতিবেগ 3×10^8 m/s।

[Electromagnetic waves of frequency 1000 kHz are being transmitted from a wireless-station. What is the wavelength of these waves ? The velocity of electromagnetic waves is 3×10^8 m/s] [300 m]

7. যে-বেতার-প্রেরক যন্ত্র 10 cm দীর্ঘ বেতার-তরঙ্গ পাঠায় তাহার কম্পাঙ্ক কত ?

[What is the frequency of the radio transmitter that sends out radio waves of wavelength 10 cm ?] [3000 MHz]

8. কোন সুরশলাকার কম্পাঙ্ক 200 Hz। উহা যে-শব্দ উৎপন্ন করে তাহার বেগ 1100 ft/s। সুরশলাকার পর্যায়কাল ও শব্দের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[The frequency of a tuning fork is 200 Hz. The velocity of sound it produces is 1100 ft/s. Find the time-period of the tuning fork and the wavelength of the sound wave.]

(H. S., 1966) [0·005 s, 55 ft]

9. স্থির কম্পাঙ্কে কম্পমান একটি বস্তু A মাধ্যমে 10 cm দীর্ঘ এবং B মাধ্যমে 15 cm দীর্ঘ তরঙ্গ উৎপন্ন করে। A এবং B মাধ্যমে তরঙ্গবেগের তুলনা কর।

[A body vibrating with a constant frequency sends out waves

10 cm long in a medium A and 15 cm long in a medium B. Compare the wave velocities in A and B.]

[2 : 3]

10. একটি চল-তরঙ্গের সমীকরণ $y=10 \sin (140\pi t-0{\cdot}08\pi x)$, এখানে x এবং y-কে সেন্টিমিটার এককে এবং t-কে সেকেণ্ড এককে প্রকাশ করা হইয়াছে। তরঙ্গটির বিস্তার, কম্পাঙ্ক, বেগ এবং তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[The equation of a progressive wave is given by $y=10 \sin (104\pi t-0{\cdot}08\pi)$, where x and y are expressed in centimeter and t in second. Find the amplitude, frequcney, velocity and wavelength of the wave.] [10 cm, 70 Hz, 17·5 m/s, 25 cm]

11. একটি তারের তির্যক তরঙ্গের সমীকরণ $y=15 \sin \pi (4t-0{\cdot}002x)$; এখানে x এবং y-কে সেন্টিমিটার এককে এবং t-কে সেকেণ্ড এককে প্রকাশ করা হইয়াছে। তরঙ্গটির বিস্তার, কম্পাঙ্ক, দ্রুতি এবং তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[The equation of a transverse wave in a string is given by $y=15 \sin \pi (4t-0{\cdot}002x)$, where x and y are expressed in centimeters and t in seconds. Find the amplitude, frequency, speed and wave-length of the wave.] [15 cm, 2 Hz, 2000 cm/s, 1000 cm]

12. একটি মোটরগাড়ি ঘণ্টায় 40 km দ্রুতিতে 1000 Hz কম্পাঙ্কের শব্দ-নিঃসারী একটি সাইরেন অতিক্রম করিল। সাইরেনটিকে অতিক্রম করিবার পূর্বে এবং পরে মোটরগাড়ির চালকের নিকট সাইরেনের শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক কত হইবে? (শব্দের গতিবেগ=340 m/s)

[A motor car moving with a speed of 40 km/h passes by a siren which is sounding at a frequency of 1000 Hz. What does the frequency of the sound emitted by siren appear to the driver of the car before and after passing the siren? (Velocity of sound=340 m/s.)] [1032 Hz, 968 Hz]

13. একটি পুলিশের গাড়ির সাইরেনের কম্পাঙ্ক 1000 Hz। এই গাড়িটির গতিবেগ 100 ft/s। ইহা 60 ft/s বেগের অন্য একটি গাড়ির পিছু ধাওয়া করিতেছে। দ্বিতীয় গাড়িটিতে বিদ্যমান কোন শ্রোতার নিকট সাইরেনের শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক কত? ধরিয়া লও যে, বায়ুতে শব্দের গতিবেগ=1086 ft/s।

[The frequency of a police car siren is 1000 Hz. The velocity of the car is 100 ft/s. It is chasing another car whose velocity is 60 ft/s. What is the apparent frequency of the sound emitted by the siren as heard by an observer in the second car. The velocity of sound in air=1086 ft/s.] [1041 Hz (প্রায়)]

14. দুইটি ট্রেন যথাক্রমে 72 km/h এবং 54 km/h গতিবেগে পরস্পরের দিকে আগাইয়া আসিতেছে। প্রথম ট্রেনটি 800 Hz কম্পাঙ্কের হুইশ্‌ল বাজাইতেছে।

ট্রেন দুইটি পরস্পরকে অতিক্রম করিবার পূর্বে এবং অতিক্রম করিবার পরে দ্বিতীয় ট্রেনের আরোহীদের নিকট হুইশ্‌লের শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক কত হইবে? বায়ুতে শব্দের বেগ 340 m/s।

[Two trains are approaching each other at speeds 72 km/h and 54 km/h respectively. The first train whistles emitting a sound of frequency 800 Hz. Find the frequency of the sound as heard by the passengers of the second train (i) before and (ii) after the trains cross each other. The velocity of sound in air is 340 m/s.]
[887·5 Hz, 722·2 Hz]

15. একটি মোটরগাড়ি 36 km/h দ্রুতিতে একটি উচ্চ দেওয়ালের দিকে উহার লম্বাভিমুখে আগাইয়া যাইতেছে। চালক 400 Hz কম্পাঙ্কের হর্ন বাজাইতেছে। চালকের নিকট (*a*) হর্ন হইতে সরাসরি আগত এবং (*b*) দেওয়াল হইতে প্রতিফলিত হইয়া আগত শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক কত হইবে? শব্দের বেগ=340 m/s।

[A car moving towards a high wall along a direction perpendicular to the wall at a speed of 36 km/h. The driver sounds a horn of frequency 400 Hz. What are the frequencies of the sound heard by the driver coming (i) directly from the horn and (ii) from the wall after reflection? The velocity of the sound= 340 m/s.]
[400 Hz, 412·2 Hz.]

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

শব্দের গতিবেগ

3.1 শব্দের গতিবেগ: শব্দের গতিবেগ মাধ্যমের স্থিতিস্থাপকতা ও ঘনত্বের উপর নির্ভর করে। কোন গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \cdots \quad (3.1)$$

এখানে E হইল গ্যাসীয় মাধ্যমের আয়তন-বিকার গুণাঙ্ক (Bulk modulus of elasticity) এবং ρ হইল মাধ্যমের ঘনত্ব। বিজ্ঞানী নিউটন সর্বপ্রথম এই সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা করেন বলিয়া (3.1) নং সমীকরণকে **নিউটনের সমীকরণ** বলা হয়।

ল্যাপলাস দেখাইয়াছিলেন যে, গ্যাসীয় মাধ্যমের মধ্য দিয়া যখন শব্দ-তরঙ্গ সঞ্চালিত হয় তখন মাধ্যমের স্তরগুলির যে সঙ্কোচন ও প্রসারণ ঘটে উহা রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়া (adiabatic process)। এই সিদ্ধান্তের ভিত্তিতে ল্যাপলাস প্রমাণ করেন যে, গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ

$$c=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad \cdots \quad (3.2)$$

এখানে $\gamma=C_p/C_v$ (C_p=স্থির চাপে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ এবং C_v=স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ) এবং P=গ্যাসের চাপ।

কঠিন পদার্থের মধ্য দিয়া শব্দের বেগ,

$$c=\sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad \cdots \qquad (3.3)$$

এখানে, Y=আলোচ্য মাধ্যমের ইয়ং গুণাঙ্ক এবং ρ হইল উহার ঘনত্ব।

3.2 শব্দের গতিবেগের উপর ঘনত্ব, চাপ, উষ্ণতা ও আর্দ্রতার প্রভাব ঃ

(i) **ঘনত্বের প্রভাব ঃ** উষ্ণতা ও চাপ স্থির থাকিলে গ্যাসের মধ্য দিয়া শব্দের বেগ গ্যাসের ঘনত্বের ব্যস্তানুপাতিক, অর্থাৎ

$$c \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}} \qquad \cdots \qquad (3.4)$$

(ii) **উষ্ণতার প্রভাব ঃ** কোন গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ উহার পরম উষ্ণতার সমানুপাতিক। অর্থাৎ, $c \propto \sqrt{T}$ $\qquad \cdots \qquad (3.5)$

0°C এবং t°C উষ্ণতায় কোন গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ যথাক্রমে c_0 এবং c_t হইলে (3.4) নং সমীকরণ হইতে লেখা যায়,

$$\frac{c_t}{c_0}=\sqrt{\frac{t+273}{273}} \text{ বা, } c_t=c_0\left(1+\frac{t}{273}\right)^{\frac{1}{2}}$$

উষ্ণতাবৃদ্ধি t-এর মান কম হইলে লেখা যায়, $c_t=c_0\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{273}\right)$

[দ্বিপদ বিস্তারের অন্যান্য পদ উপেক্ষা করিয়া]

বা, $c_t=c_0\,(1+0{\cdot}00183t)$ $\qquad \cdots \qquad (3.6)$

(iii) **আর্দ্রতার প্রভাব ঃ** বায়ুর আর্দ্রতা বাড়িলে বায়ুতে শব্দের গতিবেগ বাড়ে, আর্দ্রতা কমিলে শব্দের গতিবেগ কমে। P mmHg চাপে এবং t°C উষ্ণতায় জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত আর্দ্র বায়ুতে শব্দের বেগ c_m হইলে এবং 760 mmHg চাপে ও t°C উষ্ণতায় শুষ্ক বায়ুতে শব্দের বেগ C হইলে দেখান যায় যে,

$$c=c_m\sqrt{1-0{\cdot}378\,\frac{f}{P}} \qquad \cdots \qquad (3.7)$$

এখানে f mmHg হইল t°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ।

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 3.1 0°C উষ্ণতায় কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাসের মধ্য দিয়া শব্দের গতিবেগ নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, গ্যাসের চাপ=10^6 dyn/cm^2, কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাসের ঘনত্ব=$0{\cdot}00198$ g/cm^3 এবং $\gamma=1{\cdot}34$]

[Find the velocity of sound through carbon di-oxide at 0°C. Assume that the pressure of the gas$=10^6$ dyn/cm², density of carbon di-oxide$=0\cdot00198$ g/cm³ and $\gamma=1\cdot34$.]

সমাধান ঃ আমরা জানি যে, গ্যাসীয় শব্দের বেগ, $c=\sqrt{\dfrac{\gamma P}{\rho}}$

এখানে, $\gamma=1\cdot34$, $P=10^6$ dyn/cm² এবং $\rho=0\cdot00198$ g/cm³

$$\therefore\quad c=\sqrt{\frac{1\cdot34\times10^6}{0\cdot000198}}=260 \text{ m/s}$$

উদাহরণ 3.2 কোন্ উষ্ণতায় বায়ুতে শব্দের বেগ 0°C উষ্ণতায় শব্দের বেগের দেড় গুণ হয় ?

[At what temperature the velocity of sound in air is 1·5 times its value at 0°C ?]

সমাধান ঃ মনে করি, t°C উষ্ণতায় বায়ুতে শব্দের গতিবেগ 0°C উষ্ণতায় উহার মানের 1·5 গুণ। আমরা জানি যে, শব্দের গতিবেগ গ্যাসীয় মাধ্যমের পরম উষ্ণতার বর্গমূলের সমানুপাতিক।

$$\therefore\quad \frac{c_t}{c_0}=\sqrt{\frac{t+273}{273}}\qquad\cdots\qquad(i)$$

$c_t=t$°C উষ্ণতায় শব্দের বেগ এবং $c_0=0$°C উষ্ণতায় শব্দের বেগ

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $c_t=1\cdot5\,c_0$ বা, $\dfrac{c_t}{c_0}=1\cdot5\qquad\cdots\qquad(ii)$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $1\cdot5=\sqrt{\dfrac{t+273}{273}}$

বা, $\dfrac{t+273}{273}=2\cdot25$

বা, $t=2\cdot25\times273-273=341\cdot25$°C

উদাহরণ 3.3 যদি ইস্পাতের ঘনত্ব 7·8 g/cm³ এবং যদি ইহার মধ্য দিয়া শব্দের বেগ 5200 m/s হয় তাহা হইলে ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Calculate the value of Young's modulus of steel, if its density is 7·8 g/cm³ and if sound travels in it with a velocity of 5200 m/s.]

সমাধান ঃ ইস্পাতের শব্দের বেগ, $c=5200$ m/s

ইস্পাতের ঘনত্ব, $\rho=7\cdot8$ g/cm³

ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক, Y হইলে লেখা যায়, $c=\sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$

$\therefore\quad 5200\times100=\sqrt{\dfrac{Y}{7\cdot8}}$ বা, $\dfrac{Y}{7\cdot8}=(52)^2\times10^8$

বা, $Y=(52)^2\times7{\cdot}8\times10^8$ dyn/cm²

বা, $Y=2{\cdot}109\times10^{12}$ dyn/cm²

উদাহরণ 3.4 27°C উষ্ণতায় জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত বায়ুতে শব্দের বেগ কত? ধরিয়া লও যে, 0°C উষ্ণতায় শুষ্ক বায়ুতে শব্দের বেগ 332 m/s এবং 27°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ 11·2 mmHg।

[What is the velocity of sound in air at 27°C saturated by water vapour? Assume that the velocity of sound in dry air at 0°C is 332 m/s and the saturated vapour pressure of water at 27°C is 11·2 mmHg.]

সমাধান ঃ 27°C উষ্ণতায় শুষ্ক বায়ুতে ও আর্দ্র বায়ুতে শব্দের বেগ যথাক্রমে c_d এবং c_m হইলে লেখা যায়,

$$c_d=c_m\sqrt{1-0{\cdot}378\frac{f}{P}}=c_m\sqrt{1-0{\cdot}378\times\frac{11{\cdot}2}{760}}$$

$$=c_m\left[1-\tfrac{1}{2}\times0{\cdot}378\times\frac{1{\cdot}12}{76}\right]$$ (দ্বিপদ বিস্তারের অন্যান্য পদ উপেক্ষা করিয়া)

বা, $c_d=0{\cdot}95\,c_m$ (i)

মনে করি, $c_0=0°$C উষ্ণতায় শুষ্ক বায়ুতে শব্দের বেগ। কাজেই,

$$c_d=c_0\sqrt{1+\frac{t}{273}}=c_0\left(1+\tfrac{1}{2}\,\frac{t}{273}\right)=c_0\left[1+\frac{27}{2\times273}\right]$$

বা, $c_d=332\times(1+\frac{27}{2\times273})=348$ m/s (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $348=0{\cdot}95\,c_m$

বা, $c_m=\dfrac{348}{0{\cdot}95}=366$ m/s (প্রায়)

উদাহরণ 3.5 0°C উষ্ণতায় 1 kg ঘরের বায়ুর চাপ ও আয়তনের গুণফল $7{\cdot}84\times10^4$ J এবং ইহার দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাত 1·4। 15°C উষ্ণতায় বায়ুতে শব্দের বেগ কত?

[The product of the pressure and volume of 1 kg of air at 0°C is $7{\cdot}84\times10^4$ J and the ratio of the two specific heats of air is 1·4. Calculate the velocity of sound in air at 15°C.]

সমাধান ঃ কোন গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের গতিবেগ c নিম্নের সমীকরণ হইতে পাওয়া যায় : $c=\sqrt{\dfrac{\gamma P}{\rho}}$ .. (i)

এখানে P হইল গ্যাসের চাপ, ρ হইল গ্যাসের ঘনত্ব এবং γ হইল দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাত।

এখন, ঘনত্ব=(ভর/আয়তন)। কাজেই, 1 kg বায়ুর আয়তন V m³ হইলে লেখা যায়, $\rho=\dfrac{1}{V}$ kg/m³ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায় যে, $c=\sqrt{\gamma PV}$ ... (iii)

প্রশ্নের শর্তানুসারে, $c=\sqrt{1{\cdot}4\times7{\cdot}84\times10^4}=331{\cdot}3$ m/s

ইহা 0°C উষ্ণতায় বায়ুতে শব্দের বেগ। t°C উষ্ণতায় শব্দের বেগ নিম্নের সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়, $c_t=c_0\left(1+\frac{t}{273}\right)^{\frac{1}{2}}$

কাজেই, $c_{15}=331{\cdot}3\times(1+\frac{15}{273})^{\frac{1}{2}}$

$=331{\cdot}3\times(\frac{288}{273})^{\frac{1}{2}}=341$ m/s (প্রায়)

উদাহরণ 3.6 কোন গ্রহের বায়ুমণ্ডলে প্রধানত −130°C উষ্ণতায় মিথেন (CH_4) গ্যাস আছে। যদি এই গ্যাসের γ-এর মান 1·3 হয় তাহা হইলে ঐ গ্রহে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। ($R=8{\cdot}3$ J K^{-1} mol^{-1})

[A certain planet has an atmosphere composed mainly of methane (CH_4) gas at temperature of −130°C. Find the velocity of sound in the planet assuming γ for the gas to be 1·3 ($R=8{\cdot}3$ J K^{-1} mol^{-1}).]

সমাধানঃ আমরা জানি যে, $c=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$

এখন, গ্যাসের ঘনত্ব $\rho=\frac{M}{V}$, এখানে M=মিথেন গ্যাসের গ্রাম-আণবিক ভর এবং V=মোলার আয়তন

$$\therefore\quad c=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}=\sqrt{\frac{\gamma PV}{M}} \quad\cdots\quad (i)$$

কিন্তু PV=RT ; কাজেই, (i) হইতে পাই, $c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

এখানে, $\gamma=1{\cdot}3$, M=মিথেন গ্যাসের গুরুত্ব$=12+4\times1=16$

এবং $T=-130+273=143$ K

সুতরাং, $c=\sqrt{\frac{1{\cdot}3\times8{\cdot}3\times10^7\times143}{16}}=310{\cdot}6$ m/s

উদাহরণ 3.7 0°C উষ্ণতায় হাইড্রোজেন গ্যাসে শব্দের গতিবেগ 4200 ft/s হইলে ঐ উষ্ণতায় আয়তনের হিসাবে একভাগ অক্সিজেন এবং দুইভাগ হাইড্রোজেন গ্যাসের মিশ্রণের মধ্য দিয়া শব্দ কত গতিবেগে সঞ্চালিত হইবে? অক্সিজেনের ঘনত্ব হাইড্রোজেনের ঘনত্বের 16 গুণ।

[If the velocity of sound in hydrogen gas at 0°C is 4200 ft/s, what will be the velocity of sound at the same temperature in a mixture of one part by volume of oxygen gas and two parts by volume of hydrogen gas? The density of oxygen gas is 16 times that of hydrogen gas.]

সমাধান ঃ মনে করি, হাইড্রোজেনের ঘনত্ব$=\rho$

সুতরাং, অক্সিজেনের ঘনত্ব$=16\rho$

আলোচ্য মিশ্রণের ঘনত্ব$=(\rho\times2+16\rho\times1)/(2+1)=6\rho$

$$\frac{\text{মিশ্রণে শব্দের বেগ}}{\text{হাইড্রোজেন গ্যাসে শব্দের বেগ}}=\sqrt{\frac{\text{হাইড্রোজেনের ঘনত্ব}}{\text{মিশ্রণের ঘনত্ব}}}=\sqrt{\frac{\rho}{6\rho}}$$

বা, মিশ্রণে শব্দের বেগ$=\frac{1}{\sqrt6}\times$ হাইড্রোজেন গ্যাসে শব্দের বেগ

$$=\frac{1}{\sqrt6}\times4200=1714 \text{ ft/s}$$

উদাহরণ 3.8 17°C উষ্ণতাবিশিষ্ট বায়ুতে 512 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরশলাকা-কর্তৃক নিঃসৃত সুরের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য 66·5 cm। যদি প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় বায়ুর ঘনত্ব প্রতি লিটারে 1·293 g হয় তাহা হইলে বায়ুর দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাত কত?

[The wave-length of the note emitted by a tuning fork of frequency 512 Hz is 66·5 cm in air at 17°C. If the density of air at standard temperature and pressure is 1·293 g per litre, find the ratio of the two specific heats of air.]

সমাধান ঃ আমরা জানি যে, তরঙ্গের বেগ$=$কম্পাঙ্ক$\times$তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য

17°C উষ্ণতায় বায়ুতে শব্দের বেগ, $c=$সুরশলাকার কম্পাঙ্ক$\times$তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য

$=512\times66\cdot5$ cm/s

0°C উষ্ণতায় শব্দের বেগ c_0 হইলে লেখা যায়,

$$\frac{c_0}{c}=\sqrt{\frac{273}{273+17}}=\sqrt{\frac{273}{290}} \text{ বা, } c_0=\sqrt{\frac{273}{290}}\times512\times66\cdot5 \text{ cm/s}$$

আবার, $c_0=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$

এখানে, $P=76 \text{ cmHg}=76\times13\cdot6\times980 \text{ dyn/cm}^2$

এবং, $\rho=1\cdot293/1000=0\cdot001293 \text{ g/cm}^3$

(i) হইতে লেখা যায়, $\gamma=\frac{c_0{}^2\rho}{P}$

$$=\frac{273\times(512\times66\cdot5)^2\times0\cdot001293}{290\times76\times13\cdot6\times980}=1\cdot4 \text{ (প্রায়)}$$

প্রশ্নমালা 3

1. দেওয়া আছে যে, প্রমাণ উষ্ণতা ও চাপে বায়ুতে শব্দের বেগ 330 m/s। যে-দিন উষ্ণতা 20°C এবং বায়ুমণ্ডলের চাপ 75 cmHg সেই দিন বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

[Given that the velocity of sound at standard temperature and pressure is 300 m/s, calculate its value on a day when the temperature is 20°C and the barometric pressure is 75 cmHg.]
[342 m/s]

2. নিম্নের উপাত্তগুলি হইতে বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর: বায়ুর ঘনত্ব $=1 \cdot 293 \text{ kg/m}^3$ এই সময় বায়ুমণ্ডলের চাপ=76 cmHg, পারদের আপেক্ষিক ঘনত্ব 13·6, অভিকর্ষজ ত্বরণ$=9 \cdot 81 \text{ m/s}^2$, স্থির চাপে বায়ুর আপেক্ষিক তাপ এবং স্থির আয়তনে বায়ুর আপেক্ষিক তাপের অনুপাত=1·40।

[Calculate the velocity of sound in air using the following data. Density of air$=1 \cdot 293 \text{ kg/m}^3$, barometric height on the particular occasion=76 cmHg, relative density of mercury =13·6, acceleration due to gravity$=9 \cdot 81 \text{ m/s}^2$, ratio of specific heat at constant pressure to that at constant volume for air =1·40.]
[331 m/s]

3. বায়ুর উষ্ণতা যখন 29°C তখন 1750 m দূরে অবস্থিত কোন বন্দুকের মুখে আলোর ঝলক দেখিবার 5 s পর গুলি ছোঁড়ার শব্দ শোনা গেল। বায়ুমণ্ডলের চাপ 76 cmHg হইলে এবং বায়ুর দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাত 1·41 হইলে বায়ুর ঘনত্ব কত?

[On a certain day when the temperature of air is 29°C, the sound of firing of a gun located in 1750 m away is received 5 s after the flash of the gun had been seen. Calculate the velocity of sound and also the density of air if the atmospheric pressure at the time was 76 cmHg and the ratio of the two specific heats of air is 1·41.]
[$1 \cdot 17 \times 10^{-3}$ g/cm³]

4. 0°C উষ্ণতায় 760 mmHg চাপে বায়ুতে শব্দের বেগ 330 m/s হইলে 50°C উষ্ণতায় 700 mmHg চাপে বায়ুতে শব্দের বেগ কত?

[If the velocity of sound through air at 0°C and at a pressure of 760 mmHg is 330 m/s, what is the velocity of sound through air at 50°C and at a pressure of 700 mmHg?]
[358·9 m/s]

5. কোন্ উষ্ণতায় বায়ুতে শব্দের বেগ 0°C উষ্ণতার শব্দের বেগের দ্বিগুণ হয়?

[At what temperature the velocity of sound in air is twice its value at 0°C?]
[819°C]

6. প্রমাণ চাপ ও উষ্ণতায় বায়ুতে শব্দের গতিবেগ 1090 ft/s হইলে 50°C উষ্ণতা এবং 70 cmHg চাপে ইহার বেগ নির্ণয় কর।

[If the velocity of sound in air at normal temperature and pressure is 1090 ft/s, find the velocity of sound at 50°C and at a pressure of 70 cmHg.]
[1185 ft/s]

7. কোন্ উষ্ণতায় বায়ুতে শব্দের বেগ উহার 7°C উষ্ণতার বেগের 1·5 গুণ তাহা নির্ণয় কর।

[Find at what temperature the velocity of sound in air is 1·5 times its value at 7°C.] [357°C]

8. 14°C উষ্ণতায় বায়ুতে শব্দের বেগ 340 m/s। গ্যাসের চাপ দ্বিগুণিত করিলে এবং উষ্ণতা 157·5°C-এ তুলিলে বায়ুতে শব্দের বেগ কী হইবে?

[The velocity of sound in air at 14°C is 340 m/s. What will be its value when the pressure is doubled and the temperature is raised to 157·5°C?] [416·5 m/s (প্রায়)]

9. 30°C উষ্ণতায় এবং জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত বায়ুতে শব্দের বেগ 350 m/s। স্বাভাবিক চাপ ও উষ্ণতায় শুষ্ক বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [স্বাভাবিক চাপ ও উষ্ণতায় 1 cm^3 শুষ্ক বায়ুর ভর=0·001293 g; জলীয় বাষ্পের বাষ্পীয় ঘনত্ব=0·62, ব্যারোমিটারের উচ্চতা=760 mm; 30°C উষ্ণতায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ=31·5 mmHg]।

[The velocity of sound in air at 30°C saturated with water vapour is 350 m/s. Calculate the velocity of sound in dry air at normal temperature and pressure. The mass of 1 cm^3 of dry air=0·001293 g; the density of aqueous vapour=0·62; the barometric height=760 mm: the saturated vapour pressure of water at 30°C=31·5 mmHg.] [329·59 m/s]

10. এক ব্যক্তি একটি দূরবর্তী মিনারের সাঙ্কেতিক তোপধ্বনি শুনিয়া তাহার ঘড়ি মিলাইল। সে দেখিল যে, তাহার ঘড়িটি 3 s স্লো চলিতেছে। যদি বায়ুর উষ্ণতা 15°C হয় এবং 0°C উষ্ণতায় বায়ুতে শব্দের বেগ 332 m/s হয় তাহা হইলে মিনারের দূরত্ব কত?

[A man sets his watch by the sound of a signal gun fired from a distant tower. He finds his watch to be slow by 3 seconds. If the temperature of air is 15°C and the velocity of sound in air at 0°C is 332 m/s, what is the distance of the tower?] [1023·45 m]

11. দেখাও যে, কোন গ্যাসের অণুর বর্গমাধ্য মূল বেগ (root mean square velocity) c হইলে ঐ গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের গতিবেগ 0·68 c হইবে। (γ=1·41)

[Show that if the root mean square velocity of the molecules of a gas is c, the velocity of sound in the gas is 0·68 c, (γ=1·41)]

[**সমাধানের ইঙ্গিত :** আমরা জানি যে, শব্দের বেগ $=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ ... (i)

গ্যাসের অণুগুলির বর্গমাধ্য মূল বেগ c হইলে লেখা যায়,

$$P=\frac{1}{3}\rho c^2 \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে পাই, শব্দের বেগ $=c\sqrt{\frac{\gamma}{3}}=c\sqrt{\frac{1\cdot41}{3}}=0\cdot68\ c$]

12. 2100 lb-wt বল দ্বারা টানিলে 1 বর্গ-ইঞ্চি ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি দণ্ডের

দৈর্ঘ্য উহার প্রাথমিক দৈর্ঘ্যের 0·01% বৃদ্ধি পায়। এই তথ্য হইতে উক্ত ধাতুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। ধরিয়া লও যে, ধাতুটির ঘনত্ব=525 lb/ft³।

[A rod of metal one square inch in cross-section lengthens by 0·01% of its original length when stretched by a force of 2100 lb-wt. Calculate from this, the velocity of sound in the metal. Assume that the density of the metal=525 lb/ft³.] [13440 ft/s]

13. জলে শব্দের বেগ 1430 m/s—এই তথ্য ব্যবহার করিয়া 1 অ্যাটমস্‌ফিয়ার চাপ-বৃদ্ধিতে 1 cm³ জলের আয়তনের কী পরিবর্তন হয় তাহা নির্ণয় কর।

[Find by how much the volume of 1 cm³ of water changes with an increase of pressure of 1 atmosphere, using the fact that the velocity of sound in water is 1430 m/s.]

[$4{\cdot}96 \times 10^{-5}$ cm³ (সঙ্কোচন)]

14. 27°C উষ্ণতাবিশিষ্ট এবং 76 cmHg চাপবিশিষ্ট বায়ুপূর্ণ একটি নলে শব্দের বেগ 330 m/s। চাপ বৃদ্ধি করিয়া 100 cmHg করা হইলে এবং উষ্ণতা স্থির রাখা হইলে শব্দের গতিবেগ কত হইবে ?

[Velocity of sound in a tube containing air at 27°C and a pressure of 76 cmHg is 330 m/s. What will its velocity be when the pressure is increased to 100 cmHg and the temperature is kept constant ?] (I. I. T. Adm. Test, 1976) [300 m/s]

15. বায়ুতে শব্দের গতিবেগ 332 m/s এবং এক লিটার হাইড্রোজেন ও এক লিটার বায়ুর ভর যথাক্রমে 0·0896 g এবং 1·293 g। হাইড্রোজেন গ্যাসের মধ্য দিয়া শব্দের গতিবেগ নির্ণয় কর।

[The velocity of sound in air is 332 m/s and the masses of one litre of hydrogen and one litre of air are 0·0896 g and 1·293 g respectively. Find the velocity of sound in hydrogen gas.]

[1261·2 m/s]

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

প্রতিধ্বনি, স্বরকম্প, তারের ও বায়ুস্তম্ভের কম্পন

4.1 প্রতিধ্বনি : প্রতিফলনের ফলে শব্দের যে-পুনরাবৃত্তি শোনা যায় উহাকে প্রতিধ্বনি (Echo) বলা হয়। যখন শব্দ প্রতিফলিত হইয়া মূল ধ্বনি হইতে পৃথকভাবে শ্রোতার কানে প্রবেশ করে তখনই প্রতিধ্বনি শোনা যায়।

কোন শব্দ শুনিবার পর আমাদের মস্তিষ্কে প্রায় $\frac{1}{10}$ s পর্যন্ত উহার অনুভূতি বা রেশ থাকিয়া যায়। ইহাকে **শ্রুতি-নির্বন্ধ** (persistence of hearing) বলা হয়। ফলে প্রতিফলকের খুব কাছে দাঁড়াইয়া শব্দ করিলে মূল ধ্বনির শ্রবণানুভূতি মিলাইয়া যাইবার পূর্বেই প্রতিফলিত শব্দ আসিয়া শ্রোতার কানে প্রবেশ করে।

ফলে মূল ধ্বনি হইতে প্রতিফলিত ধ্বনিকে আলাদা বলিয়া বুঝিতে পারা যায় না। প্রতিধ্বনি শুনিতে হইলে প্রতিফলিত ধ্বনিকে মূল ধ্বনির অন্তত $\frac{1}{10}$ s পর শ্রোতার কানে পৌঁছিতে হইবে। প্রতিফলক কমপক্ষে এমন দূরত্বে থাকা প্রয়োজন যে, শব্দ প্রতিফলক হইতে ফিরিয়া শ্রোতার কানে পৌঁছাইতে $\frac{1}{10}$ s সময় লাগিবে। অর্থাৎ, শ্রোতা হইতে প্রতিফলক পর্যন্ত যাইতে শব্দের অন্তত $\frac{1}{20}$ s সময় লাগা প্রয়োজন। বায়ুতে শব্দ প্রতি সেকেণ্ডে 1120 ft পথ অতিক্রম করে। সুতরাং **কোন ক্ষণস্থায়ী শব্দের প্রতিধ্বনি শুনিতে হইলে প্রতিফলকের দূরত্ব কমপক্ষে 56 ft ($\frac{1}{20}\times 1120$) হওয়া প্রয়োজন।** আমরা প্রতি সেকেণ্ডে পাঁচটি পদাংশের বেশি উচ্চারণ করিতে পারি না এবং আমাদের কানও পাঁচটির বেশি পাঁচটি পদাংশ শুনিতে পারে না। সুতবাং, একমাত্রিক (monosyllabic word) উচ্চারণ কবিতে আমাদেব $\frac{1}{5}$ s সময় লাগে। ফলে একমাত্রিক শব্দের প্রতিধ্বনি শুনিতে হইলে প্রতিফলিত শব্দ মূল ধ্বনির অন্তত $\frac{1}{5}$ s পরে কানে আসিয়া প্রবেশ কবা প্রয়োজন। $\frac{1}{5}$ s সময়ে শব্দ $1120\times\frac{1}{5}$ বা 224 ft পথ অতিক্রম কবে। ফলে এইরূপ শব্দের প্রতিধ্বনি শুনিতে হইলে প্রতিফলককে অন্তত ($\frac{224}{2}$) বা 112 ft দূবে অবস্থিত হইতে হইবে, যাহাতে শব্দ যাতায়াতে 224 ft পথ অতিক্রম করে। দ্বিমাত্রিক শব্দ উচ্চাবণ করিতে $\frac{2}{5}$ s সময় লাগে। এই $\frac{2}{5}$ s সময়ে শব্দ 448 ft যাইতে পাবে। কাজেই, দ্বিমাত্রিক শব্দের প্রতিধ্বনি শুনিতে হইলে প্রতিফলককে অন্তত 224 ft দূরে থাকিতে হইবে। অনুরূপভাবে, ত্রিমাত্রিক শব্দের প্রতিধ্বনি শুনিতে হইলে প্রতিফলকের দূরত্ব অন্তত 336 ft হইতে হইবে।

4.2 স্বরকম্প: কম্পাঙ্কের সামান্য পার্থক্যবিশিষ্ট এবং সমান বা প্রায় সমান প্রাবল্যের দুইটি শব্দ যদি একই সঙ্গে ধ্বনিত হয় তাহা হইলে উৎপন্ন স্বরের প্রাবল্য সময়ের সহিত পবিবর্তিত হইতে থাকে। নির্দিষ্ট সময় পর পর স্বরেব প্রাবল্য বাড়ে-কমে। ইহাকে **স্বরকম্প** (Beats) বলা হয়।

স্বরকম্পের সংখ্যা উপরিপাতিত সুরদ্বয়ের কম্পাঙ্কের অন্তরফলেব সমান। অর্থাৎ সুরদ্বয়ের কম্পাঙ্ক n_1 এবং n_2 ($n_1>n_2$) হইলে স্বরকম্পের সংখ্যা (n_1-n_2)-এব সমান হইবে।

4.3 তারের তির্যক কম্পন: টানা-দেওয়া তারের তির্যক কম্পনেব কম্পাঙ্ক নিম্নের তিনটি রাশির উপর নির্ভরশীল—

(i) তারের দৈর্ঘ্য (l), (ii) তারের টান (T) এবং (iii) তাবের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর (m)।

তাত্ত্বিক বিচাবে দেখান যায় যে, তারেব মূল সুরের কম্পাঙ্ক $n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$ (4.1)

টানা-দেওয়া তারের কম্পনের সূত্রাবলী: দুই প্রান্তে আবদ্ধ তারের তির্যক কম্পনে যে-মূল সুর নির্গত হয় তাহার কম্পাঙ্ক নিম্নের কয়েকটি সূত্রের দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হয়—

(i) **দৈর্ঘ্যের সূত্র :** কোন কম্পমান তারের টান (T) এবং প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর (m) স্থির থাকিলে কম্পাঙ্ক (n) তারের দৈর্ঘ্য l-এর সহিত ব্যস্তানুপাতে পরিবর্তিত হয়। অর্থাৎ, T এবং m অপরিবর্তিত থাকিলে $n \propto \frac{1}{l}$ ... (4.2)

(ii) **টানের সূত্র :** কোন কম্পমান তারের দৈর্ঘ্য এবং প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর স্থির থাকিলে তারের কম্পাঙ্ক উহার টানের বর্গমূলের সহিত সমানুপাতে পরিবর্তিত হয়। অর্থাৎ, l এবং m অপরিবর্তিত থাকিলে $n \propto \sqrt{T}$ ... (4·3)

(iii) **ভরের সূত্র :** কোন কম্পনশীল তারের টান ও দৈর্ঘ্য স্থির থাকিলে তারের কম্পাঙ্ক উহার প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভরের বর্গমূলের সহিত ব্যস্তানুপাতে পরিবর্তিত হয়। অর্থাৎ, T এবং l অপরিবর্তিত থাকিলে $n \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$

4.4 বায়ুস্তম্ভের কম্পন : (i) একমুখ বন্ধ নল—এই নলের বন্ধ প্রান্তে সর্বদা একটি নিস্পন্দ বিন্দু এবং খোলা প্রান্তে সর্বদা একটি সুস্পন্দ বিন্দু সৃষ্টি হয়। যখন নলে আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভ মূলসুরে কম্পিত হয় তখন একটি মাত্র সুস্পন্দ বিন্দু (খোলা প্রান্তে) এবং একটি মাত্র নিস্পন্দ বিন্দু (বন্ধ প্রান্তে) সৃষ্টি হয়। আমরা জানি যে, নিস্পন্দ ও সুস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব$=\lambda/4$, $\lambda=$তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য (চিত্র 4.1)। সুতরাং, যদি নলের দৈর্ঘ্য l হয় তাহা হইলে যখন নল হইতে মূলসুর নিঃসৃত হয় তখন

চিত্র 4.1

$l=\frac{\lambda}{4}$ বা, $\lambda=4l$ ... (i)

আমরা জানি যে, $V=n_1\lambda$ ... (ii)

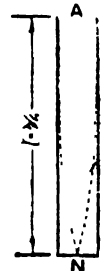
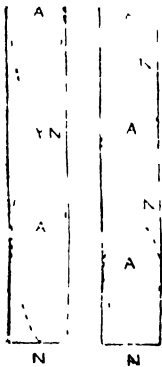
(i) এবং (ii) হইতে পাই, $n_1=\frac{V}{\lambda}=\frac{V}{4l}$ ... (4.5)

বায়ুস্তম্ভের কম্পনের ফলে মূলসুরের সহিত অন্যান্য সমমেলও (harmonics) সৃষ্টি হয়। নলের রুদ্ধ প্রান্তের নিস্পন্দ বিন্দু (N) এবং খোলা প্রান্তের সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে আরও একটি সুস্পন্দ বিন্দু (A) এবং একটি নিস্পন্দ বিন্দু N থাকিতে পারে (চিত্র 4.2)। এইরূপ ক্ষেত্রে নল হইতে যে-সুর নিঃসৃত হয় উহার তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য λ' হইলে

চিত্র 4.2 চিত্র 4·3

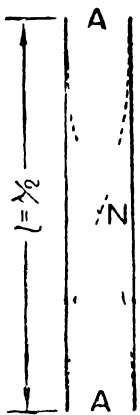
$\frac{3\lambda'}{4}=l$ বা, $\lambda'=\frac{4}{3}l$ ... (iii)

কিন্তু, $n'\lambda'=V$, $n'=$তরঙ্গের কম্পাঙ্ক

$\therefore \quad n'=\frac{3V}{4l}=3n_1$ ... (4.6)

সুতরাং, দেখা যাইতেছে যে, এক মুখ বন্ধ নল হইতে মূল সুরের পরবর্তী যে-সুর নিঃসৃত হয় তাহার কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কেব তিন গুণ। ইহাকে তৃতীয় সমমেল (3rd harmonic) বলা হয়।

ইহার পরবর্তী যে-সুর সৃষ্টি হয় তাহার ক্ষেত্রে বন্ধ প্রান্তেব নিস্পন্দ বিন্দু এবং খোলা প্রান্তের সুস্পন্দ বিন্দু ছাড়া আরও দুইটি সুস্পন্দ এবং দুইটি নিস্পন্দ বিন্দু থাকে (চিত্র 4.3)। এই সুবের কম্পাঙ্ক n'' এবং তবঙ্গ দৈর্ঘ্য λ'' হইলে লেখা যায়,

$$\tfrac{5}{4}\lambda''=l \text{ বা, } \lambda''=\tfrac{4}{5}l$$

$$\text{বা, } n''=\frac{5V}{4l}=5n_1 \qquad (4.7)$$

চিত্র 4.4

ইহার কম্পাঙ্ক মূল সুবেব কম্পাঙ্কেব পাঁচ গুণ। অর্থাৎ, ইহা পঞ্চম সমমেল (5th harmonic)। অনুরূপভাবে দেখান যায় যে, একমুখ বন্ধ নলে কেবলমাত্র অযুগ্ম সমমেলগুলি (odd harmonics) উৎপন্ন হয়, যুগ্ম সমমেলগুলি অনুপস্থিত থাকে।

(ii) **দুইমুখ খোলা নলঃ** নলেব দুই প্রান্তে দুইটি সুস্পন্দ বিন্দু এবং মাঝখানে একটি নিস্পন্দ বিন্দু থাকিলে (চিত্র 4.4) যে-সুর নিঃসৃত হয় তাহাই খোলা নলেব মূল সুব। এক্ষেত্রে, $l=\frac{\lambda}{2}$ (λ=মূলসুবের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য)

$$\therefore \quad \lambda=2l$$

কিন্তু শব্দের গতিবেগ, $V=n_1\lambda=2n_1l$

$$\text{বা, } n_1=\frac{V}{2l} \qquad (4.8)$$

সমীকরণ (4·5)-এর সহিত সমীকবণ (4.8) তুলনা কবিলে স্পষ্টতই বুঝা যাইবে যে, **দুইমুখ খোলা নল হইতে যে-মূল সুর নির্গত হয় তাহার কম্পাঙ্ক একই দৈর্ঘ্যের একমুখ বন্ধ নল হইতে নির্গত মূল সুরের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ।**

খোলা নলের দুই প্রান্তে দুইটি নিস্পন্দ বিন্দু এবং উহাদেব মধ্যে আরও সুস্পন্দ এবং দুইটি নিস্পন্দ বিন্দু থাকিলে সম্ভাব্য পরবর্তী কম্পাঙ্কেব সুর পাওয়া যায় (চিত্র 4.5)।

এক্ষেত্রে, $l=\lambda'$ (λ'=আলোচ্য সুরের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য)

আবার $V=n'\lambda'$ (n'=আলোচ্য সুরেব কম্পাঙ্ক)

$$n'=\frac{V}{l}=2\left(\frac{V}{2l}\right)=2n_1 \qquad \cdots \qquad (4.9)$$

ইহার কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ। অর্থাৎ, ইহা খোলা নলেব দ্বিতীয় সমমেল।

ইহার পরবর্তী সম্ভাব্য সুব উৎপন্ন হইবার সময় খোলা প্রান্তদ্বয়ের দুইটি সুস্পন্দ

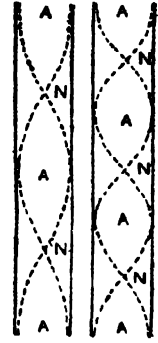
বিন্দুর মধ্যবর্তী আরও দুইটি সুস্পন্দ বিন্দু এবং তিনটি নিস্পন্দ বিন্দু থাকে (চিত্র 4.5)।

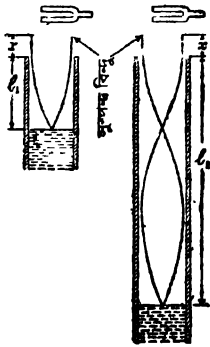
ধরি, এক্ষেত্রে শব্দের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য $=\lambda''$ এবং কম্পাঙ্ক $=n''$

তাহা হইলে $l=\dfrac{3\lambda''}{2}$ বা, $\lambda''=\dfrac{2l}{3}$

আবার, $V=n''\lambda''$ বা, $n''=\dfrac{V}{\lambda''}=\dfrac{3V}{2l}=3n_1$ (4.10)

ইহার কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের তিনগুণ। অর্থাৎ, ইহা খোলা নলের তৃতীয় সমমেল।

অনুরূপভাবে আমরা দেখাইতে পারি যে, দুই মুখ খোলা নলে যুগ্ম এবং অযুগ্ম—সকল সমমেলই উৎপন্ন হয়।

চিত্র 4.6

4.5 অনুনাদী বায়ুস্তম্ভ-কর্তৃক শব্দের বেগ নির্ণয়ঃ যদি বায়ুস্তম্ভের ন্যূনতম দৈর্ঘ্যে এই অনুনাদ সৃষ্টি হয় তাহা হইলে বুঝিতে হইবে যে, সুর-শলাকার কম্পন ঐ বায়ুস্তম্ভের মূল সুরের সহিত অনুনাদ সৃষ্টি করিয়াছে। এই অবস্থায় নলের খোলামুখে একটি সুস্পন্দ বিন্দু (antinode) সৃষ্টি হয়। প্রকৃতপক্ষে সুস্পন্দ বিন্দুটি ঠিক নলের মুখে গঠিত হয় না, একটু উপরে গঠিত হয়। নলের খোলা প্রান্ত হইতে সুস্পন্দ বিন্দুর দূরত্বকে 'প্রান্তীয় ত্রুটি' (end error) বলা হয়। 3.12 নং চিত্রে ইহাকে x অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে।

চিত্র 4.6

এই অবস্থায় নলের দৈর্ঘ্য l_1 হইলে লিখিতে পারি যে,

$$\frac{\lambda}{4}=l_1+x \qquad \cdots \qquad (i)$$

বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য ধীরে ধীরে বাড়াইতে থাকিলে এক সময় পুনরায় সুর-শলাকার কম্পন বায়ুস্তম্ভে অনুনাদ সৃষ্টি করিবে। এই অবস্থায় সুর-শলাকার কম্পনের সহিত বদ্ধ নলের মূল সুরের পরবর্তী সমমেল (harmonic)-এর অনুনাদ সৃষ্টি হয়। এ ক্ষেত্রে অনুনাদী বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য l_2 হইলে আমরা লিখিতে পারি,

$$\frac{3\lambda}{4}=l_2+x \qquad \cdots \qquad (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) হইতে পাই, $\frac{\lambda}{2}=(l_2-l_1)$ বা, $\lambda=2\,(l_2-l_1)$ $\cdots$ (iii)

বায়ুতে শব্দের V এবং সুর-শলাকার কম্পাঙ্ক n হইলে

$$V=n\lambda \qquad \cdots \qquad (iv)$$

সমীকরণ (iii) ও (iv) হইতে পাই, $V=2n\,(l_2-l_1)$ $\cdots$ (3.12)

একটিমাত্র অনুনাদী দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিয়াও শব্দের গতিবেগ নির্ণয় করা যায়। এ

ক্ষেত্রে প্রান্তীয় ত্রুটির মান বাহির করিয়া প্রয়োজনীয় সংশোধন প্রয়োগ করিতে হইবে। বিজ্ঞানী লর্ড র‍্যালে তাত্ত্বিক হিসাব করিয়া দেখাইয়াছেন যে, প্রান্তিক ত্রুটি $x=0{\cdot}3d$, d=বায়ুস্তম্ভের ব্যাস বা নলের আভ্যন্তরীণ ব্যাস।

সমীকরণ (i) হইতে

$$\frac{\lambda}{4}=l_1+x=l_1+0{\cdot}3\,d \quad \text{বা,} \quad \lambda=4(l_1+0{\cdot}3\,d) \qquad \cdots \qquad (3.13)$$

$\therefore$ গতিবেগ, V=কম্পাঙ্ক $(n)\times$ তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য $(\lambda)=4n\,(l_1+0{\cdot}3d)$ ⋯ (v)

d-এর মান মাপিয়া সমীকরণ (v) হইতেও শব্দের গতিবেগ নির্ণয় করা যায়।

লক্ষণীয় যে, শব্দের গতিবেগ জানা থাকিলে এই পরীক্ষার সাহায্যে কোন সুরশলাকার অজানা কম্পাঙ্কও নির্ণয় করা যায়।

● সমাধানসহ কয়েকটি উদাহরণ ●

উদাহরণ 4.1 একটি প্রতিধ্বনি পঞ্চমাত্রিক শব্দের পুনরাবৃত্তি করিল। প্রতিফলকের ন্যূনতম দূরত্ব কত ? শব্দের বেগ 1120 ft/s।

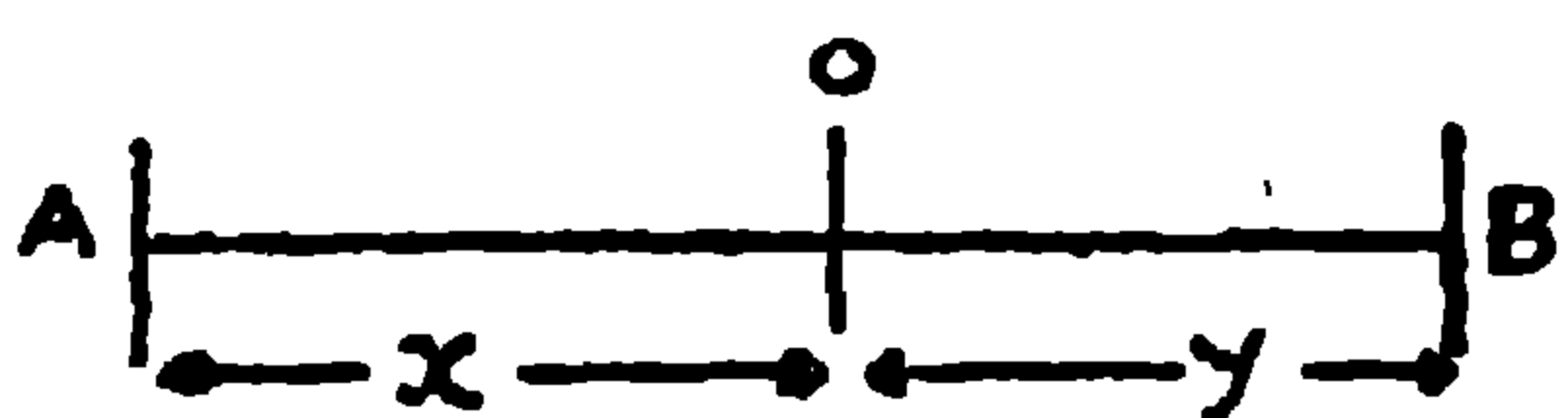
[An echo repeated five syllables. What is the minimum distance of the reflector ? The velocity of sound is 1120 ft/s.]

সমাধানঃ আমরা জানি যে, পঞ্চমাত্রিক শব্দ উচ্চারণ করিতে মোট সময় প্রয়োজন $5\times\frac{1}{5}$ বা 1 s।

এই সময়ের মধ্যে শব্দ (1120×1) বা 1120 ft দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রতিফলক ও স্বনকের ন্যূনতম দূরত্ব এই দূরত্বের অর্ধেক। কাজেই, প্রতিফলকের ন্যূনতম দূরত্ব$=\frac{1120}{2}=560$ ft

উদাহরণ 4.2 দুইটি সমান্তরাল পর্বতের মধ্যবর্তী উপত্যকায় একটি রাইফেলের গুলি ছোঁড়া হইল। একটি পর্বত হইতে উৎপন্ন প্রতিধ্বনি 2 s পর শোনা গেল এবং ইহার 2 s পর অপর পর্বতে উৎপন্ন প্রতিধ্বনি শোনা গেল।

(i) উপত্যকাটির বিস্তৃতি কত ? (ii) পরবর্তী প্রতিধ্বনি দুইটি কি একই সঙ্গে শোনা যাইবে ? যদি তাহা হয়, তবে উহা কতক্ষণ পর শোনা যাইবে ? শব্দের বেগ=360 m/s।

[A rifle shot is fired in a valley formed between two parallel mountains. The echo from one mountain is heard after 2 s and the echo from the other mountain 2 s later. (i) What is the width of the valley ? (ii) Is it possible to hear the subsequent echoes from the two mountains simultaneously at the same point ? If so, after what time ? The velocity of sound=360 m/s.]

চিত্র 4.7

সমাধানঃ মনে করি, A এবং B হইল দুইটি পর্বতের অবস্থান এবং O হইল রাইফেলের অবস্থান (চিত্র 4.7)। যে-শব্দ A পর্বতের দিকে যায় উহা প্রতিফলিত হইয়া $t_1=2$ s পর O

বিন্দুতে ফিরিয়া আসে। অনুরূপভাবে, যে-শব্দ B পর্বতের দিকে যায় উহা প্রতিফলিত হইয়া $t_2=4$ s পর O বিন্দুতে আসে।

মনে করি, O হইতে A-এর দূরত্ব x এবং O হইতে B-এর দূরত্ব y।

কাজেই, শর্তানুসারে লেখা যায়, $\frac{2x}{V}=2$ s ... (i)

এবং $\frac{2y}{V}=4$ s ... (ii)

(i) এবং (ii) যোগ করিয়া পাই, $\frac{2}{V}(x+y)=6$

$$\therefore \quad x+y=6\times\frac{V}{2}=3V \quad \text{বা,} \quad x+y=3\times360=1080 \text{ m}$$

ইহার পর B হইতে আগত শব্দ A-এর দিকে যাইবে এবং A হইতে প্রতিফলিত হইয়া পুনরায় O-তে আসিবে। এক্ষেত্রে শব্দ-কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব $2(x+y)$।

অনুরূপভাবে, A হইতে আগত শব্দ B-এর দিকে যাইবে এবং B হইতে প্রতিফলিত হইয়া O-তে আসিবে। এক্ষেত্রেও শব্দ-কর্তৃক প্রতিফলিত মোট দূরত্ব $2(x+y)$। কাজেই, পরবর্তী প্রতিধ্বনি দুইটি একই সময়ে শোনা যাইবে।

O বিন্দুতে শব্দ সৃষ্টি হইবার t_3 s পর এই প্রতিধ্বনি উৎপন্ন হইলে লেখা যায়,

$$t_3=\frac{2(x+y)}{V}=\frac{2\times1080}{360}=6 \text{ s}$$

উদাহরণ 4.3 একটি সনোমিটারের তার হইতে 150 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুর নিঃসৃত হইতেছে। যদি তারের টান 9 : 16 অনুপাতে বৃদ্ধি করা হয় এবং দৈর্ঘ্য দ্বিগুণিত করা হয় তাহা হইলে ঐ তার হইতে নিঃসৃত সুরের কম্পাঙ্ক কত হইবে ?

[A sonometer wire emits a note of frequency 150 Hz. What will be the frequency of a note emitted by the string if the tension is increased in the ratio 9 : 16 and length is doubled ?]

সমাধান : আমরা জানি যে, তারের তির্যক কম্পনের ক্ষেত্রে মূল সুরের কম্পাঙ্ক,

$$n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

এখানে l=তারের দৈর্ঘ্য, T=তারের টান এবং m=তারের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর।

মনে করি, প্রথম ক্ষেত্রে তারের টান T_1 এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে তারের টান T_2। তাহা হইলে, প্রশ্নের শর্তানুসারে লেখা যায়,

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{16}{9} \qquad \cdots \quad (i)$$

প্রথম ক্ষেত্রে তারের কম্পাঙ্ক 150 Hz বলিয়া

$$150=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T_1}{m}} \qquad \cdots \quad (ii)$$

নির্ণেয় কম্পাঙ্ক n Hz হইলে লেখা যায়,

$$n=\frac{1}{2\times 2l}\sqrt{\frac{T_2}{m}} \quad \dots \quad \text{(iii)}$$

(ii) এবং (iii) হইতে পাই, $\frac{n}{150}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$

(i) নং সমীকরণ হইতে (T_2/T_1)-এর মান বসাইয়া পাই,

$$\frac{n}{150}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

কাজেই, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে তারের কম্পাঙ্ক, $n=150\times\frac{2}{3}=100$ Hz

উদাহরণ 4.4 একটি একতারার তারের টান যখন 4 kg-wt তখন ইহার নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য 384 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুর-শলাকার সহিত সমসুর হয়। যদি তারটি একই পদার্থের তৈরী ইহার দ্বিগুণ ব্যাসার্ধসম্পন্ন অপর একটি তার দ্বারা প্রতিস্থাপিত করা হয় তখন একই দৈর্ঘ্যের তারকে 256 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুর-শলাকার সহিত সমসুর হইতে হইলে তারে কী মানের টান প্রয়োজন হইবে ?

[A length of wire on a monocord vibrates in unison with a tuning fork of frequency 384 Hz when the tension is 4 kg-wt. If the wire is replaced by one of the same material but twice the diameter, what tension would be required so that the same length is in unison with a fork of frequency 256 Hz ?]

(London Matriculation)

সমাধান : মনে করি, তারের কম্পমান অংশের দৈর্ঘ্য l cm এবং ইহার প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর $=m$ g/cm। তাহা হইলে $n=\frac{l}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$ —এই সমীকরণ হইতে পাই, $384=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{4\times10^3\times g}{m}}$ .. (i)

এখানে g cm/s^2 হইল স্থানীয় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান।

দ্বিতীয় তারের ব্যাস প্রথম তারটির ব্যাসের দ্বিগুণ বলিয়া ইহার প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর $=4m$ g/cm। শর্তানুসারে, তারের কম্পমান অংশের দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত রাখা হইয়াছে। কাজেই, $256=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T\times10^3\times g}{4m}}$ ... (ii)

এখানে T kg-wt হইল দ্বিতীয় তারে প্রয়োজনীয় টান।

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে লেখা যায়,

$$\frac{256}{384}=\sqrt{\frac{T}{16}} \text{ বা, } T=\left(\frac{256}{384}\right)^2\times16=7\cdot11$$

কাজেই, দ্বিতীয় তারে প্রয়োজনীয় টানের মান 7·11 kg-wt।

উদাহরণ 4.5 দুইটি সুর-শলাকাকে যুগপৎ কম্পিত করিলে প্রতি সেকেণ্ডে 4টি সুরকম্প সৃষ্টি হয়। একটি সুর-শলাকা স্থির টানে বাঁধা 128 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি তারের সহিত সমসুরে কম্পিত হয়। অপর সুর-শলাকাটি অনুরূপ অবস্থায় 130 cm দীর্ঘ তারের সহিত সমসুরে কম্পিত হয়। সুর-শলাকা দুইটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Four beats per second are produced when two tuning forks are sounded simultaneously. One fork is in unison with a length of 128 cm of a monocord string under constant tension while the other with 130 cm of the string under similar conditions. Calculate the frequencies of the forks.]

সমাধান ঃ মনে করি, 128 cm দীর্ঘ তারের সহিত সমসুর সুরশলাকার কম্পাঙ্ক n_1 Hz এবং 130 cm দীর্ঘ তারের সহিত সমসুর সুর-শলাকার কম্পাঙ্ক n_2 Hz। আমরা জানি যে, টান ও তারের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর অভিন্ন হইলে তারের কম্পাঙ্ক উহার দৈর্ঘ্যের ব্যস্তানুপাতিক। কাজেই লেখা যায়,

$$n_1=\frac{K}{128} \text{ এবং } n_2=\frac{K}{130}$$

এখানে K হইল সমানুপাতিক ধ্রুবক। স্পষ্টতই, $n_1>n_2$

প্রতি সেকেণ্ডে 4টি স্বরকম্প উৎপন্ন হয় বলিয়া লেখা যায়, $n_1-n_2=4$

বা, $K(\frac{1}{128}-\frac{1}{130})=4$ বা, $K=2\times128\times130$ cm/s

কাজেই, $n_1=\frac{2\times128\times130}{128}=260$ Hz

এবং $n_2=\frac{2\times128\times130}{130}=256$ Hz

উদাহরণ 4.6 9 g/cm³ ঘনত্ববিশিষ্ট উপাদানের তৈরী একটি তারকে 100 cm ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি বন্ধনীর সহিত এমনভাবে টান করিয়া বাঁধা হইল যাহাতে উহার 0·05 cm দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি হয়। তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক 9×10^{11} dyn/cm² ধরিলে তারটির তির্যক কম্পনের নিম্নতম কম্পাঙ্ক কত ?

[A wire density 9 g/cm³ is stretched between two clamps 100 cm apart while subjected to an extension of 0·05 cm. What is the lowest frequency of transverse vibration in the wire, assuming Young's modulus of the material to be 9×10^{11} dyn/cm².]

সমাধান ঃ মনে করি, তারের টান$=$T

সংজ্ঞানুসারে, ইয়ং গুণাঙ্ক, $Y=\frac{T}{\alpha}\Big/\frac{l}{L_0}$ (i)

এখানে $\alpha=$তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, $l=$দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি এবং L$=$প্রাথমিক দৈর্ঘ্য

তারের অন্তিম দৈর্ঘ্য, L$=$100 cm এবং দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি, $l=$0·05 cm

কাজেই, তারের প্রাথমিক দৈর্ঘ্য, $L_0=(100-l)$ cm$=$99·95 cm

এখন, তারের মূলসুরের কম্পাঙ্ক (অর্থাৎ সর্বনিম্ন কম্পাঙ্ক),

$$n=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

m=প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর=$\alpha \times \rho$ (ρ=তারের উপাদানের ঘনত্ব)

$$\therefore \quad n=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\alpha.\rho}} \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

এখন, সমীকরণ (i) হইতে লেখা যায়, $\frac{T}{\alpha}=\frac{Yl}{L_o}$ $\cdots$ (iv)

(iii) এবং (iv) হইতে পাই, $n=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{Yl}{L_o\rho}}$

$$=\frac{1}{2\times 100}\times\sqrt{\frac{9\times 10^{11}\times 0{\cdot}05}{99{\cdot}95\times 9}}=\frac{10^4}{200}\times\sqrt{\frac{50}{99{\cdot}95}}$$

$$=50\sqrt{\frac{50}{99{\cdot}95}}=35{\cdot}37 \text{ Hz}$$

উদাহরণ 4.7 একটি সনোমিটারে তুইটি তার লাগান আছে। ইহাদের টানের অনুপাত 8 : 1, দৈর্ঘ্যের অনুপাত 36 : 35, ব্যাসের অনুপাত 4 : 1 এবং ঘনত্বের অনুপাত 1 : 2। যদি উচ্চতর তীক্ষ্ণতাবিশিষ্ট সুরটির কম্পাঙ্ক 360 Hz হয় তাহা হইলে উৎপন্ন স্বরকম্পের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Two wires are fixed on a sonometer. Their tensions are in the ratio 8 : 1, the lengths in the ratio 36 : 35, the diameters in the ratio 4 : 1 and the densities are in the ratio 1 : 2. Find the frequency of the beats produced if the note of the higher pitch has frequency of 360 Hz.]

সমাধান: মনে করি, প্রথম তারের কম্পাঙ্ক n_1 এবং দ্বিতীয় তারের কম্পাঙ্ক n_2।

কাজেই লেখা যায়, $n_1=\frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T_1}{m_1}}=\frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T_1}{\pi r_1{}^2\rho_1}}$ $\cdots$ (i)

r_1=প্রথম তারের প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসার্ধ এবং ρ_1=প্রথম তারের উপাদানের ঘনত্ব

অনুরূপভাবে, $n_2=\frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T_2}{\pi r_2{}^2\rho_2}}$ $\cdots$ (ii)

$$\therefore \quad \frac{n_1}{n_2}=\frac{l_2}{l_1}\times\frac{r_2}{r_1}\times\sqrt{\frac{T_1}{T_2}\times\frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

প্রশ্নের শর্তানুসারে,

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{36}{35}, \frac{r_1}{r_2}=\frac{4}{1}, \frac{T_1}{T_2}=\frac{8}{1} \text{ এবং } \frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{1}{2}$$

সুতরাং, সমীকরণ (iii) হইতে পাই, $\frac{n_1}{n_2}=\frac{35}{36}\times\frac{1}{4}\times\sqrt{\frac{8}{1}\times\frac{2}{1}}$

$$\therefore \quad \frac{n_1}{n_2}=\frac{35}{36} \text{ সুতরাং, } n_2>n_1$$

শর্তানুসারে, $n_2=360$ Hz $\quad \therefore \quad n_1=\frac{35}{36}\times 360=350$ Hz

কাজেই, স্বরকম্পের কম্পাঙ্ক$=(n_2-n_1)=360-350=10$ Hz

অর্থাৎ, দুইটি তার একই সঙ্গে কম্পিত হইলে প্রতি সেকেণ্ডে 10টি স্বরকম্প সৃষ্টি হইবে।

উদাহরণ 4.8 একটি সনোমিটার তারকে উল্লম্বভাবে রক্ষিত 10 cm দীর্ঘ একটি ভারী পিতলের চোঙের সাহায্যে টানা দেওয়া আছে। দেখা গেল যে, ইহার মূল সুরটি 256 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরশলাকার সহিত সমসুর। চোঙের একাংশ জলে নিমজ্জিত করিয়া যখন তার এবং সুর-শলাকাকে যুগপৎ কম্পিত করা হয় তখন সেকেণ্ডে 4টি স্বরকম্প শোনা যায়। চোঙের নিমজ্জিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। পিতলের ঘনত্ব$=8{\cdot}5$ g/cm^3।

[A sonometer wire is stretched by a heavy brass cylinder of length 10 cm whose axis is vertical. Its fundamental note is found to be in unison with a tuning fork of frequency 256 Hz. On immersing a part of the cylinder in water, 4 beats per second are heard when wire and fork are sounded simultaneously. Calculate the length of the cylinder immersed. Density of brass$=8{\cdot}5$ g/cm^3.]
(London University)

সমাধান ঃ যখন চোঙটি জলে নিমজ্জিত তখন তারের টান কমিয়া যায়। ফলে তারের কম্পাঙ্ক হ্রাস পায়।

প্রশ্নের শর্তানুসারে, তারের প্রাথমিক কম্পাঙ্ক, $n_1=256$ Hz

চোঙটি যখন আংশিকভাবে জলে নিমজ্জিত হয় তখন তারের কম্পাঙ্ক,

$$n_2=256-4=252 \text{ Hz}$$

পিতলের চোঙটির দৈর্ঘ্য$=10$ cm

সুতরাং, ইহার প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল α cm^2 হইলে চোঙের ভর,

$M=\alpha\times 10\times 8{\cdot}5=85\,\alpha$ g

কাজেই, প্রথম ক্ষেত্রে তারের টান, $T_1=85\,\alpha$ g-wt

মনে করি, চোঙের দৈর্ঘ্যের x cm জলে নিমজ্জিত হইল। কাজেই, অপসারিত জলের ওজন$=x\times\alpha$ g-wt

কাজেই, চোঙটি যখন জলে অংশিকভাবে নিমজ্জিত অবস্থায় থাকে তখন তারের টান, $T_2=(85\,\alpha-\alpha x)$ g-wt$=(85-x)\alpha$ g-wt

কাজেই, প্রশ্নের শর্তানুসারে, $\dfrac{n_1}{n_2}=\sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}$

বা, $\dfrac{256}{252}=\sqrt{\dfrac{85\alpha}{(85-x)\alpha}}$ বা, $1-\dfrac{x}{85}=\left(1-\dfrac{4}{256}\right)^2=0{\cdot}969$

$\therefore \quad \dfrac{x}{85}=1-0{\cdot}969=0{\cdot}031 \quad \therefore \quad x=0{\cdot}031\times 85=2{\cdot}635$

কাজেই, চোঙের নিমজ্জিত অংশের দৈর্ঘ্য 2·635 cm

উদাহরণ 4.9 0·05 g/cm রৈখিক ঘনত্ববিশিষ্ট একটি তারকে $4{\cdot}5\times10^7$ dyn টান প্রয়োগ করিয়া দুইটি দৃঢ় অবলম্বনের সহিত বাঁধা হইল। দেখা গেল যে, তারটি 420 Hz কম্পাঙ্কের সহিত অনুনাদ সৃষ্টি করিল। ইহার পরবর্তী যে-উচ্চতর কম্পাঙ্কের সহিত তারটির অনুনাদ সৃষ্টি হয় তাহার মান 490 Hz। তারটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[A wire having a linear density of 0·05 g/cm is stretched between two rigid supports with a tension of $4{\cdot}5\times10^7$ dyn. It is observed that the wire resonates at a frequency of 420 Hz. The next higher frequency at which the same wire resonates is 490 Hz. Find the length of the wire.]

সমাধান ঃ মনে করি, তারটির মূলসুরের কম্পাঙ্ক $=n$ Hz

420 Hz এবং 490 Hz কম্পাঙ্ক দুইটি যথাক্রমে তারটির x-তম এবং $(x+1)$-তম সমমেল হইলে লেখা যায়, $420=x\times n$ এবং $490=(x+1)\times n$

সুতরাং, $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{49}{42}$ বা, $x=6$

কাজেই, মূলসুরের কম্পাঙ্ক $=\dfrac{420}{6}=70$ Hz

আমরা জানি যে, মূলসুরের কম্পাঙ্ক $=\dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{m}}$ $\therefore\ 70=\dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{4{\cdot}5\times10^5}{0{\cdot}05}}$

বা, $l=\dfrac{1}{140}\sqrt{\dfrac{45\times10^6}{5\times10^{-2}}}=\dfrac{10^4}{140}\times3=\dfrac{1500}{7}=214{\cdot}3$ cm (প্রায়)

উদাহরণ 4.10 একটি ধাতব তারের উপাদানের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক $1{\cdot}5\times10^{-5}/^\circ$C, ইয়ং গুণাঙ্ক $2{\cdot}0\times10^{12}$ dyn/cm^2 এবং ঘনত্ব 9·0 g/cm^3। তারটির দুই প্রান্ত দুইটি দৃঢ় অবলম্বনের সহিত যুক্ত। যদি 20°C উষ্ণতায় তারের টান শূন্য হয় তাহা হইলে 8°C উষ্ণতায় ঐ তারে তির্যক তরঙ্গের গতিবেগ কত হইবে?

[The coefficient of linear expansion of the material of a wire is $1{\cdot}5\times10^{-5}/^\circ$C, its Young's modulus is $2{\cdot}0\times10^{12}$ dyn/cm^2 and its density is 9·0 g/cm^3. Two ends of the wire are attached to rigid supports. If the tension of the wire is zero at 20°C what will be the speed of the transverse wave through the wire at 8°C ?]

সমাধান ঃ টানা-দেওয়া তারের মধ্য দিয়া তির্যক তরঙ্গের বেগ, $v=\sqrt{\dfrac{T}{m}}$ (i)

এখানে, T = তারের টান এবং m = তারের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর

ইয়ং গুণাঙ্কের সংজ্ঞানুসারে, $Y=\dfrac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}=\dfrac{T}{a}\Big/\dfrac{l}{L}$ ... (ii)

a = তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, l = দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি $=L\times\alpha=\theta$,

L=তারের প্রাথমিক দৈর্ঘ্য, α=তারের উপাদানের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক,

θ=উষ্ণতার পরিবর্তন=(20−8)=12°C $\therefore\ \frac{l}{L}=\frac{L\alpha\theta}{L}=\alpha\theta$ ... (iii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই,

$$Y=\frac{T}{a}\times\frac{1}{\alpha\theta} \quad \text{বা}, \quad T=Ya\alpha\theta \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

আবার, তারের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর, $m=a\rho$ ... (v)

এখানে ρ=তারের উপাদানের ঘনত্ব

সমীকরণ (iv) এবং (v) হইতে T এবং m-এর মান বসাইয়া (i) নং সমীকরণ হইতে পাই,

$$v=\sqrt{\frac{T}{m}}=\sqrt{\frac{Ya\alpha\theta}{a\rho}} \quad \text{বা}, \quad v=\sqrt{\frac{Y\alpha\theta}{\rho}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\times10^{12}\times1{\cdot}5\times10^{-5}\times12}{9}}=6324 \text{ cm/s (প্রায়)}$$

উদাহরণ 4.11 A এবং B সুরশলাকা দুইটি একত্রে কম্পিত করিলে প্রতি সেকেণ্ডে 8টি স্বরকম্প শোনা যায়। একটি একমুখ বন্ধ নলের 37 cm দীর্ঘ গ্যাসস্তম্ভ যখন মূলসুরে কম্পিত হয় তখন উহা A সুর-শলাকার সহিত অনুনাদ সৃষ্টি করে এবং B সুর-শলাকাটি একই গ্যাসের 38 cm দীর্ঘ স্তম্ভের সহিত অনুরূপ অনুনাদ ঘটায়। সুর-শলাকা দুইটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Two tuning forks A and B sounded together produce 8 beats per second. A gas column 37 cm long in a pipe closed at one end resonates in its fundamental mode with the fork A, whereas a column of length 38 cm of the same gas is in a similar resonance with the fork B. Find the frequency of the forks.]

সমাধান ঃ যে-নলের দৈর্ঘ্য বেশি সেই নলের মূলসুরের কম্পাঙ্ক কম।

এখন, A সুর-শলাকা 37 cm দীর্ঘ গ্যাসস্তম্ভের সহিত এবং B সুর-শলাকা 38 cm দীর্ঘ গ্যাসস্তম্ভের সহিত অনুনাদ সৃষ্টি করে। কাজেই, A সুর-শলাকার কম্পাঙ্ক B সুরশলাকার কম্পাঙ্ক অপেক্ষা বেশি। আবার, A এবং B সুর-শলাকাদ্বয় একত্রে স্পন্দিত হইলে সেকেণ্ডে 8টি স্বরকম্প সৃষ্টি হয় বলিয়া ইহাদের কম্পাঙ্কের অন্তরফল 8 Hz। কাজেই B সুর-শলাকার কম্পাঙ্ক n Hz ধরিলে A সুর-শলাকার কম্পাঙ্ক $(n+8)$ Hz।

পরীক্ষাকালে আলোচ্য গ্যাসস্তম্ভের শব্দের বেগ V cm/s হইলে লেখা যায়,

$$n+8=\frac{V}{4\times37} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$\text{এবং } n=\frac{V}{4\times38} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $1+\frac{8}{n}=\frac{38}{37}=1+\frac{1}{37}$

বা, $n=37\times8=296$

কাজেই, B সুর-শলাকার কম্পাঙ্ক=296 Hz

এবং A সুর-শলাকার কম্পাঙ্ক=(296+8)=304 Hz

উদাহরণ 4.12 একটি ট্যাপ হইতে সমহারে জল সরবরাহ করিয়া একটি চোঙাকৃতি পাত্র ভরা হইতেছে। এক ব্যক্তি 100 s পর পর 300 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একটি সুর-শলাকার সহিত অনুনাদ লক্ষ্য করিল। cm^3/s এককে জল সরবরাহের হার নির্ণয় কর। দেওয়া আছে যে, চোঙের ব্যাসার্ধ 10 cm এবং শব্দের গতিবেগ =330 m/s।

[A vessel in the form of a long circular cylinder was being filled with water from a tap at a uniform rate. A man found that there were resonances at intervals 100 s with a tuning fork of frequency 300 Hz. Calculate the rate of supply of water in cm^3/s. Given that the radius of the cylindrical vessel is 10 cm and the velocity of sound=330 m/s.]

সমাধান ঃ পর পর দুইটি অনুনাদের ক্ষেত্রে কম্পমান বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্যের অন্তরফল, $(l_2-l_1)=\frac{\lambda}{2}$ ... (i)

এখানে, λ=শব্দের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য

শব্দের বেগ V এবং কম্পাঙ্ক n হইলে লেখা যায় যে,

$$(l_2-l_1)=\frac{V}{2n} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

100 s সংগৃহীত জলের আয়তন, $v=\pi r^2\times(l_2-l_1)=\pi r^2\times\frac{V}{2n}$

এখানে, r=চোঙের ব্যাসার্ধ=10 cm

কাজেই, 100 s সময়ে সংগৃহীত জলের পরিমাণ, v

$$=\pi\times10^2\times\frac{330\times100}{2\times300}$$

∴ সুতরাং, প্রতি সেকেণ্ডে সরবরাহিত জল=$\frac{v}{100}$

$$=\pi\times\frac{330\times100}{2\times300}\ cm^3/s=172{\cdot}7\ cm^3/s$$

উদাহরণ 4.13 10 ইঞ্চি দীর্ঘ একমুখ বন্ধ নলের খোলা প্রান্তে একটি সুর-শলাকা ধরিলে অনুনাদ সৃষ্টি হইল। যদি শব্দের গতিবেগ 1120 ft/s হয় তাহা হইলে সুর-শলাকাটির কম্পাঙ্ক কত? সুর-শলাকাটি W kg-wt টানবিশিষ্ট এবং 25 cm দীর্ঘ একটি তারের সহিত সমসুর। তারটির 1 m দৈর্ঘ্যের ভর 2 g হইলে W-এর মান নির্ণয় কর।

[Resonance occurs when a tuning fork is held at the open mouth of a tube 10 inches long and closed at the other end. If

the velocity of sound be 1120 ft/s, what is the frequency of the fork ? The tuning fork is in unison with a sonometer wire 25 cm long and subjected to a tension of W kg-wt. If 1 m of the wire weighs 2g, find the value of W.]

সমাধান : (অন্যরূপ কোন নির্দেশ নাই বলিয়া ধরিয়া লইতে হইবে যে, সুর-শলাকার মূলসুরের সহিত নলের বায়ুস্তম্ভের প্রথম অনুনাদ সৃষ্টি হইয়াছে।)

এক্ষেত্রে, বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য, $l=\frac{\lambda}{4}$ ... (i)

λ=শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্য

এক্ষেত্রে গতিবেগ V এবং সুর-শলাকার কম্পাঙ্ক n হইলে লেখা যায়,

$$\lambda=\frac{V}{n} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সুতরাং, (i) এবং (ii) হইতে পাই, $l=\frac{V}{4n}$

বা, $n=\frac{V}{4l}=\frac{1120\ (\text{ft/s})}{4\times(10/12)\text{ft}}$

বা, $n=112\times3=336$ Hz

আলোচ্য সুর-শলাকা 2 cm দীর্ঘ তারের সহিত সমসুর। কাজেই, তারটির কম্পাঙ্ক=সুর-শলাকার কম্পাঙ্ক=336 Hz

তারটির প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর, $m=\frac{2\text{ g}}{100\text{ cm}}=0{\cdot}02$ g/cm

সুতরাং, $n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$

বা, $336=\frac{1}{1\times25}\sqrt{\frac{W\times10^3\times980}{0{\cdot}02}}$ বা, W=5·76

অর্থাৎ, তারের টান=5·76 kg-wt

উদাহরণ 4.14 100 cm দীর্ঘ একটি সটান ইস্পাতের তার 250 Hz কম্পাঙ্কের মূলসুরে কম্পিত হইতেছে। ইস্পাতের ঘনত্ব 8·0 g/cm^3। (i) তারের মধ্য দিয়া তির্যক তরঙ্গের গতিবেগ, (ii) তারে ক্রিয়াশীল অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন এবং (iii) তারের টান 2% পরিবর্তিত হইলে কম্পাঙ্কের শতকরা পরিবর্তন নির্ণয় কর।

[A stretched steel wire of length 100 cm is vibrating in its fundamental mode with frequency 250 Hz. The density of steel is 8·0 g/cm^3. Calculate (i) the speed of transverse wave in the wire, (ii) the longitudinal stress in the wire and (iii) the percentage change in the frequency of vibration of the wire if tension changes by 2%.]

সমাধান : (i) তারটি যখন মূলসুরে কম্পিত হয় তখন তারের দৈর্ঘ্য, $l=\frac{\lambda}{2}$

(λ=তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য)

কাজেই, $\lambda=2l=2\times100=200$ cm

$\therefore$ তির্যক কম্পনের গতিবেগ, $V=n\lambda=250\times200$

$=50000$ cm/s$=500$ m/s

(ii) তারের তির্যক কম্পনের মূলসুরের কম্পাঙ্ক,

$$n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} \quad \cdots \quad (i)$$

T হইল তারের টান এবং m হইল প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর। তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল α হইলে এবং ইহার উপাদানের ঘনত্ব D হইলে লেখা যায়,

$$m=\alpha D \quad \cdots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\alpha D}}$

কাজেই, তারের অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন, $\frac{T}{\alpha}=n^2\times4l^2\times D$

$=(250)^2\times4\times(100)^2\times8=2\times10^{10}$ dyn/cm^2

(iii) তারের প্রাথমিক টান$=$T

তারের টান 2% বৃদ্ধি পাইলে উহার টান হইবে, $T'=1{\cdot}02$ T

মনে করি, ইহাতে কম্পাঙ্ক পরিবর্তিত হইয়া n' Hz হইল। তির্যক কম্পনের টানের সূত্র হইতে লেখা যায়,

$$\frac{n}{250}=\sqrt{\frac{T'}{T}}=\sqrt{\frac{1{\cdot}02\,T}{T}}$$

বা, $\frac{n}{250}=\sqrt{1{\cdot}02}=(1+{\cdot}02)^{(\frac{1}{2})}=1{\cdot}01$

বা, $n=250\times1{\cdot}01$

$\therefore$ কম্পাঙ্কের বৃদ্ধি$=250\times1{\cdot}01-250\simeq2{\cdot}5$ Hz

সুতরাং, কম্পাঙ্কের শতকরা বৃদ্ধি$=\frac{2{\cdot}5}{250}\times100=1\%$

উদাহরণ 4.15 340 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একটি সুরশলাকা একটি চোঙাকৃতি নলের ঠিক উপরে কম্পিত করা হইল। নলটির উচ্চতা 120 cm। ইহাতে ধীরে জল ঢালা হইতে লাগিল। অনুনাদ সৃষ্টির জন্য ন্যূনতম কত উচ্চতা পর্যন্ত জল প্রয়োজন হইবে? (শব্দের গতিবেগ$=340$ m/s)

[A tuning fork having a frequency of 340 Hz is vibrated just above a cylindrical tube. The height of the tube is 120 cm. Water is slowly poured in it. What is the minimum height of water required for resonance? (Velocity of sound$=340$ m/s)]

সমাধান: সুর-শলাকা বায়ুতে যে-শব্দতরঙ্গ উৎপন্ন করে উহার তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য,

$$\lambda=\frac{V}{n}=\frac{340}{340}=1 \text{ m}$$

একমুখ বন্ধ নলের ক্ষেত্রে বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য যখন $\frac{\lambda}{4}$-এর সমান তখন প্রথম অনুনাদ, বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য যখন $3.\frac{\lambda}{4}$-এর সমান তখন দ্বিতীয় অনুনাদ এবং বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য যখন $5.\frac{\lambda}{4}$ তখন তৃতীয় অনুনাদ সৃষ্টি হয়।

কাজেই, প্রথম অনুনাদের ক্ষেত্রে বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য$=\frac{\lambda}{4}=\frac{100 \text{ cm}}{4}=25$ cm

দ্বিতীয় অনুনাদের ক্ষেত্রে বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য$=3.\frac{\lambda}{4}=3\times25=75$ cm

তৃতীয় অনুনাদের ক্ষেত্রে বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য$=5.\frac{\lambda}{4}=5\times25=125$ cm

কিন্তু, এক্ষেত্রে বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য 120 cm অপেক্ষা বেশি হইতে পারে না। কাজেই, এক্ষেত্রে তৃতীয় অনুনাদ সৃষ্টি হইতে পারে না। জল ঢালিতে থাকিলে যখন বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য 75 cm হইবে তখন একটি অনুনাদ সৃষ্টি হইবে।

কাজেই, জলের সর্বনিম্ন যে-উচ্চতায় অনুনাদ সৃষ্টি হইবে তাহার মান

$$h=120-75=45 \text{ cm}$$

উদাহরণ 4.16 1·5 m দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি একমুখ বন্ধ নল কোন গ্যাসের দ্বারা পূর্ণ রহিয়াছে এবং ইহার মূলসুর একটি সুর-শলাকার সহিত অনুনাদ সৃষ্টি করে। একই দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট অপর একটি দুইমুখ খোলা বায়ুপূর্ণ নলের মূলসুর একই সুর-শলাকার সহিত অনুনাদ সৃষ্টি করে। 0°C উষ্ণতায় উক্ত গ্যাসের মধ্য দিয়া শব্দের গতিবেগ নির্ণয় কর। দেওয়া আছে যে, 30°C উষ্ণতায় পরীক্ষাকালে বায়ুর মধ্য দিয়া শব্দের বেগ 360 m/s।

[A pipe of length 1·5 m closed at one end is filled with a gas and it resonates in its fundamental with a tuning fork. Another pipe of the same length but open at both ends is filled with air and it resonates in its fundamental with the same tuning fork. Calculate the velocity of sound at 0°C in the gas, given that the velocity of sound in air is 360 m/s at 30°C where the experiment is performed.]

সমাধান ঃ বায়ুপূর্ণ দুইমুখ খোলা নলের মূলসুরের কম্পাঙ্ক

$$=\frac{V}{2l}=\frac{360}{2\times1{\cdot}5}=120 \text{ Hz} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

শর্তানুসারে ইহাই সুর-শলাকার কম্পাঙ্ক।

যদি 30°C উষ্ণতায় গ্যাসের মধ্য দিয়া শব্দের বেগ V_g' হয় তাহা হইলে গ্যাস-পূর্ণ একমুখ বন্ধ নলের মূলসুরের কম্পাঙ্ক$=\frac{V_g'}{4\times1{\cdot}5}=\frac{V_g'}{6}$ $\cdots$ (ii)

কিন্তু এই কম্পাঙ্ক সুর-শলাকার কম্পাঙ্কের সমান। সুতরাং, সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $\frac{V_g'}{6}=120$ বা, $V_g'=120\times6=720$ m/s

ইহা 30°C উষ্ণতায় গ্যাসের মধ্য দিয়া শব্দের বেগ। 0°C উষ্ণতায় গ্যাসের মধ্য দিয়া শব্দের বেগ V_g হইলে লেখা যায়,

$$\frac{V_g}{V_g'}=\sqrt{\frac{273}{273+30}} \quad \text{বা,} \quad V_g=720\sqrt{\frac{273}{303}}=683\cdot5 \text{ m/s}$$

প্রশ্নমালা 4

1. শব্দের বেগ 1120 ft/s ধরিলে 4 ft দীর্ঘ দুইমুখ খোলা নল হইতে নিঃসৃত মূলসুরের কম্পাঙ্ক কত হইবে?

[What is the frequency of the fundamental tone emitted by an open pipe 4 ft long if the velocity of sound is assumed to be 1120 ft/s ?] [140 Hz]

2. 256 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একটি সুর-শলাকা কোন একমুখ বন্ধ নলের বায়ুস্তম্ভের 33 cm এবং 100·5 cm দৈর্ঘ্যের সহিত যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় অনুনাদ সৃষ্টি করে। বায়ুতে শব্দের বেগ এবং প্রান্তীয় ত্রুটির মান নির্ণয় কর।

[A tuning fork of frequency 256 Hz produces the first and the second resonance with an air column of lengths 33 cm and 100·5 cm in a closed tube. Find the velocity of sound in air and the end error.] [345·6 m/s, 0·75 cm]

3. দুইটি সুর-শলাকা একই সঙ্গে কম্পিত করিলে প্রতি সেকেণ্ডে 8টি স্বরকম্প সৃষ্টি হয়। প্রথম সুর-শলাকা একমুখ বন্ধ একটি নলের 32 cm বায়ুস্তম্ভের সহিত অনুনাদ সৃষ্টি করে। দ্বিতীয় সুর-শলাকা ঐ নলের 33 cm বায়ুস্তম্ভের সহিত অনুনাদ সৃষ্টি করে। সুর-শলাকা দুইটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[When two tuning forks are sounded simultaneously, 8 beats are heard per second. The first tuning-fork produces resonance with an air column of 32 cm in a tube closed at one end. The second fork resonates with an air column of 33 cm in the same tube. Find the frequencies of the forks.] [264 Hz, 256 Hz]

4. অনুনাদী বায়ুস্তম্ভের পরীক্ষায় 300 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একটি সুর-শলাকার সাহায্যে প্রথম অনুনাদী বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য পাওয়া গেল 27 cm। যদি শব্দের বেগ 330 m/s হয় তাহা হইলে দ্বিতীয় অনুনাদের ক্ষেত্রে অনুনাদী বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[In an experiment with a tuning fork of freuqency 300 Hz, the first resonant length was found to be 27 cm. If the velocity of sound is 330 m/s, find the length of the resonant column in case of the second resonance.] [82 cm]

5. একটি সনোমিটার তারের কম্পমান অংশের ভর 1·20 g এবং যখন ঐ তারটি হইতে দ্বিতীয় সমমেল নিঃসৃত হয় তখন উৎপন্ন সুরের কম্পাঙ্ক হয় 512 Hz। যদি তারটির টান 10 kg ভারের সমান হয় তাহা হইলে কম্পমান তারের দৈর্ঘ্য কত ?

[The mass of the vibrating length wire is 1·20 g and it is found that a note of frequency 512 Hz is produced when the wire is sounding its second overtone. If the tension of the wire is equal to the weight of 10 kg, what is the vibrating length of the wire ?]

[70·2 cm]

6. 0·2 kg ভরবিশিষ্ট এবং 1 m দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের তারকে দুইটি পেরেকের মধ্যে 5 kg-wt টান প্রয়োগ করিয়া বাঁধা হইল। তারের মধ্যবিন্দুটি টানিয়া উহাতে তির্যক কম্পন সৃষ্টি করা হইল। তার হইতে নিঃসৃত সুরের কম্পাঙ্ক কত ?

[A steel wire having a length of 1 m and mass of 0·2 kg is stretched between two pegs under a tension of 5 kg-wt. The wire is now set in transverse vibration by plucking at its centre. What is the frequency of the note emitted by the wire ?] [248 Hz]

7. 40 cm দীর্ঘ এবং 0·2 mm^2 প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের তার মূল-সুরে কম্পিত হইতেছে। যদি তারের টান 4 kg-wt হয়, তাহা হইলে তারের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। (ইস্পাতের ঘনত্ব=7·7 g/cm^3 এবং g=980 cm/s^2)

[A steel wire 40 cm long and of 0·2 mm^2 cross-section is set into vibration so as to emit its fundamental. If the tension in the wire is 4 kg-wt, find the frequency of the wire. (Density of steel= 7·7 g/cm^3 and g=980 cm/s^2)] [199·5 Hz]

8. একটি সনোমিটার তারের টান যখন 3 kg-wt তখন উহার একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য 320 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুর-শলাকার সহিত সমসুরে কম্পিত হয়। যদি ঐ তারটি একই পদার্থের তৈয়ারী দ্বিগুণ ব্যাসবিশিষ্ট অন্য একটি তার দ্বারা প্রতিস্থাপিত হয় তবে তারের টান কত হইলে ঐ তারের একই দৈর্ঘ্য 256 Hz কম্পাঙ্কের সুর-শলাকার সহিত সমসুরে কম্পিত হইবে ?

[A length of a sonometer wire vibrates in unison with a tuning fork of frequency 320 Hz when the tension is 3 kg-wt. If the wire is replaced by another wire of the same material but twice in diameter, what tension would be required so that the same length is in unison with a fork of frequency 256 Hz ?] [7·68 kg-wt]

9. এক প্রান্তে আবদ্ধ সনোমিটার তারের অন্য প্রান্ত হইতে M ভরবিশিষ্ট একটি নিরেট বস্তু ঝুলিতেছে এবং তারে টান প্রয়োগ করিতেছে। দেখা গেল যে, তারটিতে টঙ্কার দিলে উহার 70 cm দৈর্ঘ্য একটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কের মূলসুর নিঃসৃত করে। ঐ ভর M জলে পূর্ণ-নিমজ্জিত অবস্থায় ঝুলিয়া থাকিলে দেখা যায় যে, তারের দৈর্ঘ্য 5 cm পরিবর্তন করিলে উহা একই কম্পাঙ্কের মূলসুর নিঃসৃত করে। তারের প্রান্ত হইতে ঝুলন্ত M ভরের উপাদানের ঘনত্ব নির্ণয় কর।

[A sonometer wire fixed at one end has a solid mass M hanging from its other end to produce tension in it. It is found that a 70 cm length of the wire produces a certain fundamental frequency when plucked. When the same mass M is hanging in water, completely submerged in it, it is found that the length of the wire has to be changed by 5 cm in order that it will produce the same fundamental frequency. Calculate the density of the material of the mass M hanging from the wire.]

[7·26 g/cm^3]

10. একটি সনোমিটার তার হইতে 400 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুর নিঃসৃত হয়। যদি উহার টান 16 : 25 অনুপাতে বৃদ্ধি করা হয় এবং তারের দৈর্ঘ্য উহার পূর্ববর্তী দৈর্ঘ্যের 4 গুণ হয় তাহা হইলে ঐ তার-কর্তৃক নিঃসৃত সুরের কম্পাঙ্ক কত হইবে ?

[A sonometer wire emits a note of frequency 400 Hz. What will be the frequency of the note emitted by the same wire, if the tension is increased in the ratio 16 : 25 and the length is made 4 times the previous length ?] [125 Hz]

11. 1 m দীর্ঘ এবং 1 mm ব্যাসবিশিষ্ট একটি পিতলের তারকে 12·56 kg-wt টান প্রয়োগ করিয়া সটান রাখা হইয়াছে এবং ইহার মূলসুরের কম্পাঙ্ক 70 Hz। পিতলের ঘনত্ব নির্ণয় কর। (g=980 cm/s^2)

[A brass wire 1 m long 1 mm in diameter is stretched by a weight of 12·56 kg and the frequency of its fundamental is 70 Hz. Find the density of brass. (g=980 cm/s^2)]

[8 g/cm^3]

12. যখন একটি সনোমিটার তারের টান 4 kg-wt তখন উহার দৈর্ঘ্য 80 cm হইলে উহা একটি সুর-শলাকার সহিত সমসুর হয়। টানের সহিত আরও 100 g-wt যোগ করা হইল। দৈর্ঘ্যের কি পরিবর্তন করিলে তারটি সুর-শলাকার সহিত পুনরায় অনুনাদ সৃষ্টি করে ?

[With a tension of 4 kg-wt, a sonometer wire vibrates in unison with a tuning-fork when its length is 80 cm. A further 100 g-wt is added to the tension. By how much should the length of the wire be altered to obtain again resonance with the fork ?] [প্রায় 1 cm বাড়াইতে হইবে]

13. 1 kg-wt টান প্রয়োগ করিয়া বাঁধা একটি সটান তার 320 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একটি সুর-শলাকার সহিত সমসুরে কম্পিত হয়। তারের টানের কী পরিবর্তন করিলে উহা 256 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুর-শলাকার সহিত সমসুরে কম্পিত হইবে ?

[A stretched string under a tension of 1 kg-wt is in unison with a tuning fork of frequency 320 Hz. What alteration in the tension would make it vibrate in unison with a fork of frequency 256 Hz ?]

[টান 0·36 kg-wt কমাইতে হইবে]

14. 10 kg-wt টান প্রয়োগ করিলে একটি তার 256 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট মূলসুর নিঃসৃত করে। তারের টান কত হইলে উহার মূলসুরের কম্পাঙ্ক 512 Hz হইবে? যদি উহাকে 10 kg-wt বল প্রয়োগ করিয়া সটান রাখা হয় তাহা হইলে উহা কী অবস্থায় 768 Hz কম্পাঙ্কের সুর নিঃসৃত করিবে?

[A wire emits a fundamental of frequency 256 Hz when stretched by 10 kg-wt. What tension is necessary to produce a fundamental of 512 Hz? If it is stretched by a weight of 10 kg, how should it emit a frequency of 768 Hz?]

[40 kg-wt, তারের দৈর্ঘ্য এক-তৃতীয়াংশ করিতে হইবে]

15. একটি সনোমিটার তারের 98 cm তির্যক কম্পনে কম্পমান হইলে উহা একটি নির্দিষ্ট সুর-শলাকার সহিত সমসুর হয়। তারটির দৈর্ঘ্য 1 cm কমাইলে উহা ঐ সুর-শলাকার সহিত সেকেণ্ডে 4টি স্বরকম্প উৎপন্ন করে। তারের টান স্থির আছে ধরিয়া সুর-শলাকাটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A certain tuning-fork is found to be in unison with 98 cm of a sonometer wire when the latter is set in transverse vibration. On shortening the wire by 1 cm it makes 4 beats per second with the fork. Assuming the wire to be in constant tension, calculate the frequency of the fork.] [388 Hz]

16. দুইটি সুর-শলাকাকে যুগপৎ ধ্বনিত করা হইলে সেকেণ্ডে 6টি স্বরকম্প সৃষ্টি হয়। ইহাদের মধ্যে একটির কম্পাঙ্ক 500 Hz। ইহাকে সামান্য ঘষিয়া পুনরায় সুর-শলাকাদ্বয়কে একযোগে ধ্বনিত করিলে দেখা যায় যে, স্বরকম্পের সংখ্যা পূর্বাপেক্ষা কমিয়া গিয়াছে। অপর সুর-শলাকাটির কম্পাঙ্ক কত?

[When two tuning forks are sounded together, 6 beats are heard per second. One of the forks has a frequency of 500 Hz. It is filed slightly. When the tuning forks are simultaneously sounded again it is found that the number of beats has decreased. What is the frequency of the other fork?] [506 Hz]

17. টান-করিয়া বাঁধা একটি তারের কম্পাঙ্ক 400 Hz। একটি সুর-শলাকা এবং উক্ত তারটিকে একযোগে বাজাইলে প্রতি মিনিটে 300টি স্বরকম্প শোনা যায়। তারের দৈর্ঘ্য সামান্য কমাইলে স্বরকম্পের সংখ্যা কমিয়া যায়। সুর-শলাকাটির কম্পাঙ্ক কত?

[The frequency of a stretched wire is 400 Hz. When a tuning fork and the wire are sounded together, 300 beats are heard per minute. The number of beats decreases, if the length of the wire is slightly decreased. What is the frequency of the tuning fork?]
[405 Hz]

18. 64টি সুর-শলাকা কম্পাঙ্কের ক্রমানুসারে পর পর সাজান আছে। শেষটির কম্পাঙ্ক প্রথমটির কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ। পাশাপাশি যে-কোন দুইটি সুর-শলাকা যুগপৎ কম্পিত করিলে প্রতি সেকেণ্ডে 4টি স্বরকম্প সৃষ্টি হয়। প্রথম সুর-শলাকার কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A set of 64 tuning-forks is arranged in a series of increasing frequency. The last fork sounds the octave of the first. If each fork produces 4 beats per second with the preceding one, find the frequency of the first tuning fork.] [252 Hz]

19. একটি অজানা কম্পাঙ্কের সুর-শলাকা 512 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট অপর একটি সুর-শলাকার সহিত সেকেণ্ডে 4টি স্বরকম্প উৎপন্ন করে। যদি সুর-শলাকাটিতে কিছুটা মোম লাগান হয় তাহা হইলেও ইহা একই সুর-শলাকার সহিত প্রতি সেকেণ্ডে 4টি স্বরকম্প উৎপন্ন করে। অজানা সুর-শলাকার কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A tuning fork of unknown frequency gives 4 beats per second when sounded with another of frequency 512 Hz. The fork is loaded with a piece of wax and it again gives 4 beats per second with the same fork. Find the frequency of the unknown fork.]

[516 Hz]

20. একটি সুর-শলাকা একটি সনোমিটার তারের 50 cm-এর সহিত অনুনাদ সৃষ্টি করে। টান প্রয়োগকারী ভারগুলি যখন সম্পূর্ণভাবে জলে নিমজ্জিত হয় তখন তারের যে-দৈর্ঘ্য সুর-শলাকার সহিত অনুনাদ ঘটায় তাহার মান 45 cm। ভার-গুলির উপাদানের ঘনত্ব নির্ণয় কর।

[A tuning fork resonates with 50 cm of a sonometer wire. With the stretching weights are completely immersed in water, the length of the wire that produces resonance with the fork is 45 cm. Find the density of the material of the weights.]

[**সমাধানের ইঙ্গিত :** মনে করি, টান প্রয়োগকারী বস্তুর আয়তন V এবং ঘনত্ব D। তাহা হইলে

$$n=\frac{1}{2\times 50}\sqrt{\frac{V\times D\times g}{m}} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

এবং $$n=\frac{1}{2\times 45}\sqrt{\frac{V(D-1)g}{m}} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

g হইল অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং m হইল তারের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর।

(i) এবং (ii) হইতে, $\sqrt{1-\frac{1}{D}}=0{\cdot}9$; সুতরাং, $D=5{\cdot}26$ g/cm^3.]

বিবিধ প্রশ্নমালা

1. একটি ট্রেন স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করিয়া সমহারে ত্বরিত হয় এবং 12 s সময়ে 10 m/s গতিবেগ লাভ করে। পরবর্তী 8 s সময়ে ইহা গতিবেগ বজায় রাখে, এবং ইহার পর ব্রেক কষিয়া ট্রেনটি আরও 10 s সময়ে সমহারে স্থিরাবস্থায় আসে। ট্রেনটির গতির বেগ-সময় লেখচিত্রটি অঙ্কন কর এবং ট্রেন-কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

[A train starting from rest accelerates steadily and acquires a velocity of 10 m/s in 12 s. It maintains this velocity for the next 8 s and then brakes coming uniformly to rest in a further 10 s. Draw the velocity-time graph for the motion of the train and find the distance covered by the train.] [190 m]

2. একটি ট্রেন হইতে বিচ্ছিন্ন একটি কামরাকে নির্দিষ্ট ব্রেকজনিত বলের সাহায্যে স্থির অবস্থায় আনা হইল। এই সময়ের মধ্যে ট্রেনটি স্থির বেগে অগ্রসর হইল। দেখাও যে, যখন কামরাটি স্থির অবস্থায় আসে তখন ইহা হইতে সম্মুখস্থ ট্রেনটির দূরত্ব ট্রেন হইতে বিচ্ছিন্ন হইবার পর কামরাটি যে-দূরত্ব অতিক্রম করিয়াছে তাহার সমান।

[A carriage gets detatched from a train and is brought to rest under the action of a uniform braking force, the train meanwhile proceeding with uniform velocity. Show that when the carriage stops, the distance of the train in front of it is equal to the distance through which the carriage has travelled from the instant of being detached from the train.]

3. 30 N মানের একটি বাধাজনিত বল 9 m দূরত্বের মধ্যে একটি বস্তুর বেগকে অর্ধেক করে। যদি বস্তুটির ভর 5·0 kg হয় তাহা হইলে ইহার প্রাথমিক বেগ নির্ণয় কর। বলটি কতক্ষণ ধরিয়া বস্তুটির উপর ক্রিয়া করে তাহাও নির্ধারণ কর।

[A resisting force of 30 N halves the velocity of a body in 9 m. If the mass of the body is 5·0 kg, calculate its original velocity. Find also the time for which the force acts on it.] [12m/s, 1 s]

4. W ওজনবিশিষ্ট একটি বস্তুকে একটি দড়ির সাহায্যে স্থির অবস্থা হইতে H উচ্চতায় তোলা হইল। দড়িটি সর্বোচ্চ nW পর্যন্ত টান নিরাপদে সহ্য করিতে পারে। দেখাও যে, বস্তুটির উত্থানে প্রয়োজনীয় ন্যূনতম সময়,

$$t=\sqrt{\frac{2H}{(n-1)W}}$$

[A body of weight W is raised from rest through a height H. The maximum tension that the rope can safely bear is nW. Show that the minimum time in which the ascent can be made is

$$t=\sqrt{\frac{2H}{(n-1)W}}\,.\ ]$$

5. একটি বস্তুকে ভূমির উপর দিয়া 10 m/s গতিবেগে ছোঁড়া হইল। বস্তু ও ভূমির মধ্যে চল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক 0·25। থামিবার পূর্ব পর্যন্ত বস্তুটি কতক্ষণ চলিবে এবং কতটা দূরত্ব অতিক্রম করিবে ?

[A body is thrown along the ground with a speed of 10 m/s. The coefficient of sliding friction between the body and the ground is 0·25. Calculate the time and the distance the object will travel before it comes to rest.] [4·08 s, 20·4 m]

6. 6 cm উচ্চতাসম্পন্ন একটি সুষম ব্লক 3 cm × 3 cm ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ভূমির উপর দণ্ডায়মান আছে। যে-টেবিলের উপর ইহা স্থাপন করা আছে উহাকে ধীরে ধীরে কাত করা হইতে লাগিল। যদি ব্লক এবং টেবিলের মধ্যে স্থিত ঘর্ষণ গুণাঙ্ক 0·4 হয় তাহা হইলে ব্লকটি উল্টাইয়া পড়িবে, নাকি হড়কাইয়া আনতি বরাবর নীচের দিকে নামিতে থাকিবে ?

[A uniform block is 6 cm high and stands on a base of area 3 cm × 3 cm. The table on which it stands is gradually tilted. If the coefficient of static friction between the block and the table is 0·4, find whether the block will topple or slide down the slope.]
[হড়কাইয়া নিচের দিকে নামিতে থাকিবে]

7. একটি ব্লক ঘর্ষণহীন 45°-নততল বাহিয়া যে-সময়ে নামিয়া আসে একটি 45°-নততল বাহিয়া উহার দ্বিগুণ সময়ে নামিযা আসে। ব্লক এবং ঐ নততলের মধ্যে চল-ঘর্ষণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

[A block slides down a 45°-incline in twice the time it takes to slide down a frictionless 45°.incline. Find the coefficient of kinetic friction between the block and the incline.] [0·75]

8. 4 cm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি ধাতব গোলকে 1·5 cm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বায়ু-বুদ্‌বুদ্ আছে এবং দেখা গেল যে, বুদ্‌বুদটির কেন্দ্র গোলকের কেন্দ্র হইতে 2·5 cm দূরে অবস্থিত। এই ত্রুটিপূর্ণ ধাতব গোলকটির ভারকেন্দ্র কোথায় অবস্থিত ?

[A metal sphere of radius 4 cm has a spherical air bubble of radius 1·5 cm in it and the centre of the bubble is found to be 2·5 cm from the centre of the sphere. Where is the centre of gravity of the faulty metal sphere ?] [গোলকের কেন্দ্র হইতে 1·39 mm দূরে]

9. একটি ব্লক 16 m লম্বা একটি ঘর্ষণহীন নততলের উপর হইতে স্থির অবস্থায় ছাড়িয়া দিবার 4 s পর নিচে আসিয়া পৌঁছায়। যে-মুহূর্তে প্রথম ব্লকটিকে ছাড়া হইল সেই মুহূর্তেই দ্বিতীয় একটি ব্লককে ঐ নততল বরাবর এমনভাবে উপরের দিকে উৎক্ষেপ করা হইল যাহাতে ইহা প্রথম ব্লকটির সহিত একসঙ্গে নিচে নামিয়া আসে। দ্বিতীয় ব্লকটির প্রারম্ভিক বেগ নির্ণয় কর। নততল বাহিয়া ইহা কতটা উপর পর্যন্ত উঠিবে ?

[A block, released from rest at the top of a frictionless inclined plane 16 m long, reaches the bottom after 4 s. A second block is projected up along the incline at the moment the first block is

released in such a way that it comes back to the bottom simultaneously with the first block. Find the initial velocity of the second block. How far up the incline does it climb ?] [4 m/s, 4 m]

10. একটি অনুভূমিক তলের 30 cm উচ্চতায় স্থির অবস্থায় বিদ্যমান 50g ভর-বিশিষ্ট একটি বস্তু মুক্তভাবে পড়িল এবং সংঘাতের পর প্রতিক্ষিপ্ত হইয়া 20 cm উচ্চতায় উঠিল। সংঘাতের ফলে বস্তুটির ভরবেগ ও গতিশক্তির পরিবর্তন নির্ণয় কর। (g=980 cm/s^2)

[A body of mass 50 g, falling freely from rest from a position 30 cm vertically above a horizontal plane, rebounds to a height of 20 cm after impact. Find the change in momentum and kinetic energy suffered by the body owing to collision.] [g=980 cm/s^2]

[ভরবেগের হ্রাস=2240 g cm/s ; গতিশক্তির হ্রাস=49×10^4 erg]

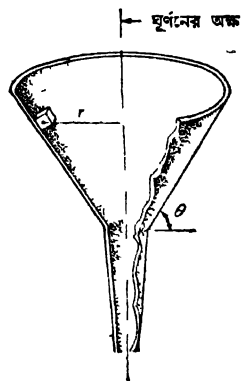
11. একটি ক্ষুদ্র ব্লককে একটি ঘূর্ণায়মান ফানেলের মধ্যে স্থাপন করা হইল (চিত্র 1)। ফানেলটি উল্লম্ব অক্ষ বেড়িয়া সেকেণ্ডে n বার পাক খায়। ফানেলের দেওয়াল অনুভূমিক তলের সহিত θ কোণ করিয়া আছে। যদি ব্লক ও ফানেলের মধ্যবর্তী স্থিত ঘর্ষণ গুণাঙ্ক μ হয় এবং ব্লকের মধ্যবিন্দুটি অক্ষ হইতে r দূরত্বে অবস্থিত হয় তবে n-এর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান কত হইলে ফানেলের সাপেক্ষে ব্লকটির সরণ হইবে না ?

[A small block is placed on the inside of a rotating funnel (Fig. 1). The funnel rotates at the rate of n revolutions per second. The wall of the funnel makes an angle θ with the horizontal. If the coefficient of static friction between the block and the funnel is μ and the centre of the block is at a distance r from the axis of rotation, what are the maximum and minimum values of n for which the block will not move with respect to the funnel ?]

$$\left[(n)_{max}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}\left(\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}\right)}\right.;$$

$$\left.(n)_{min}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}\left(\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}\right)}\right]$$

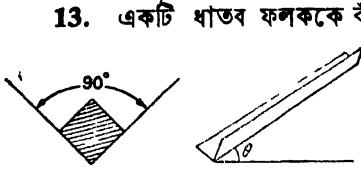
ঘূর্ণনের অক্ষ

চিত্র 1

12. (i) প্রাথমিক অবস্থায় স্থির আছে এইরূপ M ভরবিশিষ্ট একটি নিউক্লিয়াসের সহিত m ভরবিশিষ্ট একটি নিউট্রনের মুখোমুখি সংঘাত ঘটিলে উহার গতিশক্তির কত ভগ্নাংশ হ্রাস পায় ? (ii) যখন নিউট্রনটি এইভাবে সীসার নিউক্লিয়াস, কার্বনের নিউক্লিয়াস এবং হাইড্রোজেনের নিউক্লিয়াসের সহিত সংঘাত ঘটায় তখন নিউট্রনটির শক্তির কত ভগ্নাংশ হ্রাস পায় ? ধরিয়া লও যে, সীসা, কার্বন এবং হাইড্রোজেনের ক্ষেত্রে নিউক্লিয়াসের ভর এবং নিউট্রনের ভরের অনুপাত (M/m) যথাক্রমে 206, 12 এবং 1।

[(i) By what fraction does the kinetic energy of a neutron of mass m decrease in a head-on collision with an atomic nucleus of mass M initially at rest? (ii) What is the fractional decrease in kinetic energy of a neutron when it collides with a lead nucleus, carbon nucleus and hydrogen nucleus? Assume that the ratios of the nuclear mass to neutron mass (M/m) for lead, carbon and hydrogen are 206, 12 and 1 respectively.)

$$\left[\frac{4Mm}{(M+m)^2}, 1{\cdot}92\%, 28{\cdot}4\%, 100\%\right]$$

13. একটি ধাতব ফলককে বাঁকাইয়া একটি সমকোণী খাতের আকার দেওয়া হইল। M ভরবিশিষ্ট একটি আয়তাকার ব্লক এই সমকোণী খাতের তৈরি নততল বাহিয়া নিচে পড়িতেছে (চিত্র 2)। যদি চল-ঘর্ষণ গুণাঙ্ক μ_k হয় এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ g হয় তাহা হইলে ব্লকটির ত্বরণ কত হইবে ?

চিত্র 2

[A sheet of metal is so bent as to form a right-angled trough. A rectangular block of mass M slides in this right-angled trough kept inclined to the horizontal at an angle θ (Fig. 2). If the coefficient of kinetic friction is μ_k and the acceleration due to gravity is g, find the acceleration of the block.]

[(sin $\theta - \sqrt{2}\,\mu$ cos θ g]

14. একটি ব্লক উহার আয়তনের শতকরা 80 ভাগ নিমজ্জিত রাখিয়া জলে ভাসে। যখন ব্লকটিকে একটি তেলে স্থাপন করা হয় তখন উহার আয়তনের 95 শতাংশ তেলের উপরিপৃষ্ঠের নিচে থাকে। ব্লকের উপাদানের এবং তেলেব ঘনত্ব নির্ণয় কর।

[A block floats in water with 80% of its volume immersed. When the block in placed in an oil, it floats with 95% of its volume below the surface of the oil. Calculate the density of the material of the block and that of oil.] [0·8 g/cm^3, 0·84 g/cm^3]

15. একটি কঠিন বস্তু যখন তিনটি বিভিন্ন তরলে ভাসে তখন উহা যথাক্রমে নিজ আয়তনের $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{4}$ অংশ তরল অপসারিত করে। যখন বস্তুটি উক্ত তিনটি তরলের প্রতিটি সম-আয়তন লইয়া তৈয়ারী মিশ্রণে ভাসে তখন ইহা নিজ আয়তনের কতটা তরল অপসারিত করিবে তাহা নির্ণয় কর।

[A solid displaces $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{4}$ of its volume respectively when it floats in three different liquids. Find the volume it displaces when it floats in a mixture formed of equal volumes of the aforesaid three liquids.] (Pat. Univ. (I. Sc.) 1943)

[বস্তুর আয়তনের $\frac{1}{3}$ অংশ]

16. এক খণ্ড অ্যালুমিনিয়ামের ভর 108 g এবং ঘনত্ব 2700 kg/m^3। ইহার সহিত 800 kg/m^3 ঘনত্বের কাঠের কী আয়তন যুক্ত করিলে উহারা একত্রে জলে সম্পূর্ণ নিমজ্জিত অবস্থায় ভাসিবে নির্ণয় কর (চিত্র 3)।

[A piece of aluminium has a mass of 108 g and density 2700 kg/m^3. Calculate what volume of wood of density 800 kg/m^3 will need to be attached to the aluminium so that the whole floats fully submerged in water (Fig. 3). [340 cm^3]

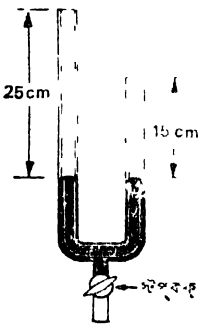
চিত্র 3

17. যখন একটি পাত্রে সম-আয়তন অ্যালকোহল এবং জলকে মিশ্রিত করা হয় তখন মিশ্রণের আয়তনকে প্রাথমিক আয়তনের 0·95 ভাগ হইতে দেখা যায়। যদি অ্যালকোহলের আপেক্ষিক ঘনত্ব 0·75 হয় তাহা হইলে মিশ্রণের আপেক্ষিক ঘনত্ব নির্ণয় কর।

[When equal volumes of alcohol and water are mixed in a vessel, the volume of the mixture is found to be 0·95 of the original volume. If the relative density of alcohol is 0·75, find the relative density of the mixture.] [0·92]

18. 10 cm বাহুবিশিষ্ট একটি সচ্ছিদ্র ঘনক 8 g/cm^3 ঘনত্ববিশিষ্ট একটি ধাতুর তৈয়ারী এবং ইহার ভর 7·2 kg। ঘনকের ছিদ্রগুলিতে বিদ্যমান বায়ুর ভরকে উপেক্ষা করা হইলে ছিদ্রগুলির আয়তন নির্ণয় কর।

[A porous cube of side 10 cm is made of a metal of density 8 g/cm^3 and has a mass of 7·2 kg. Find the volume of the pores in the cube if the mass of the air they contain may be neglected.] [100 cm^3]

19. অসমান বাহুবিশিষ্ট একটি পারদপূর্ণ ম্যানোমিটারের দুই বাহুতে একটি চাপ P_0 রাখিয়া সীল করা হইল (চিত্র 4)। ম্যানোমিটারের বাহুদ্বয়ের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল 1·0 cm^3। উষ্ণতা স্থির রাখিয়া ম্যানোমিটারের নিচের স্টপ-ককের মধ্য দিয়া অতিরিক্ত 5 cm^3 পারদ প্রবেশ করান হইল। ইহাতে বাম পার্শ্বের লেভেল 3·0 cm এবং ডানপার্শ্বের লেভেল 2 cm বৃদ্ধি পাইল। চাপ P_0-এর মান নির্ণয় কর।

চিত্র 4

[A mercury-filled manometer with two unequal arms is sealed off with the same pressure P_0 in the two arms as in Fig. 4. The cross-sectional area of the arms of the manometer is 1·0 cm^3. With the temperature constant, an additional 5 cm^3 of mercury is admitted through the stopcock at the bottom. Consequently, the level on the left increases 3·0 cm and that on the right increases 2 cm. Find the pressure P_0.] [57·2 cmHg]

20. 0·88 g/cm³ ঘনত্ববিশিষ্ট একটি কঠিন পদার্থখণ্ড একটি বীকারে রক্ষিত 0·92 g/cm³ ঘনত্ববিশিষ্ট জলপাই তেলে ভাসে। কঠিন পদার্থের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক 12×10^{-5}/K এবং জলপাই তেলের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক 7×10^{-4}/K। বীকার এবং উহাতে রক্ষিত পদার্থের উষ্ণতা কতটা বৃদ্ধি করিলে কঠিন পদার্থটি তেলের মধ্যে ঠিক ডুবিয়া যায়?

[A solid of density 0·88 g/cm³ floats in a beaker full of olive oil of density 0·92 g/cm³. The coefficient of linear expansion of the solid is 12×10^{-5}/K and the coefficient of cubical expansion of oli e oil is 7×10^{-4} K. Through what temperature range must the beaker and its contents be raised before the solid just sinks down in the oil ?] [140·4°C]

21. 12 g/cm³ ঘনত্ববিশিষ্ট একটি বস্তুকে 8 g/cm³ ঘনত্ববিশিষ্ট পিতলের বাটখারার সাহায্যে তুলাযন্ত্রে ওজন করিবার সময় বায়ুর প্লবতা উপেক্ষা করিলে পরিমাপের শতকরা ত্রুটি নির্ধারণ কর। (পরীক্ষাকালে বায়ুর ঘনত্ব $1·2\times10^{-3}$ g/cm³)

[Calculate the percentage error arising from the negligence of the buoyancy of air in weighing an object of density 12 g/cm³ with brass weights of density 8 g/cm³ by a physical balance. (Density of air during the experiment is $1·2\times10^{-3}$ g/cm³)] [0·005%]

22. 200 g ভরবিশিষ্ট একটি বলকে 1 m লম্বা একটি সূতার সাহায্যে ঝুলান আছে। বলটিকে পাশের দিকে সরান হইল যাহাতে সূতাটি উল্লম্ব রেখার সহিত 30° কোণ করে, ইহার পর বলটি ছাড়িয়া দেওয়া হইল। সর্বনিম্ন অবস্থানে বলটির গতিবেগ এবং গতিশক্তি নির্ণয় কর। (অভিকর্ষজ ত্বরণ=980 cm/s²)

[A ball of mass 200 g hangs by a thread 1 m long. It is drawn aside until the thread makes an angle of 30° with the vertical. The ball is then released. Find of velocity and kinetic energy of the ball. (The acceleration due to gravity=980 cm/s²]
[School Certificate Examination (Welsh Board)]
[2626400 erg, 162·1 cm/s]

23. একটি হ্রদের তলদেশ হইতে একটি বায়ু-বুদ্‌বুদ্‌ উপরে উঠিতে লাগিল। হ্রদের তলদেশে ইহার ব্যাস 3·6 mm এবং উপরিপৃষ্ঠে ইহার ব্যাস 4 mm। হ্রদের গভীরতা 2·5 m এবং উপরিপৃষ্ঠের উষ্ণতা 40°C। হ্রদের তলদেশের উষ্ণতা কত? (ধরিয়া লও যে, গভীরতার সহিত জলের ঘনত্বের পরিবর্তন উপেক্ষণীয়। বায়ুমণ্ডলের চাপ 76 cmHg এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ 980 cm/s²)

[An air bubble starts rising from the bottom of a lake. Its diameter is 3·6 mm at the bottom and 4 mm at the surface. The depth of the lake is 2·5 m and the temperature at the surface is 40°C. What is the temperature at the bottom of the lake? (Assume that the variation of density of water with depth is negli-

gible. Atmospheric pressure is 76 cmHg and acceleration due to gravity is 980 cm/s^2)] [10·36°C]

24. 10^3 cm/s উল্লম্ব গতিবেগে উত্থানরত একটি বেলুন হইতে একটি ব্যাগ ফেলা হইল এবং ইহা 15 s পর ভূমিতে পৌঁছিল। যখন ব্যাগটিকে ছাড়া হইয়াছিল তখন বেলুনের উচ্চতা কত ছিল নির্ণয় কর। [g=980 cm/s]

[A balloon ascending vertically with a velocity of 10^3 cm/s releases a bag that reaches the ground after 15 s. Find the height of the balloon when the bag was released. (g=980 cm/s)]
[952·6 m]

25. 2 m লম্বা এবং 1mm ব্যাসবিশিষ্ট একটি ইস্পাতনির্মিত তারের প্রান্ত হইতে কী পরিমাণ ভার ঝুলাইলে উহার 2mm দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি হইবে? ভারযুক্ত তারের বিকৃতির ফলে উহাতে যে-শক্তি সঞ্চিত হয় তাহার মানও নির্ণয় কর। (ইস্পাতের ইয়ং গুণাঙ্ক=2×10^{11} N/m^2 এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ=9·8 m/s)

[What load attached to the end of a steel wire of length 2 m and of diameter 1 mm will produce an elongation of 2 mm? Find also the strain energy stored in the loaded wire. (Young's modulus of steel=2×10^{11} N/m^2 and acceleration due to gravity=9·8 m/s)]
[16·03 kg-wt, 0·157 J]

26. একটি গ্যাস-সিলিণ্ডারে 10 অ্যাট্‌মস্‌ফিয়ার চাপে 2·5 kg গ্যাস আছে। যদি ইহার ট্যাপটি খোলা হয় তবে সিলিণ্ডার হইতে কতটা ভরের গ্যাস বাহির হইয়া যাইতে পারে?

[A gas cylinder contains 2·5 kg of gas at a pressure of 10 atmosphere. If the tap is opened, what total mass of gas can escape from the cylinder?] [2·25 kg]

27. 15 cm দীর্ঘ একটি চোঙ উল্লম্বভাবে পারদে ভাসিতেছে। চোঙটিকে উল্লম্ব অবস্থায় রাখিয়া উহাকে পারদে ঈষৎ ডুবাইয়া ছাড়িয়া দিলে চোঙটি যে-কম্পন সম্পাদন করে উহার পর্যায়কাল 0·62 s। চোঙের উপাদানের ঘনত্ব নির্ণয় কর। (পারদের ঘনত্ব=13·6 g/cm^3)

[A cylinder of length 15 cm is floating vertically in mercury. If the cylinder is displaced a little keeping it vertical and then released, the period of oscillation of the cylinder is 0·62 s. Find the density of the material of the cylinder. (The density of mercury=13·6 g/cm^3)] [8·65 g/cm^3]

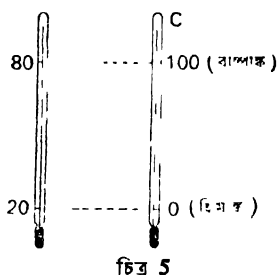
28. 0·5 mm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি তারকে পরস্পর হইতে 2 m দূরত্বে অবস্থিত দুইটি দৃঢ় অবলম্বনের দ্বারা অনুভূমিক অবস্থায় রাখা হইল। যদি তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক 11×10^{11} N/m^2 হয় তবে তারের মধ্যবিন্দুতে কী পরিমাণ ভর যুক্ত করিলে মধ্যবিন্দুর অবনমন (sag) 2·5 cm হইবে? তারের ভর উপেক্ষা কর।

[A wire of radius 0·5 mm is held horizontally between two rigid supports 2 m apart. What mass suspended from the midpoint of

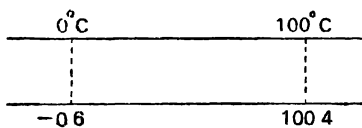
the wire, will produce a sag of 2·5 cm, if Young's modulus of the material of the wire is 11×10^{11} N/m^2. (The mass of the wire may be neglected.)] [500 g]

29. একটি থার্মোমিটারের হিমাঙ্ক এবং বাষ্পাঙ্ক যথাক্রমে 20 এবং 80—এই দুই সংখ্যার দ্বারা চিহ্নিত করা হইয়াছে (চিত্র 5)। (i) এই থার্মোমিটারে (a) 50°C এবং (b) 80°C কোন্ সংখ্যা দ্বারা চিহ্নিত হইবে? (ii) 41 এবং 62—এই দুই সংখ্যার দ্বারা যে-উষ্ণতা প্রকাশিত হইবে সেলসিয়াস স্কেলে উহার মান কত?

80 ---- C 100 (বাষ্পাঙ্ক)
20 ------ 0 (হিমাঙ্ক)

চিত্র 5

[The ice-point and steam-point are marked as 20 and 80 respectively on a thermometer (Fig. 5). (i) What number on this thermometer will correspond to temperatures of (a) 50°C and (b) 80°C ? (ii) What is the temperature in Celsius scale corresponding to the numbers on the thermometer of 41 and 62 ?] [(i) (a) 50, (b) 80, (ii) 35°C, 70 C]

30. যখন একটি পারদ-থার্মোমিটারের ঊর্ধ্ব স্থিরাঙ্ক পরীক্ষা করিয়া দেখা হইল তখন 100·4° পাঠ পাওয়া গেল এবং যখন নিম্ন স্থিরাঙ্ক পরীক্ষা করিয়া দেখা হইল তখন −0·6° পাঠ পাওয়া গেল (চিত্র 6)। যখন প্রকৃত উষ্ণতা (i) 30°C এবং (ii) 60°C তখন এই থার্মোমিটারের পাঠ কী হইবে?

[A mercury-in-glass thermometer reads 100·4° when the upper fixed point is checked and −0·6° when the lower fixed point is checked (Fig. 6). What is the reading on this thermometer when the true temperature is (i) 30°C, (ii) 60°C ?]

চিত্র 6

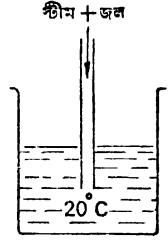
[(i) 29·7°, (ii) 60°]

31. প্লাটিনাম-রোধ থার্মোমিটার উষ্ণতার সহিত প্লাটিনামের বৈদ্যুতিক রোধের পরিবর্তন কাজে লাগাইয়া উষ্ণতার পরিমাপ করে। 0°C উষ্ণতায় প্লাটিনাম তারের রোধ 20·0 Ω এবং 100°C উষ্ণতায় ইহার রোধ 20·8 Ω। যখন তারটির রোধ (i) 20·6 Ω এবং (ii) 19·2 Ω তখন উষ্ণতা নির্ণয় কর।

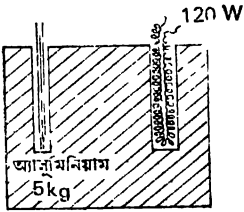
[A platinum resistance thermometer measures the temperature by using the change in electrical resistance of platinum with temperature. The resistance of the platinum wire at 0°C is 20·0 Ω and 20·8 Ω at 100°C. Find the temperature when the resistance measured is (i) 20·6 Ω, (ii) 19·2 Ω.] [(i) 75°C, (ii) −100°C]

32. গ্যাস থার্মোমিটার স্থির আয়তনে গ্যাসের চাপ-বৃদ্ধি কাজে লাগাইয়া উষ্ণতার পরিমাপ করে। কোন নির্দিষ্ট থার্মোমিটারে যদি চাপ 0°C উষ্ণতায় 700 mmHg এবং 100°C উষ্ণতায় 945 mmHg হয় তাহা হইলে চাপ যখন (i) 500 mmHg এবং (ii) 800 mmHg তখন উষ্ণতা কত?

[A gas thermometer measures temperature by using changes in pressure of a gas at constant volume with temperature. If the pressure at 0°C in a particular thermometer is 700 mmHg and 945 mmHg at 100°C, what is the temperature when the pressure is (i) 500 mmHg, (ii) 800 mmHg ?] [(i) −81·63°C, (ii) 40·82°C]

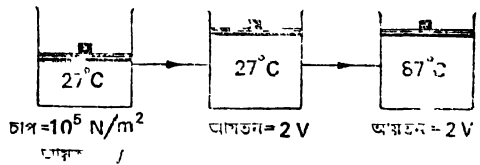
33. 10 cal/°C তাপগ্রাহিতাবিশিষ্ট একটি পাত্রে রক্ষিত 20°C উষ্ণতাবিশিষ্ট 100 g জলের মধ্য দিয়া 4g 'আর্দ্র' স্টীম (বাষ্প + জল) পাঠান হইল (চিত্র 7)। ইহাতে চূড়ান্ত উষ্ণতা হইল 30°C। স্টীমে বাহিত জলের ভর নির্ণয় কর। (জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ=540 cal/g)।

চিত্র 7

[4g of 'wet' steam (steam + water) is passed into 100 g of water at 20°C inside a vessel of thermal capacity 10 cal/°C. The final temperature is 30°C. Calculate the mass of water carried over with the steam. (The latent heat of vaporisation of water= 540 cal/g)] [2·48 g]

34. 5 kg ভরবিশিষ্ট একটি অ্যালুমিনিয়ামের ব্লককে 120 W ক্ষমতাসম্পন্ন বৈদ্যুতিক হিটারের সাহায্যে উত্তপ্ত করা হইল এবং 5 মিনিটে ইহার 7°C উষ্ণতা বৃদ্ধি হইল (চিত্র 8)। তাপক্ষয় উপেক্ষা করিয়া (i) ব্লকটির তাপগ্রাহিতা এবং (ii) অ্যালুমিনিয়ামের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর। (তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক =4·2 J/cal)

চিত্র 8

[A block of aluminium of mass 5 kg is heated by a 120 W electric heater and its temperature-rise is 7°C in 5 minutes. Neglecting heat losses, calculate (i) the thermal capacity of the block and (ii) the specific heat of aluminium. The mechanical equivalent of heat=4·2 J/cal)]
[1225 cal/°C, (ii) 245 cal g⁻¹°C⁻¹]

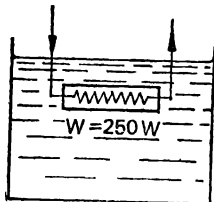
35. 27°C উষ্ণতায় 10^5 N/m² চাপে র একটি নির্দিষ্ট ভরের গ্যাস প্রসারিত হইয়া উহার আয়তন দ্বিগুণ করিল। ইহার পর আয়তন স্থির রাখিয়া গ্যাসের উষ্ণতা বাড়াইয়া 87°C-এ তোলা হইল (চিত্র 9)। গ্যাসের অন্তিম চাপ কত হইবে ?

[A fixed mass of a gas at a pressure of 10^5 N/m² expands to twice its volume at a constant temperature of 27°C. The volume is then kept constant and the gas is heated to a temperature of 87°C (Fig. 9). What will be the final pressure of the gas ?]

চিত্র 9

[6×10^4 N/m²]

36. 250 W ক্ষমতাসম্পন্ন একটি তাপক-কুণ্ডলী ব্যবহার করিয়া 100 g জলকে 2 মিনিটে স্ফুটনাঙ্কে আনা হইল এবং ইহার পর 15 মিনিটে সমস্ত জলকে

ফুটাইয়া বাষ্পীভূত করা হইল (চিত্র 10)। তাপক্ষয় উপেক্ষা করিয়া (i) জলের প্রাথমিক উষ্ণতা এবং (ii) জলের বাষ্পীভবনের লীন তাপ নির্ণয় কর। (তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক=4·2 J/cal)

W=250 W

চিত্র 10

[By using a heating coil which supplies 250 W, 100 g of water is heated to boiling point in 2 minutes and then boiled completely away in 15 minutes. Neglecting heat losses, find (i) the initial temperature of water, and (ii) latent heat of vaporisation of water. (The mechanical equivalent of heat=4·2 J/cal)] [29°C, 535·8 cal/g]

37. একটি সেকেণ্ড দোলক লোহার তৈয়ারী। যদি ইহার উষ্ণতা 20°C বৃদ্ধি পায় তাহা হইলে ইহার দৈর্ঘ্য কতটা বাড়িবে ? অভিকর্ষজ ত্বরণ=980 cm/s² এবং লোহার রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক=11×10^{-6}/°C।

[A seconds pendulum is made of iron. What will be the increase in its length if its temperature rises by 20°C ? The acceleration due to gravity=980 cm/s² and the coefficient of linear expansion of iron=11×10^{-6}/°C.] [0 0218 cm]

38. 8 g ভরবিশিষ্ট একটি লোহার পেরেককে একটি বুনসেন বার্নারের শিখায় উত্তপ্ত করা হইল এবং ইহার পর পেরেকটিকে 180 g জলসমবিশিষ্ট একটি লোহার ক্যালরিমিটারে রক্ষিত 20°C উষ্ণতাসম্পন্ন 230 g জলে ফেলা হইল। যদি চূড়ান্ত উষ্ণতা 22°C হয় তাহা হইলে বুনসেন বার্নারের শিখার উষ্ণতা নির্ণয় কর। (লোহার আপেক্ষিক তাপ=0·11 cal g^{-1}°C^{-1})

[An iron nail of mass 8 g is heated in a Bunsen burner flame and it is then dropped into 230 g of water at 20°C in an iron calorimeter of mass 180 g. If the final temperature is 22°C, calculate the temperature of the flame of the Bunsen burner. (The specific heat of iron=0·11 cal g^{-1} °C^{-1}).] [497°C nearly]

39. একটি হিটার 10 মিনিটে 3·2 kg জলের উষ্ণতা 20°C হইতে 70°C-এ তুলিতে পারে। যদি ইহা 2·8 kg গ্লিসারিনকে উত্তপ্ত করিতে ব্যবহৃত হয় তবে ইহার উষ্ণতাকে 25°C হইতে 50°C-এ তুলিতে কত সময় লাগিবে ? (গ্লিসারিনের আপেক্ষিক তাপ=0·57 cal g^{-1}°C^{-1})

[A heater can raise the temperature of 3·2 kg of water from 20°C to 70°C in 10 minutes. If it is used to heat 2·8 kg of glycerine, how long will it take to raise the temperature from 25°C to 50°C ? (The specific heat of glycerine=0·57 cal g^{-1}°C^{-1})]

[2·5 মিনিট (প্রায়)]

40. একটি পিতলের স্কেল 20°C উষ্ণতায় নির্ভুল। 45°C উষ্ণতায় ইহার সাহায্যে একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্য মাপিয়া 50 cm পাওয়া গেল। দণ্ডটির প্রকৃত দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। দেওয়া আছে যে, পিতলের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক=18×10^{-6}/°C।

[A brass scale is correct at 20°C. The length of a rod as

measured by it at 45°C is 50 cm. Calculate the true length of the rod. Given that the coefficient of linear expansion of brass= 18×10^{-6}/°C. [50 0225.cm]

41. 0·5 cm ব্যাসবিশিষ্ট একটি পিতলের দণ্ডকে 295°C উত্তপ্ত করিয়া উহার দুই প্রান্তকে দৃঢ়ভাবে আটকান হইল। যখন উহাকে শীতল করিয়া 10°C-এ নামান হয় তখন উহাকে সঙ্কুচিত হইতে না দিলে ক্ল্যাম্পদ্বয়কে দণ্ডটির উপর কী বল প্রয়োগ করিতে হইবে তাহা নির্ণয় কর। (পিতলের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$=1\cdot9\times10^{-5}$/°C এবং পিতলের ইয়ং গুণাঙ্ক$=9\cdot0\times10^{11}$ N/m²)

[A brass of diameter 0·5 cm is heated to a temperature of 295°C when its ends are firmly clamped. Find the force that must be exerted by the clamps on the rod if it is to be prevented from contracting on cooling to 10°C. (The coefficient of linear expansion $=1\cdot9\times10^{-5}$/°C and Young's modulus of brass$=9\cdot0\times10^{11}$N/m²)]

[$9\cdot57\times10^{4}$N]

42. একটি চোঙে 20°C উষ্ণতায় এবং 15 অ্যাট্মস্ফিয়ার চাপে 100 লিটার নাইট্রোজেন গ্যাস আছে। একটি পিস্টনকে এই চোঙে নামাইয়া গ্যাসের আয়তন কমাইয়া 80 লিটার করা হইল এবং ইহার উষ্ণতা 25°C-এ তোলা হইল। নাইট্রোজেন গ্যাস আদর্শ গ্যাসের ন্যায় আচরণ করে ধরিয়া লইলে আবদ্ধ গ্যাসের চূড়ান্ত চাপ কত হইবে?

[A cylinder contains nitrogen gas at a temperature of 20°C and a pressure of 15 atmospheres in a volume of 100 litres. A piston is lowered into the cylinder reducing the volume occupied by the gas in the cylinder to 80 litres and its temperature is raised to 25°C. Assuming nitrogen to behave like an ideal gas, what is the final pressure of the gas enclosed ?]

[19·06 অ্যাট্মস্ফিয়ার]

43. একটি হ্রদের 40 m গভীরতায়, যেখানে উষ্ণতা 4°C সেখানে 20 cm³ আয়তনের একটি বায়ু-বুদ্‌বুদ গঠিত হইল। বুদ্‌বুদটি জলের উপরিপৃষ্ঠে উঠিয়া আসিল। জলপৃষ্ঠের উষ্ণতা 20°C। বুদ্‌বুদটি যখন ঠিক উপরিপৃষ্ঠে আসিয়া পৌঁছায় তখন ইহার আয়তন কত হয় নির্ণয় কর। অন্যান্য প্রয়োজনীয় রাশির মান ধরিয়া লইতে পার।

[An air bubble of 20 cm³ volume is formed at the bottom of a lake 40 m deep where the temperature is 4°C. The bubble rises to the surface which is at a temperature of 20°C. Find the volume of the bubble just before it reaches the surface. You are free to assume the values of other quantities that you may require.]

[103 cm³ (প্রায়)]

44. পিতলের দোলকযুক্ত একটি ঘড়ি 15°C উষ্ণতায় সঠিক সময় রাখে। যদি ইহাকে এক সপ্তাহকাল 25°C উষ্ণতাবিশিষ্ট একটি ঘরে রাখিয়া দেওয়া হয়

তাহা হইলে ইহার সময়ের পাঠের ত্রুটি কত হইবে? (পিতলের রৈখিক প্রসারণ গুণাঙ্ক$=2\times10^{-5}$/K)

[A clock with a brass pendulum keeps correct time when the temperature is 15°C. What will be the error in the time recorded by the clock if it is placed for one week in a room at a constant temperature of 25°C? (Coefficient of linear expansivity of brass $=2\times10^{-5}$/K.] [সময়ের সঠিক পাঠ অপেক্ষা 60·5 s কম হইবে]

45. 0·002 cm² প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি অ্যালুমিনিয়াম তারের উপরের প্রান্তটি একটি দৃঢ় অবলম্বনের সহিত যুক্ত এবং নিম্ন প্রান্তে 500 cm³ আয়তনের একটি ধাতব পদার্থের ভর যুক্ত আছে। ধাতব ভরটিকে সম্পূর্ণভাবে জলে নিমজ্জিত করিলে তারের দৈর্ঘ্য 1·0 mm হ্রাস পাইতে দেখা গেল। অ্যালুমিনিয়ামের তারটির দৈর্ঘ্য কত? (অ্যালুমিনিয়ামের ইয়ং গুণাঙ্ক$=7\times10^{10}$ Nm^{-2})

[An aluminium wire of cross-section 0·002 cm² is firmly attached to a rigid support at its upper end whilst a piece of metal of volume 500 cm³ is attached at the lower end. When the piece of metal is completely immersed in water, the length of the aluminium wire is observed to change by 1·0 mm. What is the length of the aluminium wire? (Young's modulus for aluminium$=7\times10^{10}$ Nm^{-2})] [2·85 m]

46. d_1 ঘনত্ববিশিষ্ট প্রবাহীতে নিমজ্জিত অবস্থায় একটি বস্তুর ওজন m_1 g-wt, d_2 ঘনত্ববিশিষ্ট প্রবাহীতে নিমজ্জিত অবস্থায় উহার ওজন m_2 g-wt। d_3 ঘনত্ববিশিষ্ট তরলে নিমজ্জিত অবস্থায় ইহার ওজন কত হইবে?

[A body weighs m_1 g-wt in a fluid of density d_1 and m_2 g-wt in a fluid of density d_2. What would be its weight in a fluid of density d_3?] (Jt. Entrance, 1980)

$$\left[\frac{m_1 d_2 - m_2 d_1}{d_2 - d_1} - d_3 \times \frac{m_1 - m_2}{d_2 - d_1} \text{ g-wt}\right]$$

47. দুই প্রান্ত বন্ধ 1 m লম্বা একটি কাচের নলে 25 g সীসার গুলি আছে এবং বাকি অংশ 1 লিটার জলে পূর্ণ আছে। নলটিকে খাড়াভাবে ধরা হইল এবং ইহার পর নলটিকে উল্টাইয়া ধরিয়া সীসার গুলিকে নলের সমগ্র দৈর্ঘ্য বরাবর পড়িতে দেওয়া হইল। কতবার এই প্রক্রিয়ার পুনরাবৃত্তি করিলে উষ্ণতা 1°C বৃদ্ধি পাইবে? কাচে সরবরাহিত তাপ উপেক্ষা কর। (সীসার আপেক্ষিক তাপ$=0·02$, J$=4·2$ জুল/ক্যালরি)।

[A glass tube 1 m long, closed at the ends, contains 25 g of lead shot; the remainder of the tube being filled with 1 litre of water. The tube is held vertically and then inverted, causing the shot to fall the entire length of the tube. How many times the action is to be repeated to produce a rise of temperature of 1°C? Neglect the heat supplied to the glass. (Specific heat of lead$=0·02$. J$=4·2$ J/cal)] [17177 বার]

48. টানা-দেওয়া একটি সনোমিটার তারের দৈর্ঘ্য এমনভাবে নির্দিষ্ট করা হইল যাহাতে উহা একটি নির্দিষ্ট সুর-শলাকার সহিত সমসুর হয়। তারটিতে অতিরিক্ত ভার চাপান হইল যাহাতে উহার টান শতকরা 4 ভাগ বৃদ্ধি পায়। যখন তারটির একই দৈর্ঘ্যকে এবং সুর-শলাকাটিকে যুগপৎ কম্পিত করা হয় তখন সেকেণ্ডে 5টি স্বরকম্প শোনা যায়। সুর-শলাকাটির কম্পাঙ্ক কত ?

[The length of a loaded sonometer wire is adjusted so as to give unison with a certain tuning fork. An additional load is now applied so as to increase the tension of the wire by 4 per cent, and when the same length of wire and the fork are sounded together 5 beats per second are heard. What is the frequency of the fork ?]
[250 Hz]

49. দেওয়া আছে যে, স্বাভাবিক চাপ ও উষ্ণতায় অক্সিজেনে শব্দের বেগ 317 m/s। 30°C উষ্ণতায় এবং 740 mmHg চাপে হাইড্রোজেন গ্যাসে শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

[Given that the velocity of sound in oxygen is 317 m/s at N.T.P. Calculate the velocity of sound in hydrogen at a temperature of 30°C and pressure of 740 mmHg.]

সমাধান ঃ আমরা জানি যে, গ্যাসে শব্দের বেগ

$$V=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

অক্সিজেন এবং হাইড্রোজেন উভয়েই দ্বি-পরমাণুক গ্যাস (diatomic) বলিয়া ইহাদের γ-এর মান সমান। কাজেই 0°C উষ্ণতায় এবং স্বাভাবিক চাপে হাইড্রোজেন এবং অক্সিজেন গ্যাসে শব্দের বেগ যথাক্রমে V_h এবং V_0 হইলে লেখা যায়,

$$\frac{V_h}{V_o}=\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_h}} \text{ বা, } V_h=\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_h}}\times V_0$$

$$=\sqrt{\frac{16}{1}}\times 317=1268 \text{ m/s}$$

∴ 30°C উষ্ণতায় এবং স্বাভাবিক চাপে হাইড্রোজেন গ্যাসে শব্দের বেগ

$$=1268\times\sqrt{\frac{273+30}{273}}=1336 \text{ m/s (প্রায়)}$$

উষ্ণতা অপরিবর্তিত থাকিলে চাপের পরিবর্তনের দরুন শব্দের বেগের পরিবর্তন হয় না। কাজেই, 30°C উষ্ণতা এবং 740 mmHg চাপেও হাইড্রোজেন গ্যাসে শব্দের বেগ 1336 m/s।

50. দুইটি সদৃশ পিয়ানো তারে একটি টান প্রয়োগ করিলে উহাদের মূল সুরের কম্পাঙ্ক হয় 700 Hz। ইহাদের একটির টানের শতকরা বৃদ্ধি কত হইলে উভয় তারের যুগপৎ কম্পনের ফলে 7টি স্বরকম্প সৃষ্টি হইবে ?

[Two identical piano wires have a fundamental frequency of 700 Hz when kept under the same tension. What percentage

increase in the tension of one wire will lead to the occurrence of 7 beats per second when both wires vibrate simultaneously ?]

[2·01%]

51. 256 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একটি সুর-শলাকাকে 300 cm লম্বা এবং 5 cm ব্যাসবিশিষ্ট জলপূর্ণ উল্লম্ব নলের খোলা প্রান্তের সম্মুখে ধরা হইল। যদি নলটির নিম্নপ্রান্ত দিয়া ধীরে ধীরে জল বাহিরে যাইতে দেওয়া হয় এবং সুর-শলাকা হইতে নিরবচ্ছিন্নভাবে শব্দ নিঃসৃত হইতে থাকে তাহা হইলে জলপৃষ্ঠের কোন্ কোন্ অবস্থানে অনুনাদ সৃষ্টি হইবে ? (বায়ুতে শব্দের বেগ=340 m/s, প্রান্তীয় ত্রুটি= 0·6×নলের ব্যাসার্ধ)

[A tuning fork of frequency 256 Hz is held near the open end of a vertical tube 300 cm long and 5 cm in diameter filled with water. If the water is allowed to run out slowly from the lower end of the tube and the fork is kept sounding continuously, for what positions of the water surface will resonance occur ? (Velocity of sound in air=340 m/s, end correction=0·6×radius of the tube.]

[**সমাধানের ইঙ্গিত ঃ** প্রথম অনুনাদের ক্ষেত্রে,

$l_1+x=\frac{\lambda}{4}$, এখানে x=প্রান্তীয় ত্রুটি=$0{\cdot}6\times2{\cdot}5=1{\cdot}5$ cm এবং

$$\lambda=\text{তরঙ্গদৈর্ঘ্য}=\frac{340\times100}{256}=132{\cdot}8 \text{ cm}$$

$$l_1=\frac{132{\cdot}8}{4}-1{\cdot}5=31{\cdot}7$$

অনুরূপভাবে, $l_2=\frac{3\lambda}{4}-x=\frac{3}{4}\times132{\cdot}8-1{\cdot}5=98{\cdot}1$ cm

$$l_3=\frac{5\lambda}{4}-x=\frac{5}{4}\times132{\cdot}8-1{\cdot}5=164{\cdot}5 \text{ cm}$$

$$l_4=\frac{7\lambda}{4}-x=\frac{7}{4}\times132{\cdot}8-1{\cdot}5=230{\cdot}9 \text{ cm}$$

$$l_5=\frac{9\lambda}{4}-x=\frac{9}{4}\times132{\cdot}8-1{\cdot}5=297{\cdot}3 \text{ cm}$$]

52. 10 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা একটি সরলরেখা বরাবর সরল দোল গতি সম্পাদন করিতেছে। উহার দোলনকাল 2 s এবং বিস্তার 10 cm হইলে (i) সাম্যাবস্থান হইতে 2 cm দূরে এবং (ii) সাম্যাবস্থান হইতে 5 cm দূরে উহার গতিশক্তি নির্ণয় কর।

[A particle of mass 10 g executes simple harmonic motion along a straight line. If its time-period is 2 s and the amplitude of oscillation is 10 cm, find the kinetic energy of the particle when it is (i) 2 cm away and (ii) 5 cm away from its position of equilibrium.]

[**সমাধানের ইঙ্গিত ঃ** (i) প্রথম ক্ষেত্রে কণাটির গতিশক্তি, E_1

$$=\frac{1}{2}m\,\omega^2(a^2-x^2)=\frac{1}{2}m\times\left(\frac{2\pi}{T}\right)\times(a^2-x^2)$$

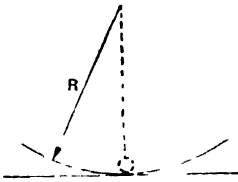
এখানে, $m=10$ g, $T=2$ s, $a=10$ cm এবং $x=2$ cm

কাজেই, $E_1=\frac{1}{2}\times10\times\left(\frac{2\pi}{2}\right)^2\times\left(10^2-2^2\right)=5\pi^2\times96$

$=4737$ erg (প্রায়)

(ii) অনুরূপভাবে, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $x=5$ cm বলিয়া লেখা যায়.

$E_2=\frac{1}{2}\times10\times\left(\frac{2\pi}{2}\right)^2\times\left(10^2-5^2\right)=5\pi^2\times75=3701$ erg (প্রায়)

53. একটি ক্ষুদ্র গোলককে অনুভূমিক টেবিলে রক্ষিত R বক্রতা-ব্যাসার্ধের অবতল পৃষ্ঠে রাখা হইল (চিত্র 11) । গোলকটিকে উহার সাম্যাবস্থান হইতে সামান্য সরাইয়া ছাড়িয়া দেওয়া হইল। যদি গোলকের সরণ অবতল পৃষ্ঠের বক্রতা ব্যাসার্ধের তুলনায় অতি ক্ষুদ্র হয় তবে দেখাও যে, গোলকটি সরল দোল গতি সম্পাদন করে। ইহার দোলনকাল নির্ণয় কর।

R

চিত্র 11

[A small sphere is kept on a smooth concave surface of radius of curvature R placed on a horizontal table (Fig. 11). The sphere is slightly displaced from its position of rest and then let go. If the displacement of the sphere is very small compared to the radius of curvature of the concave surface, show that the sphere executes simple harmonic motion. Find its period.]

[$2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$, এখানে g অভিকর্ষজ ত্বরণ]

54. একটি কণা সরল দোল গতি সম্পাদন করিতেছে। ইহার গতির সমীকরণ $f+9x=0$, এখানে f হইল কণার ত্বরণ এবং x হইল ইহার সরণ। কণাটির কৌণিক বেগ নির্ণয় কর।

[A particle executes simple harmonic motion. The equation of motion of the particle is $f+9x=0$, where f is the acceleration of the particle and x is its displacement. Find the angular velocity of the particle.] [3 rad/s]

55. উপেক্ষণীয় ভরবিশিষ্ট একটি সর্পিল স্প্রিং হইতে ঝুলান 100 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 4 Hz কম্পাঙ্ক লইয়া আন্দোলিত হয়। যখন বস্তুটি স্থিরভাবে ঝুলিয়া থাকে তখন অতিরিক্ত 1 mm দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি করিতে হইলে উহাতে কী মানের নিম্নমুখী টান প্রয়োজন হইবে ?

[A body of mass 100 g oscillates with a frequency of 4 Hz when suspended from a spiral spring of negligible mass. When the body is hanging at rest, what is the downward pull needed to stretch the spring an additional 1 mm ?]

[**সমাধানের ইঙ্গিত ঃ** বস্তুর কম্পাঙ্ক, $n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$

এখানে K হইল স্প্রিং ধ্রুবক এবং m হইল বস্তুটির ভর।

প্রশ্নানুসারে, $4=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{100}}$

বা, $K=6\cdot32\times10^4$ dyn/cm

x দৈর্ঘ্যবৃদ্ধির জন্য প্রয়োজনীয় নিম্নমুখী টান F হইলে লেখা যায়, $F=K.x$

কাজেই, স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য 1 mm বৃদ্ধি করিতে প্রয়োজনীয় নিম্নমুখী টান,

$F=6\cdot32\times10^4\times0\cdot1=6\cdot32\times10^3$ dyn]

56. একটি তারকে 100 cm ব্যবধানে রক্ষিত দুইটি ক্ল্যাম্পের মধ্যে টান করিয়া রাখা হইল। এই সময় ইহার দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হইল 0·5 cm। তারের উপাদানের ঘনত্ব 9 g/cm³ এবং ইয়ং গুণাঙ্ক 9×10^{11} dyn/cm² হইলে তারটির তির্যক কম্পনের সর্বনিম্ন কম্পাঙ্ক কত?

[A wire is stretched between two clamps 100 cm apart while subjected to an extension of 0·05 cm. If the density of the material of the wire is 9 g/cm³ and its Young's modulus is 9×10^{11} dyn/cm², what is the lowest frequency of transverse vibration in the wire ?]

সমাধানের সঙ্কেত ঃ তারের তির্যক কম্পনের ক্ষেত্রে সর্বনিম্ন কম্পাঙ্ক,

$$n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{A\rho}} \quad \cdots \quad (i)$$

T=তারের টান, l=তারের দৈর্ঘ্য, A=প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল এবং ρ= তারের উপাদানের ঘনত্ব। ইয়ং গুণাঙ্ক Y হইলে লেখা যায়,

$$Y\times\frac{\Delta l}{L}=\frac{T}{A} \quad \cdots \quad (ii)$$

Δl=তারের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি

(i) এবং (ii) হইতে পাই, $n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Y}{\rho}\times\frac{\Delta l}{l}}$

রাশিগুলির মান বসাইয়া পাই, $n=35\cdot36$ Hz।

57. একটি দুই মুখ খোলা নলের প্রথম উপসুরকে একটি একমুখ বন্ধ নলের তৃতীয় উপসুরের সহিত সমসুর হইতে দেখা গেল। নল দুইটির দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

[The first overtone of an open pipe is found to be in unison with the third overtone of a closed pipe. What is the ratio of the lengths of the pipes ?]

সমাধান ঃ মনে করি, খোলা নলটির ও বদ্ধ নলটির মূল সুরের কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 এবং n_2 এবং ইহাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে l_1 এবং l_2। শব্দের গতিবেগ V হইলে লেখা যায়,

$$V=2l_1n_1 \text{ এবং } V=4l_2n_2$$

$$\text{কাজেই, } n_1=\frac{V}{2l_1} \text{ এবং } n_2=\frac{V}{4l_2} \qquad \cdots \qquad (i)$$

খোলা নলের প্রথম উপসুরের কম্পাঙ্ক$=2n_1$

বদ্ধ নলের তৃতীয় উপসুরের কম্পাঙ্ক$=7n_2$

[বদ্ধ নলে কেবলমাত্র বিজোড় সমমেলগুলিই উৎপন্ন হয় বলিয়া]

$$\text{শর্তানুসারে } \quad 2n_1=7n_2 \qquad \cdots \qquad (ii)$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হইতে পাই, $2.\frac{V}{2l_1}=7.\frac{V}{4l_2}$ বা, $\frac{l_1}{l_2}=\frac{4}{7}$

58. **(a)** একটি ইস্পাতনির্মিত তারের দৈর্ঘ্য 650 mm এবং ব্যাসার্ধ 0·40 mm। যদি ইহার মূলসুরের কম্পাঙ্ক 256 Hz হয় তাহা হইলে তারটির টান নির্ণয় কর। (ইস্পাতের ঘনত্ব$=7·8$ g/cm^3)

(b) A এবং B তার দুইটি একই উপাদানের তৈরী এবং ইহারা একই টানের অধীন। A তারের দৈর্ঘ্য B তারের দৈর্ঘ্যের 1·5 গুণ এবং A তারের কম্পাঙ্ক B তারের কম্পাঙ্কের 0·8 গুণ। তার দুইটির ব্যাসের তুলনা কর।

[(a) A steel wire has a length of 650 mm and a radius of 0·40 mm. If the frequency of the fundamental in 256 Hz, find the tension in the wire. (The density of steel$=7·8$ g/cm).

(b) The wires A and B, are made of the same material and they are made of the same tension. The length of the wire A is 1·5 times that of the wire B and the frequency of A is 0·8 times that of B. Compare their diameters.]

$$\left[(a) \quad 435 \text{ N}, \quad (b) \quad \frac{\text{B তারের ব্যাস}}{\text{A তারের ব্যাস}}=1·2 \right]$$

59. 0·5 m বাহুবিশিষ্ট এবং 0·5 g/cm^3 ঘনত্ববিশিষ্ট কাঠের একটি ঘনক জলে ভাসে। ইহা জলপৃষ্ঠের কতটা গভীরতা পর্যন্ত যায়? অতিরিক্ত x m দূরত্ব ঠেলিয়া নামাইতে কী বল প্রয়োজন হয়? দেখাও যে, যদি ঘনকটিকে এই অতিরিক্ত গভীরতা পর্যন্ত ডুবাইয়া ছাড়িয়া দেওয়া হয় তবে ইহা সরল দোল গতি সম্পাদন করে। এই কম্পনের দোলনকাল নির্ণয় কর।

[A cube of wood of side 0·5 m and density 0·5 g/cm^3 floats in water. How deep does it go beneath the water surface? Show that if the tube is pushed down this extra distance and then released, it will execute simple harmonic motion. Find the period of the oscillations.] [0·25 m, 2s]

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						5	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	16	20	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	18	22	26	29	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	6	10	13	16	19	23	26	29
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	14	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	17	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	6	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	3	5	8	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	17	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	4	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6006	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1 2 3	3 4 5	6 7 8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1 2 3	3 4 5	6 7 8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1 2 2	3 4 5	6 7 7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1 2 2	3 4 5	6 6 7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1 2 2	3 4 5	5 6 7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1 2 2	3 4 5	5 6 7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1 2 2	3 4 5	5 6 7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1 1 2	3 4 4	5 6 7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1 1 2	3 4 4	5 6 7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1 1 2	3 4 4	5 6 6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1 1 2	3 4 4	5 6 6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1 1 2	3 3 4	5 6 6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1 1 2	3 3 4	5 5 6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1 1 2	3 3 4	5 5 6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1 1 2	3 3 4	5 5 6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1 1 2	3 3 4	5 5 6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1 1 2	3 3 4	5 5 6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1 1 2	3 3 4	4 5 6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1 1 2	2 3 4	4 5 6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1 1 2	2 3 4	4 5 6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1 1 2	2 3 4	4 5 5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1 1 2	2 3 4	4 5 5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1 1 2	2 3 4	4 5 5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1 1 2	2 3 4	4 5 5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1 1 2	2 3 3	4 5 5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1 1 2	2 3 3	4 5 5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1 1 2	2 3 3	4 4 5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1 1 2	2 3 3	4 4 5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1 1 2	2 3 3	4 4 5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1 1 2	2 3 3	4 4 5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1 1 2	2 3 3	4 4 5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1 1 2	2 3 3	4 4 5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1 1 2	2 3 3	4 4 5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1 1 2	2 3 3	4 4 5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1 1 2	2 3 3	4 4 5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1 1 2	2 3 3	4 4 5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0 1 1	2 2 3	3 4 4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0 1 1	2 2 3	3 4 4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0 1 1	2 2 3	3 4 4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0 1 1	2 2 3	3 4 4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0 1 1	2 2 3	3 4 4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0 1 1	2 2 3	3 4 4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0 1 1	2 2 3	3 4 4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0 1 1	2 2 3	3 4 4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0 1 1	2 2 3	3 4 4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0 1 1	2 2 3	3 4 4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0 1 1	2 2 3	3 4 4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0 1 1	2 2 3	3 4 4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0 1 1	2 2 3	3 3 4

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0 1 1	1 1 2	2 2 3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0 1 1	1 1 2	2 2 3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0 1 1	1 1 2	2 2 3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0 1 1	1 2 2	2 2 3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0 1 1	1 2 2	2 2 3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0 1 1	1 2 2	3 3 3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0 1 1	1 2 2	3 3 3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0 1 1	2 2 2	3 3 3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0 1 1	2 2 2	3 3 3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0 1 1	2 2 2	3 3 4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0 1 1	2 2 2	3 3 4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0 1 1	2 2 2	3 3 4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0 1 1	2 2 3	3 3 4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0 1 1	2 2 3	3 3 4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1 1 2	2 3 3	4 5 5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1 1 2	2 3 4	4 5 5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1 1 2	2 3 4	4 5 5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1 1 2	2 3 4	4 5 6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1 1 2	3 3 4	4 5 6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1 1 2	3 3 4	4 5 6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1 1 2	3 3 4	5 5 6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1 1 2	3 3 4	5 5 6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1 1 2	3 3 4	5 5 6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1 1 2	3 4 4	5 6 6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1 1 2	3 4 4	5 6 6

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

NATURAL SINES

Degrees	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Mean Differences 1	2	3	4	5
0	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	·0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	·0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	·0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	15
5	·0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	·1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	·1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	·1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	·1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	12	14
10	·1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	12	14
11	·1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	·2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2232	3	6	9	11	14
13	·2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	·2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	·2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	·2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	·2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	·3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	·3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20	·3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	·3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	·3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	14
23	·3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	14
24	·4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	·4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	·4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	·4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	·4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	·4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30	·5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	·5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	·5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	·5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	·5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	·5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	10	12
36	·5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	·6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	·6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	·6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40	·6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	·6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	·6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	·6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	·6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10

NATURAL SINES

Degrees	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Mean Differences 1	2	3	4	5
45	·7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	·7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	·7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	·7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	·7547	7558	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50	·7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	·7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	·7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	·7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9
54	·8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8
55	·8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	·8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	·8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	·8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	·8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60	·8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	[illegible]	8755	876[illegible]	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	·8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	·8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	·8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	·9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	·9135	[illegible]43	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9108	1	2	3	5	6
67	·9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	·9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	·9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70	·9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	·9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	·9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	3	4
73	·9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4
74	·9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	·9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	[illegible]99	1	1	2	3	4
76	·9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	[illegible]40	1	1	2	3	3
77	·9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	·9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	·9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80	·9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	·9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	·9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	·9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	·9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	2
85	·9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	·9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	·9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1
88	·9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	·9998	9999	9999	9999	9999	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	0	0	0	0	0
90	1·000														

NATURAL TANGENTS

Degrees	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Mean Differences 1	2	3	4	5
0	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	·0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	·0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	·0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	·0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	·1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	·1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	·1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	·1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	·1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	·1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	·2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	·2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	·2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	·2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	·2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	·3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	·3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	·3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13	16
20	·3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	·3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	·4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	·4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	·4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	·4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	1[illegible]
26	·4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	·5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	·5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	·5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	·5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	·6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	·6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	·6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	·6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	·7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	·7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	·7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	·7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	·8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	·8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	·8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	·9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	·9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	·9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29

NATURAL TANGENTS

Degrees	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	Mean Differences 1	2	3	4	5
45	1·0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1·0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1·0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1·1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
49	1·1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1·1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1·2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	1·2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1·3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1·3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1·4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1·4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1·5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1·6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1·6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
60	1·7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
61	1·8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
62	1·8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14	27	41	55	68
63	1·9626	9711	9797	9883	9970	2·0057	2·0145	2·0233	2·0323	2·0413	15	29	44	58	73
64	2·0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	47	63	78
65	2·1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	51	68	85
66	2·2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18	37	55	73	92
67	2·3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	20	40	60	79	99
68	2·4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22	43	65	87	108
69	2·6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	717[illegible]	7326	24	47	71	95	119
70	2·7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	87[illegible]	8878	26	52	78	104	131
71	2·9042	9208	9375	9544	9714	9887	3·0061	3·0237	3·04[illegible]	3·0595	29	58	87	116	145
72	3·0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32	64	96	129	161
73	3·2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36	72	108	144	180
74	3·4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	0806	7062	41	81	122	163	204
75	3·7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	46	93	139	186	232
76	4·0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972	53	107	160	213	267
77	4·3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646					
78	4·7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	5·0045	5·0504	5·0970					
79	5·1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140					
80	5·6713	7297	7894	8502	9124	9758	6·0405	6·1066	6·1742	6·2432					
81	6·3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	7·0264					
82	7·1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	8·0285					
83	8·1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	9·0579	9·2052	9·3572					
84	9·5144	9·677	9·845	10·02	10·20	10·39	10·58	10·78	10·99	11·[illegible]0					
85	11·43	11·66	11·91	12·16	12·43	12·71	13·00	13·30	13·62	13·95					
86	14·30	14·67	15·06	15·46	15·89	16·35	16·83	17·34	17·89	18·46					
87	19·08	19·74	20·45	21·20	22·02	22·90	23·86	24·90	26·03	27·27					
88	28·64	30·14	31·82	33·69	35·80	38·19	40·92	44·07	47·74	52·08					
89	57·29	63·66	71·62	81·85	95·49	114·6	143·2	191·0	286·5	573·0					
90	∞														

Mean differences cease to be sufficiently accurate.

ডঃ অজয়কুমার চক্রবর্তী ও নীলিমা চক্রবর্তী প্রণীত

পদার্থবিজ্ঞানবিচিন্তা

এই গ্রন্থটি পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন বিষয়-সংক্রান্ত বহুসংখ্যক চিন্তা উদ্দীপক প্রশ্ন ও উহাদের সমাধানের সংকলন। ছোট ছোট প্রশ্নের সমাধান সন্ধানের মাধ্যমে পদার্থবিজ্ঞানের খুঁটিনাটি বিষয়গুলির উপর আলোকপাত করাই এই গ্রন্থের উদ্দেশ্য। 'পদার্থবিজ্ঞান বিচিন্তা' গ্রন্থটি প্রচলিত 'প্রশ্নোত্তর' জাতীয় গ্রন্থ নয়। নানা কারণে পাঠ্যপুস্তকে অনেক খুঁটিনাটি বিষয়ের বিস্তারিত আলোচনা সম্ভব হয় না। অথচ পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন বিষয়ের উপর সুস্পষ্ট ধারণা দিতে হইলে ঐ সকল খুঁটিনাটি বিষয়গুলিকে ছাত্রছাত্রীদের গোচরে আনা প্রয়োজন